

# کارایی گوشه محدب در ورودی خم برای مهار امواج مورب فوق بحرانی

محمدرضا جعفرزاده<sup>۱\*</sup>، علیرضا شمخالچیان<sup>۲</sup>، محبوبه جمعه زاده<sup>۳</sup>

۱- استاد، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

۲ و ۳- دانش آموخته کارشناسی ارشد عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

\* مشهد، میدان آزادی، کد پستی ۹۱۷۷۹۴۸۹۷۴

jafarzad@um.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله روش جدیدی برای مهار امواج فوق بحرانی در خم با نصب گوشه محدب در ورودی آن معرفی می‌شود. در این روش امواج منفی ناشی از گوشه محدب با امواج مثبت ناشی از دیواره خارجی تداخل یافته و در نتیجه ارتفاع موج مثبت کاهش می‌یابد. نخست روابط تحلیلی موجود برای جریان فوق بحرانی در تبدیل‌های مستقیم و خم‌ها و اندرکنش امواج در آنها مرور می‌شود. آنگاه با استفاده از روش حجم محدود Roe-TVD جریان فوق بحرانی در تبدیل‌ها و خم‌ها به صورت عددی مدل‌سازی می‌شود. دقت و صحت نتایج این روش عددی در مقایسه با روابط تحلیلی و نتایج عددی و آزمایشگاهی سایر محققان رضایت بخش ارزیابی می‌شود. در ادامه به منظور کاهش ارتفاع موج در دیواره خارجی کانال خمیده، از گوشه محدب کوچک واقع در ورودی دیوار داخلی خم استفاده می‌شود. تداخل امواج منفی و مثبت، موج یک قله‌ای دیواره خارجی را به موج دو قله‌ای کوچکتری تبدیل می‌کند. زاویه بازشدگی بهینه گوشه محدب ( $\alpha$ )، تابعی از نسبت بدون بعد عرض بازشدگی به عرض خم ( $d/b$ )، شعاع انحنای خم به عرض کانال ( $r_c/b$ ) و عدد فرود جریان ورودی به خم ( $Fr_0$ ) است. مطالعات عددی برای عرض‌های بدون بعد ( $d/b=0.04$  و  $0.08$ ،  $0.12$ ) در محدوده ( $2/5 < Fr_0 < 4/5$ ) و برای سه خم با ( $20$ ،  $15$  و  $r_c/b=10$ ) نشان داد که در صورت استفاده از گوشه محدب بهینه، ارتفاع امواج بین  $10\%$  تا  $45\%$  کاهش پیدا می‌کند.

**کلید واژگان:** کانال‌های خمیده، جریان فوق بحرانی، امواج مورب، تبدیل، گوشه محدب، روش Roe-TVD.

## ۱- مقدمه

ارتفاع آب را به طور ناخواسته افزایش یا کاهش می‌دهد. گوشه‌های مقعر، امواج تیز و گوشه‌های محدب، امواج انبساطی را منتشر می‌کنند. در تبدیل‌های مستقیم، امواج تیز و انبساطی با یکدیگر برخورد می‌کنند. در صورت

امواج مورب، به طور طبیعی در جریان‌های فوق بحرانی به علت انحراف دیواره‌های کانال یا انحنای آنها به وجود می‌آیند و در پایین دست منتشر می‌شوند. پیدایش امواج،

بر طبق تعریف تداخل امواج به معنای تولید امواج منفی برای ترکیب با امواج مثبت با شدت مساوی است. آنها کاربرد این روش را در تبدیل شوت‌ها موثر دانستند (Vischer, and Hager, 1994). رینر و هاگر عملکرد متفرق کننده امواج<sup>۱</sup> هرمی شکل را در تبدیل جمع شونده بررسی کردند (Reinauer and Hager, 1996).

بلترامی و همکاران در تحقیق آزمایشگاهی، موانع کوچکی را در کانال بالادست قرار دادند. در برخورد جریان فوق بحرانی با این موانع، امواج مثبتی تولید شد که در ترکیب با امواج منفی دیواره داخلی، ارتفاع آب را در این دیواره بالا آورد و در نتیجه از ارتفاع امواج در دیواره خارجی خم کاسته شد (Beltrami et al., 2007).

در این مقاله برای اولین بار طراحی گوشه محدب کوچک در ورودی خم پیشنهاد می‌شود که امواج منفی تولید می‌کند که با امواج مثبت دیواره خارجی خم ترکیب می‌شود. این روش کم هزینه، عملی و ساده است. در یک گوشه بهینه، موج یک قله‌ای دیوار خارجی به موج دو قله‌ای تبدیل شده و ارتفاع بیشینه آن، به مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد.

طراحی بهینه گوشه محدب و تعیین پارامترهای مؤثر بر طراحی با استفاده از روش عددی Roe-TVD انجام می‌شود که الگوی عددی قوی در شبیه‌سازی امواج تیز در آبهای کم عمق به شمار می‌رود. مزیت این روش در مقایسه جواب‌های آن با روابط تحلیلی و نتایج عددی و آزمایشگاهی سایر محققان تأیید می‌شود. ارزیابی کارایی گوشه محدب با توجه به پارامترهای طراحی ارائه خواهد شد.

طراحی صحیح تبدیل، این امواج یکدیگر را خنثی کرده و از انتشار آنها در کانال پایین دست جلوگیری می‌شود. روش‌های تحلیلی مطالعه پیدایش امواج در تبدیل‌های مستقیم در منابع استاندارد علم هیدرولیک مانند Henderson (1966) و Chow (1986) تشریح شده است. در سالهای اخیر از روشهای عددی پیشرفته برای مطالعه امواج در تبدیل‌ها استفاده شده است، (Causon et al., 1999) و (Jan et al., 2009).

هنگامی که جریان فوق بحرانی به کانال خمیده‌ای وارد می‌شود، دسته‌ای از امواج مورب در خم ایجاد می‌شوند. تعیین شکل کلی، موقعیت و ارتفاع این امواج در دیواره‌ها مورد علاقه محققان متعددی بوده است. کارمن و همچنین ناپ-ایپن در سال ۱۹۳۸ با اعمال فرضیهایی، روابطی تحلیلی را برای تعیین موقعیت امواج و ارتفاع سطح آب در خم ارائه کردند (Chow, 1986). در سالهای اخیر جریان فوق بحرانی در خم‌ها بیشتر به صورت آزمایشگاهی و عددی مطالعه شده است. در این زمینه می‌توان به بررسی‌های آزمایشگاهی رینر و هاگر و همچنین مطالعات عددی ولیانی و کالفی اشاره کرد (Reinauer and Hager, 1997), (Valiani and Caleffi, 2005).

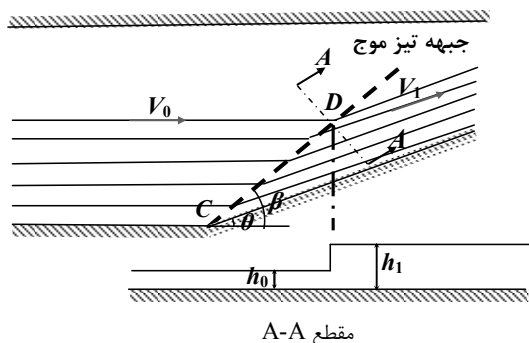
به‌طور کلی ایجاد امواج در رژیم فوق بحرانی در خم‌ها از دیدگاه مهندسی نامطلوب است. بالا رفتن ارتفاع آب در قله امواج به اندازه چندین برابر عمق جریان ورودی، ارتفاع دیواره‌های کانال را افزایش می‌دهد. به‌علاوه این امواج در محدوده بزرگی از کانال پایین دست خم نیز توسعه یافته و سطح آب را ناهموار می‌سازند. بنابراین ابداع روشهایی برای کاستن از ارتفاع امواج به منظور ایجاد سطح هموارتر، ارزش فراوانی دارد.

ویشر و هاگر شش روش مختلف، از جمله تداخل امواج را برای کاهش ارتفاع امواج فوق بحرانی معرفی کردند.

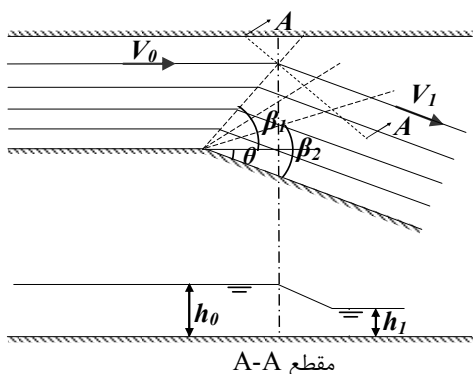
$$\beta = \sqrt{3} \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{Fr^2 - 1}} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{Fr^2 - 1}} \right) \quad (۴)$$

$$\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$$

$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{Fr_0^2 + 2}{Fr_1^2 + 2} \quad (۵)$$



شکل ۱ امواج تیز مورب در گوشه مقعر بر اثر انحراف دیواره به داخل (Chow, 1986)



شکل ۲ امواج انبساطی ناشی از بازشدگی کانال در گوشه محدب (Chow, 1986)

### ۲-۳- اندرکنش امواج تیز و انبساطی

اگر مطابق شکل ۳، جریان فوق بحرانی به تبدیلی وارد شود که دیواره‌های آن به ترتیب با زاویه‌های  $\theta_1$  و  $\theta_2$  به داخل و خارج جریان چرخش داشته باشند، امواج تیز و انبساطی ناشی از گوشه‌ها با یکدیگر برخورد می‌کنند و

### ۲- رفتار هیدرولیکی جریان فوق بحرانی در تبدیل‌های مستقیم

هنگامی که جریان فوق بحرانی به تبدیل تنگ شونده یا بازشونده‌ای (گوشه مقعر یا محدب) وارد می‌شود، امواجی مثبت و منفی در جریان به وجود می‌آیند. در این بخش چگونگی شکل‌گیری این امواج و اندرکنش آنها مطالعه می‌شود.

#### ۲-۱- امواج تیز مورب

مطابق شکل ۱، با ورود جریان فوق بحرانی با عمق  $h_0$  و عدد فرود  $Fr_0$  به کانالی که دیواره آن با زاویه  $\theta$  تنگ شده، امواج تیزی در گوشه مقعر ایجاد می‌شود. این امواج با راستای جریان در کانال بالادست زاویه  $\beta$  ساخته و عمق جریان را به  $h_1$  افزایش می‌دهند.  $h_1$  و  $\beta$  از روابط زیر محاسبه می‌شود، (Chow, 1986).

$$\sin \beta = \frac{1}{Fr_0} \sqrt{\frac{1}{2} \frac{h_1}{h_0} \left(1 + \frac{h_1}{h_0}\right)} \quad (۱)$$

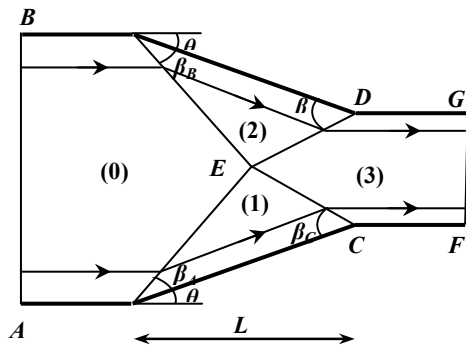
$$\frac{h_1}{h_0} = \frac{\tan \beta}{\tan(\beta - \theta)} \quad (۲)$$

#### ۲-۲- امواج انبساطی مرکزی

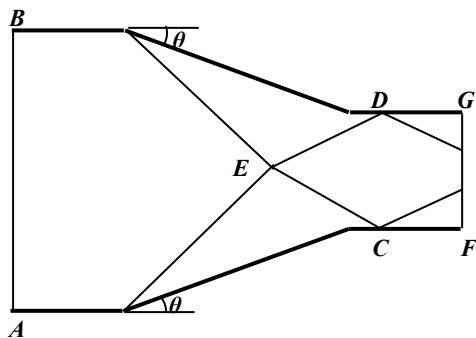
جریان فوق بحرانی در گوشه محدب با زاویه بازشدگی  $\theta$ ، امواج انبساطی منفی تولید می‌کند (شکل ۲). این امواج در کانال منتشر شده و ارتفاع آب را به تدریج کم می‌کنند. عدد فرود بالا دست برابر  $Fr_0$  و عدد فرود پایین دست برابر  $Fr_1$  است. مشخصات هیدرولیکی جریان در پایین دست از روابط زیر محاسبه می‌شود. در این روابط  $\beta_1$  و  $\beta_2$  محدوده امواج انبساطی را نشان می‌دهند، (Chow, 1986).

$$\beta_2 = \sin^{-1} \frac{1}{Fr_1}, \quad \beta_1 = \sin^{-1} \frac{1}{Fr_0} \quad (۳)$$

امواج انبساطی خستی شده و به کانال پایین دست انتقال نمی یابند. چنانچه تبدیل به درستی طرح نشده باشد، امواج در کانال پایین دست منتشر می شوند که این حالت مطلوب نیست (شکل ۴-ب).



الف- طراحی مناسب



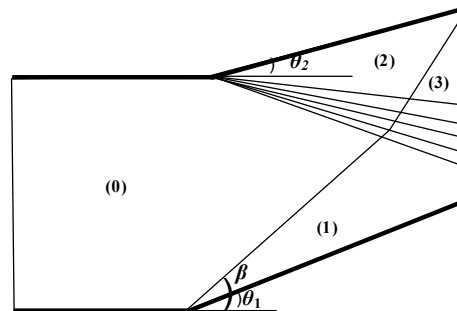
ب- طراحی نامناسب

شکل ۴ طراحی تبدیل تنگ شونده (Causon et al, 1999)

در طراحی بهینه، طول تبدیل ( $L$ ) تابع عرض کانال بالادست ( $b$ )، زاویه تنگ شدگی  $\theta$  و زاویه  $\beta_A$  بوده و از حل معادله ضمنی زیر بدست می آید (Causon et al, 1999). در این رابطه  $\beta_A$  از حل همزمان روابط (۱) و (۲) محاسبه می شود:

$$L = \frac{b}{2 \tan \beta_A} \left( 1 + \frac{(\tan \beta_A - \tan \theta) \left( L - \frac{b}{2 \tan \beta_A} \right)}{\frac{b}{2} - L \tan \theta + \tan \theta \left( L - \frac{b}{2 \tan \beta_A} \right)} \right) \quad (6)$$

چهار ناحیه در سطح تبدیل ایجاد می شود. در ناحیه (0) مشخصات جریان تغییر نمی کند. در ناحیه (1) به علت برخورد جریان با گوشه مقعر، مشابه شکل ۱، سطح آب افزایش می یابد. عمق جریان و زاویه جبهه موج تیز از حل همزمان معادلات (۱) و (۲) بدست می آید. در ناحیه (2) به علت وجود گوشه محدب، مشابه شکل ۲، سطح آب کاهش پیدا می کند. تغییرات سطح آب از ناحیه (0) به ناحیه (2) تدریجی بوده و توسط امواج انبساطی رخ می دهد. محدوده این تغییرات با تعیین  $\beta_1$  و  $\beta_2$  از حل همزمان معادلات (۳) و (۴) بدست می آید. عمق جریان در این ناحیه از رابطه (۵) محاسبه می شود. در ناحیه (3) امواج تیز و انبساطی با یکدیگر برخورد می کنند. عمق آب در این محدوده بین نواحی (1) و (2) است.



شکل ۳ تلاقی امواج تیز و انبساطی در تبدیل (Chow, 1986)

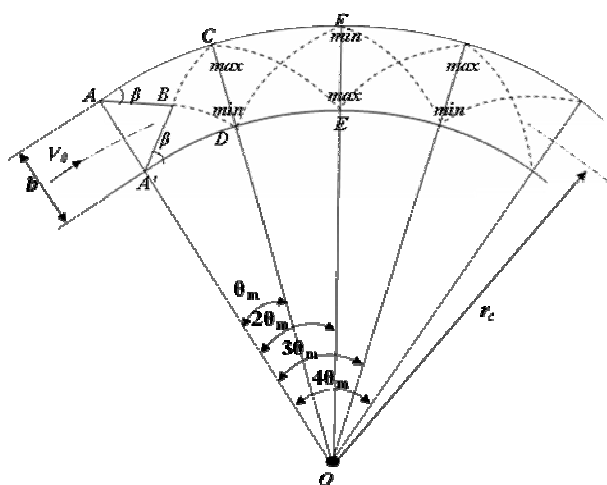
## ۲-۴- اندرکنش امواج تیز و انبساطی متقارن

مطابق شکل ۴-الف با ورود جریان فوق بحرانی به تبدیلی که دو دیواره آن با زاویه  $\theta$  تنگ شده، دو موج تیز متقارن به وجود می آیند که در نقطه E واقع بر محور تقارن تبدیل با یکدیگر برخورد کرده و به سمت دیواره ها منعکس می شوند. در صورت طراحی صحیح تبدیل، این دو موج در نقاط C و D به دیواره مقابل می رسند و در ترکیب با

ناپ و ایپن رابطه زیر را برای پروفیل سطح آب در دیوار خارجی و داخلی ارائه کردند (Chow, 1986):

$$\frac{h}{h_0} = Fr_0^2 \sin^2\left(\beta \pm \frac{\theta}{2}\right) \quad 0 < \theta < \theta_m \quad (9)$$

در معادله (۹)،  $h$  ارتفاع آب در زاویه  $\theta$  و  $h_0$  ارتفاع آب در ورودی خم تعریف می‌شود. با استفاده از معادلات (۷) تا (۹)، موقعیت و ارتفاع اولین فراز موج در دیوار خارجی محاسبه می‌شود.



شکل ۵ تشکیل امواج مورب جریان فوق بحرانی در خم (Chow, 1986)

#### ۴- تعبیه گوشهٔ محدب در ورودی خم‌های فوق بحرانی به منظور کاهش ارتفاع امواج

مطابق آنچه گفته شد اندرکنش امواج تیز و انبساطی در تبدیل‌های مستقیم باعث تخفیف شدت امواج و کاهش ارتفاع آنها می‌شود. بنابراین اگر در ورودی خم‌ها نیز از گوشهٔ محدب مطابق شکل ۶ استفاده شود، امواج انبساطی منتشر می‌شود. با هدایت صحیح این امواج بر اولین قله امواج تیز واقع در دیوار خارجی خم، از ارتفاع آب کاسته می‌شود. بدیهی است کاهش ارتفاع اولین قله، به کاهش

با توجه به تقارن تبدیل مطابق شکل ۴-الف داریم:  
 $\beta_C = \beta_D$  و  $\beta_A = \beta_B$

#### ۳- هیدرولیک جریان فوق بحرانی در خم‌ها

با ورود جریان فوق بحرانی به کانال خمیده، بر اثر انحنای دیواره‌های کانال، مجموعه‌ای از امواج مورب در سطح آب به وجود می‌آیند. در شکل ۵، امواج فوق بحرانی مثبت و منفی در خم ترسیم شده است. اولین فراز موج در دیوار خارجی با زاویه  $\theta_{max}$  از ورودی خم و اولین نشیب آن در دیواره داخلی با زاویه  $\theta_{min}$  تولید می‌شود. در محاسبات نظری فرض بر آن است که  $\theta_{max} = \theta_{min} = \theta_m$ . موقعیت فراز و نشیب این امواج از هندسه کانال و مشخصات جریان به دست می‌آید و بر این اساس داریم، (Chow, 1986), (Knapp, 1951):

$$\theta_m = \tan^{-1} \frac{2b}{(2r_c + b) \tan(\beta)} \quad (7)$$

در معادله (۷)،  $b$  عرض کانال خمیده،  $r_c$  شعاع مرکزی خم و زاویه  $\beta$  بر حسب عدد فرود ورودی کانال ( $Fr_0$ ) تعریف می‌شود:

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{Fr_0}\right) \quad ; \quad Fr_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gh_0}} \quad (8)$$

در معادله (۸) پارامترهای  $h_0$  و  $V_0$  به ترتیب عمق و سرعت آب در ورودی خم و  $g$  شتاب جاذبه است. در محاسبات تحلیلی فرض می‌شود که پس از تشکیل اولین موج در زاویه  $\theta_m$ ، مجموعه امواج متوالی با فراز و نشیب‌های پی در پی در امتداد خم در زوایای ( $2\theta_m, 3\theta_m, \dots$ )، عیناً و بدون استهلاک مطابق شکل ۵ توسعه می‌یابند (Chow, 1986).

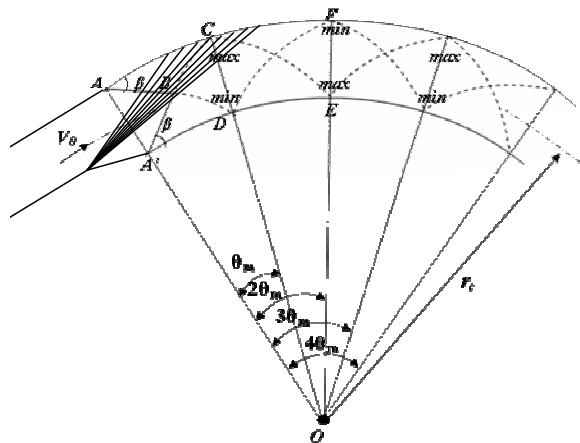
در این معادلات،  $h$  ارتفاع سطح آب در هر نقطه،  $g$  شتاب ثقل و  $u$  و  $v$  مؤلفه سرعت متوسط‌گیری شده در عمق به ترتیب در راستاهای  $x$  و  $y$  می‌باشند.

### ۶- الگوی دو بعدی روش عددی Roe-TVD

در این مقاله به منظور حل معادلات دوبعدی آب‌های کم‌عمق (معادلات سنت و نانت) از روش عددی حجم محدود Roe-TVD بر شبکه‌ای با سازمان چهار گوشه استفاده شد. این روش جزو روشهای گدونف با قدرت تفکیک بالا بوده و می‌تواند ناپیوستگی‌ها را در جریان‌های فوق بحرانی به خوبی شبیه‌سازی کند.

برای مهار نوسان‌ها از محدودکننده شیب Minmod استفاده شد (Leveque, 2002). برای مدل‌سازی دیواره‌های کانال شرط مرز لغزشی<sup>۱</sup> به کار رفت. رژیم جریان در کانال‌های بررسی شده، فوق بحرانی بود و بنابراین تعیین دو پارامتر هیدرولیکی مانند عمق و دبی در کانال بالادست به عنوان شرط مرزی کافی بود. معادلات غیردائمی آب‌های کم عمق تا رسیدن به حالت دائمی و پایدار تحلیل شد و هنگامی که اختلاف مجموع اعماق تمامی سلول‌ها در دو گام متوالی زمانی کمتر از  $10^{-7}$  شد، پاسخ‌ها به عنوان حل دائمی در نظر گرفته شد. الگوی عددی بر اساس کدی که توسط مؤلفان نوشته شد، برای تبدیل‌ها و خم‌های مورد نظر در مقاله به کار رفت. جزئیات روش عددی حجم محدود Roe-TVD در مقاله دیگری توصیف شده است (شمخالچیان و جعفرزاده، ۱۳۸۷).

ارتفاع سایر قله‌ها نیز منجر می‌شود. همچنین کاهش عمق آب در دیواره خارجی، به افزایش عمق آب در دیوار داخلی منجر می‌شود که این باعث هموارتر شدن سطح آب می‌شود. در این تحقیق، برای نخستین بار از این شیوه برای کاهش ارتفاع سطح آب استفاده می‌شود.



شکل ۶ ترکیب امواج مثبت دیوار خارجی خم با امواج منفی گوشه محدب

### ۵- معادلات آب‌های کم عمق

در این تحقیق برای تحلیل جریان فوق بحرانی در کانال‌ها از معادلات آب‌های کم عمق استفاده می‌شود. شکل دیفرانسیلی معادلات آب‌های کم عمق در دو بعد برای کانال افقی با صرف نظر کردن از اثر اصطکاک به صورت زیر است (Toro, 2001):

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

در این معادله،  $U$  بردار متغیرهای بقا و  $F$ ،  $G$  بردار شار به ترتیب در راستای محوره‌های  $x$  و  $y$  بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

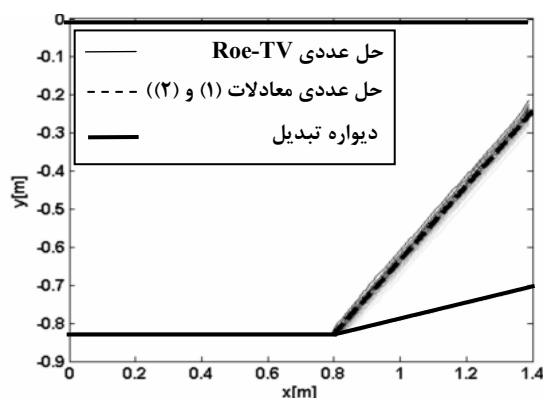
$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}; F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix}; G(U) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

1. Slip Boundary Condition

محاسباتی مشابه حالت ۷-۱ است، اما  $Fr_0 = 1/95$  می‌باشد. در این حالت نیز نتایج روش عددی Roe-TV درای  $\beta_1$  و  $\beta_2$  TVD برای عدد فرود پایین دست، عمق و زوایای (۳) و نتایج روش عددی کاسن و همکاران برای کانال پایین دست در جدول ۲ آورده شده است. نتایج بسیار به یکدیگر نزدیک هستند و سطح آب تا ۵۱٪ کاهش یافته است. در شکل ۸، توسعه موج انبساطی بر اساس روشهای عددی و تحلیلی ترسیم شده است.

جدول ۱ مقایسه نتایج عددی Roe-TV در حل تحلیلی و نتایج عددی HLL کاسن و همکاران برای مسئله امواج تیز مورب

متغیر	حل تحلیلی معادلات (۱) و (۲)	نتایج عددی کاسن و همکاران	نتایج عددی Roe-TV در
$Fr_1$	۱/۳۶۲	۱/۳۶۲	۱/۳۶۲
$h_1$ (m)	۱/۵۴۳	۱/۵۴۳	۱/۵۴۳
$\beta$	۴۴/۴۵۰	۴۵/۰۰۰	۴۵/۰۰۰



شکل ۷ توسعه امواج تیز مورب در گوشه مقعر

### ۷-۳- اندرکنش امواج تیز و انبساطی

برای مطالعه برخورد امواج تیز مورب و امواج انبساطی مرکزی، تبدیلی مطابق شکل ۳ به طول  $1/4$  m و عرض

## ۷-۲ مدل سازی جریان فوق بحرانی در تبدیل های مستقیم

به منظور ارزیابی توانایی روش عددی Roe-TV در این بخش امواج جریان فوق بحرانی در کانال های مستقیم مدل سازی و با نتایج حل تحلیلی و روشهای عددی سایر محققان مقایسه می شود.

### ۷-۲-۱ امواج تیز مورب

گوشه مقعری مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شد. طول و عرض کانال ورودی و زاویه انحراف گوشه ( $\theta$ ) به ترتیب برابر  $1/4$  m،  $0/84$  m و  $15$  درجه بود. عمق جریان بالادست برابر  $1$  m و عدد فرود برابر  $Fr_0 = 2$  فرض شد. این گوشه در سال ۱۹۹۹ توسط کاسن و همکاران با استفاده از روش عددی حجم محدود HLL با شبکه ای  $140 \times 84$  سلولی مدل سازی شد (Causon et al, 1999). در جدول ۱ نتایج عددی روش Roe-TV برای شبکه ای با همان اندازه و تعداد سلول با نتایج حل تحلیلی بخش ۲ (معادلات (۱) و (۲)) و نتایج عددی کاسن و همکاران برای عدد فرود و عمق کانال پایین دست مقایسه شده است. در هر سه روش عمق جریان و عدد فرود خروجی تا سه رقم بعد از اعشار تطابق کامل دارند، هر چند زاویه موج تیز عددی حدود  $0/55$  درجه بیشتر از مقدار تحلیلی تخمین زده شده است. مطابق محاسبات ارتفاع آب تا  $54\%$  افزایش داشته است. در شکل ۷ امواج تیز مورب در تبدیل ترسیم شده است.

### ۷-۲-۲ امواج انبساطی مرکزی

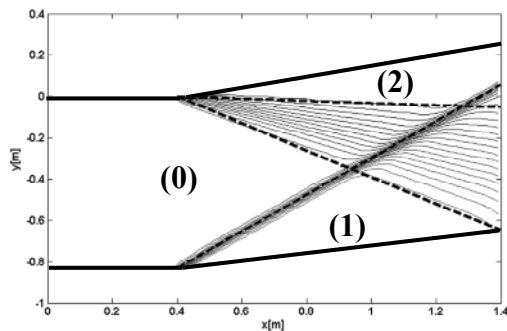
گوشه محدبی مطابق شکل ۲ با زاویه انحراف  $15$  درجه در نظر گرفته شد. سایر مشخصات هندسی و هیدرولیکی کانال بالادست و همچنین تعداد سلول های شبکه

#### ۴-۷- اندرکنش امواج تیز و انبساطی متقارن

در سال ۲۰۰۹ جن و همکاران به منظور مطالعه اندرکنش امواج تیز متقارن، تبدیلی را مشابه شکل ۴-الف با استفاده از روش عددی حجم محدود FMUSTA با ۳۷۰۰ سلول مدل سازی کردند (Jan et al, 2009).

جدول ۳ مقایسه نتایج عددی Roe-TVD با حل تحلیلی و نتایج عددی کاسن و همکاران برای اندرکنش امواج تیز و انبساطی مرکزی

متغیر	حل تحلیلی معادلات (۱) تا (۵)	نتایج عددی کاسن و همکاران	نتایج عددی Roe-TVD
$Fr_1$	۱/۴۶۲	۱/۴۶۳	۱/۴۶۰
$h_1(m)$	۱/۴۴۳	۱/۴۴۳	۱/۴۴۳
$V_1(m/s)$	۵/۵۰۰	۵/۵۰۰	۵/۵۰۰
$Fr_2$	۳/۲۲۸	۳/۲۳۰	۳/۲۲۸
$h_2(m)$	۰/۴۸۳	۰/۴۸۳	۰/۴۸۳
$V_2(m/s)$	۷/۰۲۶	۷/۰۲۵	۷/۰۲۵



حل تحلیلی (معادلات ۱ تا ۵) - -

— دیواره تبدیل — حل عددی Roe-TVD

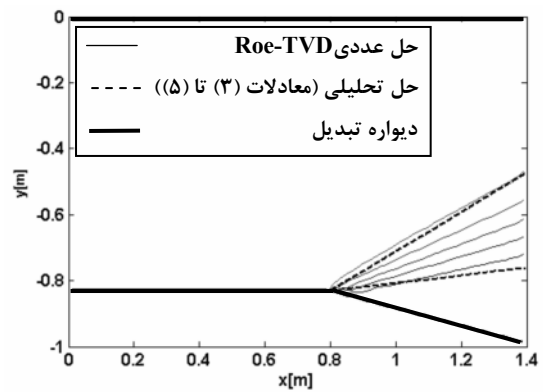
شکل ۹ اندرکنش امواج تیز و انبساطی مرکزی

عرض کانال های بالادست و پایین دست به ترتیب برابر ۲۰ و ۱۰/۵۵ متر، طول تبدیل برابر ۲۲/۲۳ متر و زوایای انحراف دو طرف مساوی و برابر ۱۲ درجه بود. عمق و

در ورودی در نظر گرفته شد. زوایای انحراف تبدیل به داخل برابر ۱۰ درجه و به خارج برابر ۱۵ درجه بود. عمق جریان و عدد فرود در کانال بالادست به ترتیب برابر ۱ متر و ۲ فرض شد.

جدول ۲ مقایسه نتایج عددی Roe-TVD با حل تحلیلی و نتایج عددی HLL کاسن و همکاران برای مسئله امواج انبساطی مرکزی

متغیر	حل تحلیلی معادلات (۳) تا (۵)	نتایج عددی کاسن و همکاران	نتایج عددی Roe-TVD
$Fr_1$	۳/۱۳۵	۳/۱۳۸	۳/۱۳۶
$h_1(m)$	۰/۴۹۱	۰/۴۹۰	۰/۴۹۰
$\beta_1^\circ$	۳۰/۸۵۲	۳۰/۸۵۰	۳۰/۸۵۰
$\beta_2^\circ$	۱۸/۶۰۲	۱۹/۰۰۰	۱۹/۰۰۰



شکل ۸ توسعه امواج انبساطی مرکزی در گوشه محدب

در جدول ۳ نتایج روش عددی Roe-TVD با نتایج عددی کاسن و همکاران برای شبکه ای ۸۰×۱۵۰ سلولی همراه با حل تحلیلی آورده شده است. در هر سه روش، نتایج بسیار نزدیک هستند. در شکل ۹ نتایج حل های عددی و تحلیلی ترسیم شده که در آن امواج مثبت و منفی به علت عدم تقارن تبدیل در کانال پایین دست توسعه یافته اند.



سلول‌ها به نتایج بهتری می‌توان رسید. جن و همکاران با افزایش تعداد سلول‌ها به ۳۳۹۰۰ سلول این موضوع را ثابت کردند.

### ۸- مدلسازی جریان در خم‌ها و مقایسه نتایج عددی با نتایج آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی سایر محققان

رینر و هاگر جریان فوق بحرانی در کانال‌های خمیده را به صورت آزمایشگاهی مطالعه کردند. مشخصات هندسی یکی از کانال‌های آنها به شرح زیر است (Reinauer and Hager, 1997):

شیب کانال = ۰°

شعاع مرکزی کانال = ۳/۶۰۷ m

زاویه مرکزی خم = ۵۱°

عرض کانال = ۰/۲۵ m

در شکل ۱۱ نتایج مدل عددی Roe-TVD با روابط آزمایشگاهی رینر و هاگر در دیواره خارجی خم به ازای مقادیر مختلف عدد فرود ورودی مقایسه شده است.

در این شکل  $\tau_{ow}$  عمق بی‌بعد شده در دیواره خارجی بوده و با رابطه زیر تعریف می‌شود (Reinauer and Hager, 1997):

$$\tau_{ow} = \frac{h - h_0}{h_{max} - h_0} \quad (12)$$

در این رابطه  $h_{max}$  ارتفاع بیشینه موج در خم است. رینر و هاگر همچنین بر اساس مشاهدات آزمایشگاهی، دو رابطه زیر را برای محاسبه  $\theta_{max}$  (محل تشکیل اولین فراز موج در دیواره خارجی) و عمق آب در دیوار خارجی ارائه کردند.

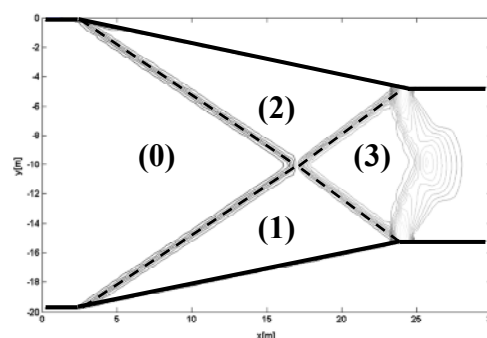
$$\tan \theta_{max} = \begin{cases} Fr_0 \frac{b}{r_c} & Fr_0 \frac{b}{r_c} \leq 0.35 \\ 0.6 \sqrt{Fr_0 \frac{b}{r_c}} & Fr_0 \frac{b}{r_c} > 0.35 \end{cases} \quad (13)$$

$$\tau_{ow} = \sin^{1.5} \left[ \left( \frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_{max}} \right) \right], \quad 0 \leq \theta / \theta_{max} < 1.25 \quad (14)$$

عدد فرود در کانال بالادست برابر ۱ متر و ۲/۷ فرض شد. این کانال با استفاده از روش حجم محدود Roe-TVD و با همان تعداد سلول مدل‌سازی شد. نتایج روش عددی Roe-TVD در نواحی (1) و (3) از شکل ۴-الف با نتایج عددی جن و همکاران و همچنین حل تحلیلی در جدول ۴ ارائه شده است. جواب‌ها در هر سه روش یکسان است. در شکل ۱۰ نتایج روش عددی ترسیم شده است.

جدول ۴ مقایسه نتایج عددی Roe-TVD با حل تحلیلی و نتایج عددی جن و همکاران برای اندرکنش امواج تیز و انبساطی متقارن

متغیر	حل تحلیلی معادلات (۱) تا (۶)	نتایج عددی جن و همکاران	نتایج عددی Roe-TVD
$Fr_1$	۱/۸۶۸	۱/۸۶۸	۱/۸۶۸
$h_1$ (m)	۱/۶۷۶	۱/۶۷۷	۱/۶۷۷
$Fr_3$	۱/۲۴۹	۱/۲۴۸	۱/۲۴۸
$h_3$ (m)	۲/۵۶۲	۲/۵۶۱	۲/۵۶۱



حل تحلیلی (معادلات ۱ تا ۶) - -

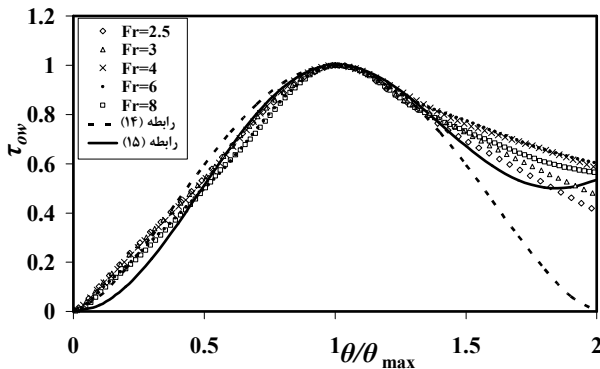
— حل عددی Roe-TVD      — دیواره تبدیل

شکل ۱۰ اندرکنش امواج تیز متقارن

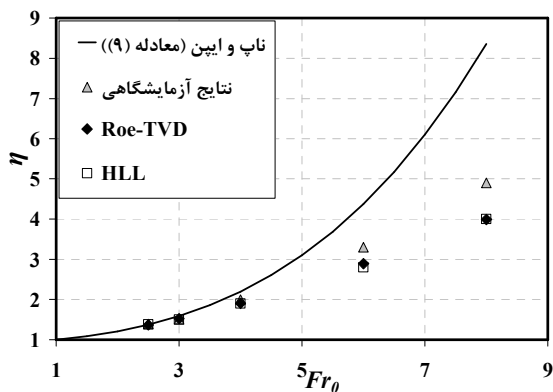
مطابق این شکل بخشی از امواج داخل تبدیل در کانال پایین دست ادامه یافته است. این مسأله ناشی از ناکافی بودن تعداد سلول‌های محاسباتی است و با افزایش تعداد

۴/۵، جواب‌های عددی و روابط تحلیلی به نتایج آزمایشگاهی بسیار نزدیک است، در حالی که با افزایش عدد فرود، فاصله جواب‌های عددی و به‌ویژه حل تحلیلی از نتایج آزمایشگاهی بیشتر می‌شود.

لازم است ذکر شود که بر اساس تجربیات عددی و مطالعات آزمایشگاهی رینر و هاگر به‌ازای  $Fr_0 > 4/5$ ، دیواره داخلی کانال خشک می‌شود (شمخالچیان و جعفرزاده، ۱۳۸۷) (Reinauer and Hager, 1997).



شکل ۱۱ مقایسه نتایج عددی و روابط تجربی رینر و هاگر در دیوار خارجی



شکل ۱۲ مقایسه نتایج عددی با روابط تحلیلی و آزمایشگاهی

مطالعات رینر و هاگر نشان داد که رابطه (۱۴) پاسخ‌های مناسبی را در محدوده  $1/25 \leq \theta/\theta_{max} < 0/75$  به‌دست می‌دهد و از آنجا که بزرگترین اعماق در این محدوده قرار دارند، از نظر مهندسی نیز مورد علاقه است (Reinauer (Beltrami et al., 2007), and Hager, 1997).

رینر و هاگر برای محاسبه سطح آب در دیواره خارجی رابطه زیر را نیز ارائه کردند:

$$\tau_{ow} = \frac{1 - j_0 \left( 3.8 \frac{\theta}{\theta_{max}} \right)}{1.4} \quad (15)$$

که در آن  $j_0$ ، تابع بسل مرتبه صفر است. بر اساس مطالعات این محققان رابطه (۱۵) در محدوده  $1/25 \leq \theta/\theta_{max} < 0/75$  جواب‌هایی نزدیک به رابطه (۱۴) دارد و در محدوده  $1/25 < \theta/\theta_{max} \leq 2$  نیز پاسخ مناسبی را به‌دست می‌دهد (Beltrami et al., 2007) and (Reinauer, Hager, 1997).

در سال ۲۰۰۵ ولیانی و کالفی کانال خمیده رینر و هاگر را با استفاده از روش حجم محدود HLL مدل سازی کردند، (Valiani and Caleffi, 2005).

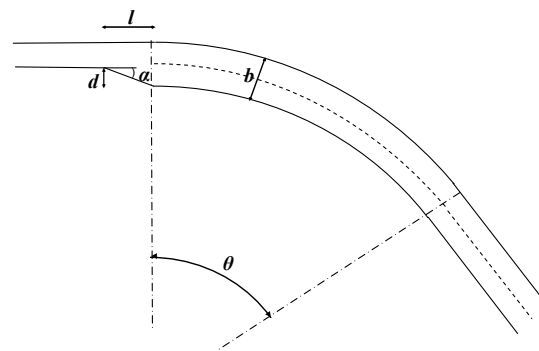
در تحقیق حاضر کانال خمیده رینر و هاگر به کمک روش حجم محدود Roe-TVD مدل‌سازی شد. در شکل ۱۲، نتایج مدل‌سازی عددی Roe-TVD با نتایج آزمایشگاهی رینر و هاگر، روش عددی HLL و ولیانی و کالفی و همچنین روابط تحلیلی ناپ-ایپن به‌ازای عدد فرود ورودی برابر ۲/۵، ۳، ۴، ۶ و ۸ مقایسه شده است.  $\eta$  نسبت عمق اولین فراز موج به عمق اولیه جریان در کانال بالادست ( $\eta = h_{max} / h_0$ ) است. عمق جریان در کانال بالادست در تمامی حالتها برابر ۵ cm است.

دید می‌شود که پاسخ روش‌های عددی HLL و Roe-TVD بریکدیگر منطبق است و در اعداد فرود کمتر از

1. Bessel Function of Zero Order

## ۹- مطالعه عددی اثر گوشه محدب بر پروفیل سطح آب در خم

با ایجاد گوشه محدب، در ورودی دیواره داخلی خم، امواج منفی تولید می‌شود (شکل ۶). این امواج با امواج مثبت دیوار خارجی ترکیب شده و ارتفاع آنها را کاهش می‌دهند. مشخصات هندسی این گوشه مطابق شکل ۱۳ است که  $b$  عرض کانال خمیده،  $d$  عرض گوشه،  $l$  طول آن و  $\alpha$  زاویه بازشدگی است و بنابراین  $\tan(\alpha) = d/l$ . در این تحقیق از کانال خمیده‌ای با مشخصات کانال رینر و هاگر با  $r_c/b = 15$  و دو کانال دیگر با  $20$  و  $10$  استفاده شد. در تمامی این خم‌ها برای سهولت مقایسه، عرض کانال خمیده برابر  $b = 0.25m$  در نظر گرفته شد و شعاع خط مرکزی کانال متناسب با  $r_c/b$  انتخاب شد. با توجه به نتایج رضایت بخش مدل عددی Roe-TVD در مقایسه با جواب‌های تحلیلی، سایر مدل‌های عددی و نتایج آزمایشگاهی، از این الگوریتم برای شبیه‌سازی در مطالعات گوشه محدب استفاده شد.



شکل ۱۳ مشخصات گوشه محدب در ورودی خم.

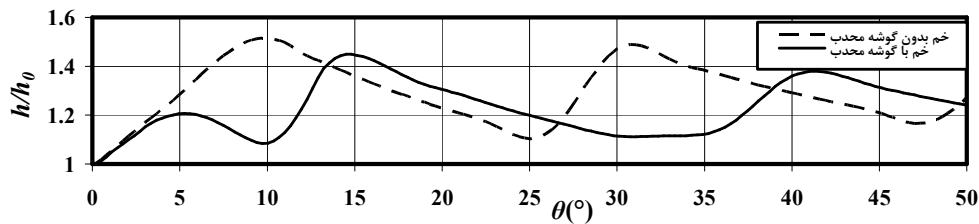
در شکل ۱۴، برای نمونه پروفیل عددی سطح آب در دیواره خارجی خم با وجود گوشه محدب و بدون آن ترسیم شده است. دیده می‌شود که وجود گوشه محدب، ارتفاع بیشینه موج را در دیواره خارجی خم کاهش داده و موج یک قله‌ای آن را به موج دو قله‌ای تبدیل کرده است.

در این شکل  $Fr_0 = 3$ ،  $\tan(\alpha) = 0.05$ ،  $r_c/b = 15$  و  $d/b = 0.12$

در شکل ۱۵-الف، پروفیل سطح آب در دیواره خارجی خم با  $r_c/b = 15$ ،  $Fr_0 = 4/5$  و  $d/b = 0.12$  برای مقادیر مختلف زاویه گوشه محدب  $\tan(\alpha)$  ترسیم شده و دیده می‌شود که با افزایش زاویه گوشه محدب، ارتفاع دو قله موج به یکدیگر نزدیک می‌شوند تا اینکه در  $\tan(\alpha) = 0.25$  حداکثر کاهش ارتفاع قله حاصل می‌شود. در شکل ۱۵-ب پروفیل دیواره خارجی برای  $Fr_0 = 4/5$ ،  $r_c/b = 15$  و  $\tan(\alpha) = 0.25$  به ازای  $d/b$  های مختلف ترسیم شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش  $d/b$  ارتفاع قله‌ها کمتر می‌شود.

مطالعات عددی نشان می‌دهد که با تغییر عرض و زاویه گوشه، موقعیت و ارتفاع موج دو قله‌ای تغییر می‌کند. در گوشه محدب با  $d/b$  مشخص، بهترین زاویه بازشدگی، زاویه‌ای است که در آن، ارتفاع دو قله با یکدیگر برابر باشند. در این صورت حداکثر کاهش در سطح آب اتفاق می‌افتد. طول بهینه نیز با توجه به زاویه بهینه گوشه محدب به دست می‌آید.

مطالعات عددی برای سه عرض بازشدگی بدون بعد برابر  $0.12$ ،  $0.08$ ،  $0.04$ ،  $d/b = 0.04$ ،  $0.08$  و  $0.12$  تانژانت زوایای بازشدگی برابر  $\tan(\alpha) = 0.05$ ،  $0.1$ ،  $0.15$ ،  $0.2$  و  $0.25$  و عدد فرود ورودی برابر  $2/5$ ،  $3$ ،  $4$  و  $4/5$  صورت گرفت و در هر  $d/b$  بر اساس اطلاعات عددی به دست آمده، زاویه بازشدگی بهینه با سعی و خطا با شرط تساوی دو قله موج تعیین شد. می‌دانیم که در هر نسبت  $r_c/b$  و به ازای هر  $d/b$  مشخص با عدد فرود ورودی مورد نظر، فقط یک زاویه بهینه وجود دارد. در نمودارهای شکل ۱۶ تانژانت زاویه بهینه به ازای  $0.12$ ،  $0.08$  و  $0.04$ ،  $d/b = 0.04$ ،  $0.08$  و  $0.12$  عدد فرود ورودی  $4/5$ ،  $3$ ،  $4$ ،  $Fr_0 = 2/5$  و  $20$  و  $15$  و  $10$   $r_c/b = 10$  ترسیم شده است.



شکل ۱۴ اثرات گوشه محدب بر پروفیل جریان در دیوار خارجی.

صورت می‌گیرد که مستقل از نسبت بدون بعد  $d/b$  است. زاویه بهینه با افزایش نسبت  $d/b$  تا حدی اضافه می‌شود. در نهایت روابط (۱۶) برای محاسبه زاویه بهینه بازشدگی منتج از نمودارها و نتایج عددی ارائه می‌شود.

$$\tan(\alpha) = \begin{cases} \left[ \frac{1}{r_c/b} + \frac{0.0479(d/b) + 0.259}{[(4.2784(d/b) + 0.7633)]} \right] & Fr_0 \leq 3 \\ \frac{1.7323(3 - Fr_0)}{r_c/b} & Fr_0 > 3 \\ -0.0451(3 - Fr_0) + 0.0479(d/b) + 0.259 & \end{cases}$$

(۱۶)

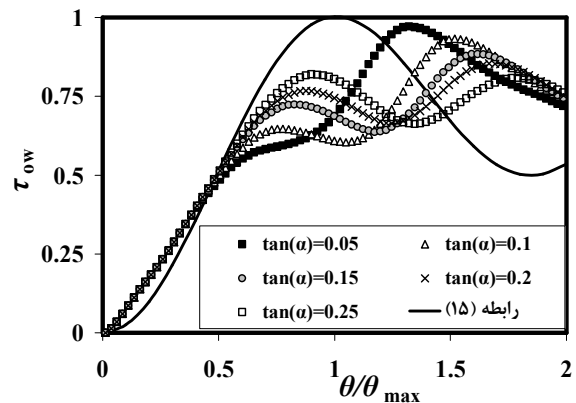
حداکثر خطای روابط (۱۶) در مقایسه با جواب‌های عددی برابر ۷/۳۴ درصد و حداقل آن برابر ۰/۱۷ درصد است.

### ۱۰- بررسی کارایی گوشه محدب

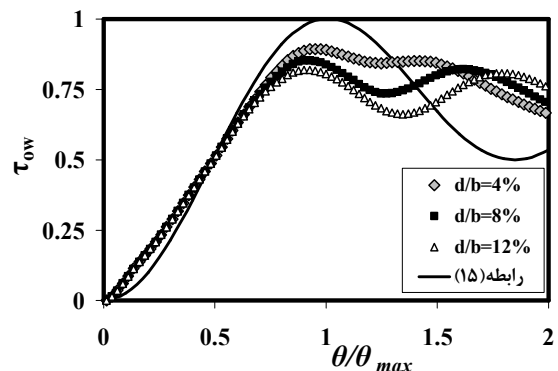
به‌منظور ارزیابی کارایی گوشه محدب در ورودی خم برای کاهش ارتفاع امواج جریان فوق بحرانی، پارامتر کاهش کل  $TR$  مشابه بلترامی و همکاران به شرح زیر تعریف می‌شود (Beltrami et al., 2007).

$$TR = \frac{h_{max} - h_{max}^*}{h_{max} - h_0} \quad (۱۷)$$

در این رابطه  $h_{max}$  ارتفاع بیشینه موج در خم بدون گوشه محدب،  $h_{max}^*$  ارتفاع بیشینه موج در خم با گوشه محدب و  $h_0$  ارتفاع آب در ورودی خم است. این پارامتر کارایی کاهش ارتفاع بیشینه موج را مشخص می‌سازد.



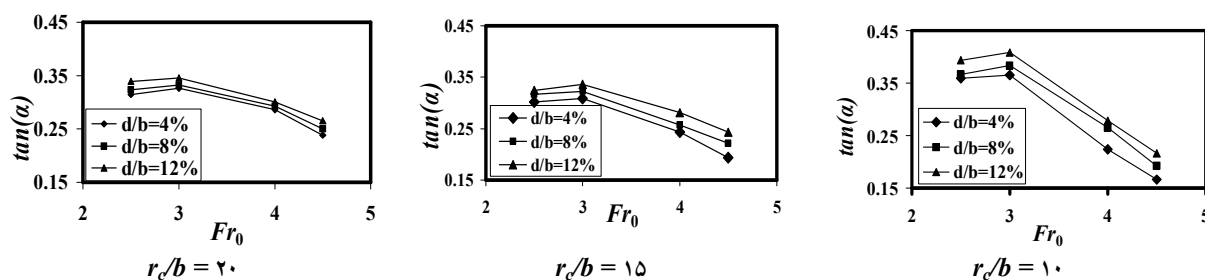
الف- به‌ازای  $\tan(\alpha)$  های مختلف در  $Fr_0 = 4/5$  و  $d/b = 0.12$



ب- به‌ازای  $d/b$  های مختلف در  $Fr_0 = 4/5$  و  $\tan(\alpha) = 0.25$

شکل ۱۵ پروفیل سطح آب دیواره خارجی

در این شکل‌ها دیده می‌شود که برای نسبت  $r_c/b$  مشخص، زاویه بهینه در  $Fr_0 < 3$  تقریباً مستقل از عدد فرود ورودی خم بوده و فقط تابع نسبت  $d/b$  است. با افزایش عدد فرود ( $Fr_0 > 3$ ), زاویه بهینه بازشدگی به تدریج کم می‌شود و این کاهش تقریباً با شیب ثابتی



شکل ۱۶ محاسبه  $\alpha$  بهینه بر اساس پارامترهای  $r_c/b$ ،  $d/b$  و  $Fr_0$

جدول ۵ ضرایب  $a'$ ،  $b'$  و  $c'$  برای محاسبه  $TR$  در خم‌های مختلف

$r_c/b$	$d/b$	$a'$	$b'$	$c'$	$R^2$
۱۰	۰/۰۴	۰/۰۳۴۷	-۰/۲۹۳۹	۰/۷۴۵۲	۰/۹۸۹۳
	۰/۰۸	۰/۰۳۵۰	-۰/۲۹۵۱	۰/۷۷۲۲	۰/۹۹۳۹
	۰/۱۲	۰/۰۳۵۳	-۰/۲۹۶۴	۰/۷۹۸۱	۰/۹۹۷۹
۱۵	۰/۰۴	۰/۰۲۲۵	-۰/۲۳۱۳	۰/۷۲۲۱	۰/۹۹۳۲
	۰/۰۸	۰/۰۲۷۲	-۰/۲۶۹۱	۰/۸۲۵۴	۰/۹۹۹۹
	۰/۱۲	۰/۰۳۸۵	-۰/۳۶۰۲	۱/۰۲۸۳	۰/۹۹۹۸
۲۰	۰/۰۴	۰/۰۳۵۵	-۰/۳۴۷۴	۰/۹۹۳۵	۰/۹۹۸۹
	۰/۰۸	۰/۰۳۶۸	-۰/۳۵۵۸	۱/۰۴۰۵	۰/۹۹۹۵
	۰/۱۲	۰/۰۴۳۷	-۰/۴۱۵۰	۱/۱۹۶۵	۰/۹۹۹۰

### ۱۱- نتیجه گیری

عملکرد گوشه محدب در ورودی خم به روش عددی  $Roe-TVD$  مطالعه شد. امواج منفی ناشی از گوشه محدب با امواج مثبت دیواره خارجی تداخل یافته و در نتیجه موج یک قله‌ای به موج دو قله‌ای تبدیل شده و از ارتفاع آن کاسته می‌شود. محاسبات عددی نشان داد که موقعیت و ارتفاع موج دو قله‌ای تابعی از نسبت شعاع خم به عرض آن ( $r_c/b$ )، عرض بازشدگی به عرض خم ( $d/b$ )، تانژانت زاویه بازشدگی ( $\tan(\alpha)$ ) و عدد فرود ورودی ( $Fr_0$ ) است. بیشترین کاهش ارتفاع هنگامی حاصل می‌شود که دو قله موج مساوی باشند، در این صورت زاویه بهینه گوشه محدب به دست می‌آید.

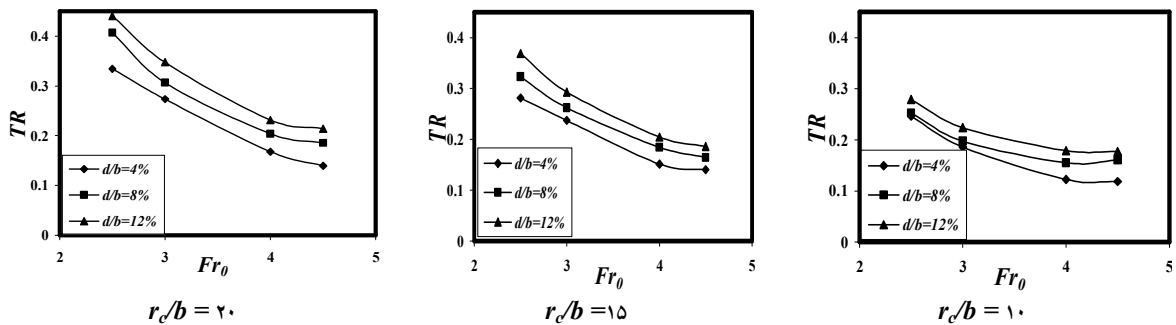
در شکل ۱۷، پارامتر  $TR$  بر حسب عدد فرود ورودی ( $Fr_0$ ) ترسیم شده است. با استفاده از این شکل میزان کاهش ارتفاع امواج در هر گوشه محدب به ازای عدد فرود مشخص و زاویه بهینه  $\alpha$  تعیین می‌شود. دیده می‌شود که برای عدد فرود کم و  $d/b$  زیاد، گوشه محدب کارایی بیشتری دارد و کارایی با افزایش  $r_c/b$  بیشتر می‌شود.

به عنوان نمونه در صورت استفاده از زاویه بهینه، ارتفاع قله موج به ازای  $d/b = 0.12$  و  $Fr_0 = 2.5$  و  $r_c/b = 20$  تا ۴۵٪ کاهش می‌یابد. به هر حال، با توجه به شکل ۱۷، در محدوده مورد مطالعه در هیچ حالتی کارایی گوشه محدب از ۱۰٪ کمتر نمی‌شود.

در هر خم مشخص (با  $r_c/b$  معلوم) با نسبت  $d/b$  ثابت، معادله‌ای سهمی شکل بر نمودارهای شکل ۱۷ برآزش داده می‌شود. در این حالت رابطه  $TR$  بر حسب عدد فرود به صورت کلی زیر به دست می‌آید:

$$TR = a' Fr_0^2 + b' Fr_0 + c' \quad (18)$$

در جدول ۵ ضرایب ثابت  $a'$ ،  $b'$  و  $c'$  همراه با ضریب آماری  $R^2$  تخمین زده شده است. با استفاده از اطلاعات این جدول، مقادیر  $TR$  مربوط به خم‌های با  $r_c/b$  و  $d/b$  متفاوت با درونیابی به دست می‌آید.



شکل ۱۷ پارامتر کاهش کل در صورت استفاده از  $\alpha$  بهینه در صفحه Fr0-TR

L	طول تبدیل
$r_c$	شعاع مرکزی خم
TR	پارامتر کاهش کل
$u$	مؤلفه سرعت متوسط‌گیری شده در عمق در راستای $x$
$U$	بردار متغیرهای بقا
$v$	مؤلفه سرعت متوسط‌گیری شده در عمق در راستای $y$
$V$	سرعت جریان
$\alpha$	زاویه گوشه محدب در ورودی خم
$\beta$	زاویه موج
$\eta$	نسبت عمق اولین فراز موج به عمق اولیه جریان
$\theta$	زاویه
$\tau_{ow}$	عمق بی‌بعد شده در دیواره خارجی خم

محاسبات عددی برای طراحی بهینه گوشه به‌ازای ( $r/b=10, 15$  و  $20$ )، ( $d/b=0.04, 0.08$  و  $0.12$ )، و ( $Fr_0 < 4/5$  و  $2/5 < Fr_0 < 4/5$ ) انجام و ملاحظه شد که زاویه بهینه با افزایش عدد فرود ورودی کاهش یافته و با افزایش نسبت  $d/b$  تا حدی اضافه می‌شود. این روند برای هر سه مقدار  $r/b$  دیده می‌شود. از سوی دیگر ارزیابی کارایی گوشه بهینه نیز مشخص کرد که کارایی گوشه محدب با افزایش عدد فرود ورودی کاهش می‌یابد و با افزایش نسبت  $d/b$  تا حدی اضافه می‌شود. به هر حال در محدوده خم‌های مورد مطالعه ارتفاع امواج بین ۱۰٪ تا ۴۵٪ کاهش می‌یابد.

## ۱۲- فهرست علائم

$a'$	ضریب ثابت
$b$	عرض کانال
$b'$	ضریب ثابت
$c'$	ضریب ثابت
$d$	عرض گوشه محدب
$F$	بردار شار در راستای محور $x$
$Fr$	عدد فرود
$g$	شتاب ثقل
$G$	بردار شار در راستای محور $y$
$h$	عمق جریان
$l$	طول گوشه محدب

## ۱۳- منابع

شمخالچیان، ع. ر.، و جعفرزاده، م. ر. (۱۳۸۷). "جریان فوق بحرانی در کانال‌های خمیده". هفتمین کنفرانس هیدرولیک، دانشگاه شهید عباسپور، تهران.

Beltrami, G. M., Repetto, R. and Del Guzzo, A. (2007). "A simple method to regularize supercritical flow profiles in bends." IAHR, Journal of Hydraulic Research, 45(6), pp.773-786.

Causon, D. M., Mingham, C. G. and Ingram, D. M. (1999). "Advances in calculation methods for

- Reinauer, R. and Hager, W. H. (1996). "Shockwave reduction by chute diffactor". Springer-Verlag (Experiments in Fluids), 21, pp. 209- 217.
- Reinauer, R. and Hager, H. (1997). "Supercritical bend flow". J. Hydraulic Eng., 123(3), pp. 208-218.
- Toro, E. (2001). Shock capturing methods for free surface shallow flows. John Wiley, New York, USA.
- Valiani, A. and Caleffi, V. (2005). "Brief analysis of shallow water equations suitability to numerically simulate supercritical flow in sharp bends". J. Hydraulic Eng., 131(10), pp. 912-916.
- Vischer, D. L. and Hager, W. H. (1994). "Reduction of shockwaves- a typology." Int. Journal of Hydropower Dams, 1, pp. 25-29.
- supercritical flow in spillway channels." ASCE, J. Hydraulic Eng., 125(10), pp. 1039-1050.
- Chow, V. T. (1986). Open channel hydraulics. McGraw-Hill, New York, USA.
- Henderson, F. M. (1966). Open channel flow. Macmillan Publishing Co., New York, USA.
- Jan, C. D., Chang, C. J., Lai, J.S. and Guo, W.D. (2009). "Characteristics of hydraulic shock waves in an inclined chute contraction – numerical simulations." Journal of Mechanics, 25(1), pp. 75-84.
- Knapp, R. T. (1951). "Design of channel curves for supercritical flow". ASCE, 116(2434), pp. 296-325.
- Leveque, R. J. (2002). Finite volume methods for hyperbolic systems. Cambridge University press, New York, USA.