

«یادداشت تحقیقاتی»

# برآورد عمق آب در لبه آبشار کانال‌های منشوری با جریان زیر بحرانی در بالادست

سید وحید نبوی<sup>۱\*</sup>، محمد کریم بیرامی<sup>۲</sup>

۱- هیأت علمی گروه عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد خمین

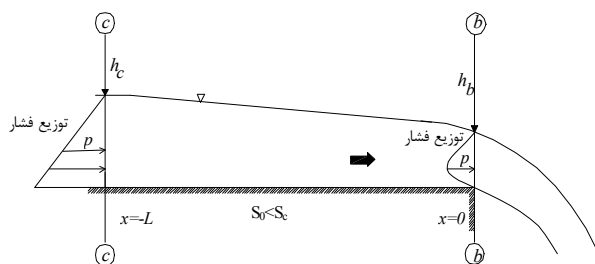
۲- دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان

\* دانشگاه آزاد اسلامی - واحد خمین، صندوق پستی ۳۸۸۱۵/۱۷۱

nabavi@cv.iut.ac.ir

**چکیده**- از عمق آب در لبه آبشار می‌توان برای اندازه‌گیری دبی جریان و بررسی فرسایش استفاده کرد. در این مقاله، بر اساس معادله انرژی، روشی ارائه شده است که با استفاده از آن، عمق جریان را در لبه آبشار و دبی جریان را برای کانال‌های منشوری با مقاطع مختلف و با جریان زیر بحرانی در بالادست می‌توان برآورد کرد. از داده‌های آزمایشگاهی و نتایج نظری دیگران برای مقایسه با نتایج روش پیشنهادی استفاده شده است. نتایج این مقایسه برای کانال‌های مستطیلی، مثلثی، سهمی، نیم دایره‌ای معکوس و مثلثی معکوس مناسب بوده و برای کانال‌های دوزنقه‌ای و دایره‌ای در حد رضایت‌بخش است.

**کلید واژگان:** کانال روباز، اندازه‌گیری دبی جریان، سقوط آزاد، عمق در لبه آبشار.



شکل ۱ تغییرات فشار در لبه و در بالادست آبشار

نیروی ثقل باعث انحنای جت آزاد می‌شود و جریان شتاب می‌یابد.

## ۱- مقدمه

چنانچه آب از سطحی بالاتر به سطحی پایین‌تر به صورت آزاد رها شود، آبشار<sup>۱</sup> به وجود می‌آید که در آن جریان متغیر و سریع<sup>۲</sup> است (شکل ۱). در لبه آبشار<sup>۳</sup>، توزیع فشار خطی نیست و در پیرامون آن برابر فشار اتمسفر است. چنانچه جریان در کانال بالادست آبشار زیر بحرانی باشد، در نزدیکی لبه آبشار، جریان به فوق بحرانی تبدیل می‌شود.

1. Drop
2. Rapidly Varied Flow
3. Brink Depth

4. Free Nape

از طرفی، تغییر فشار مثبت در کف کانال بالادست به فشار صفر به این انحنا شدت می‌دهد. در نتیجه عمق در لبه آبشار کمتر از عمق بحرانی می‌شود. در مسائل عملی، اندازه‌گیری دبی جریان با توجه به عمق آب در لبه آبشار و بررسی منحنی سطح آب در بالادست آبشار، برای ارزیابی سرعت جریان و فرسایش احتمالی کانال، اهمیت خاصی دارد.

Rouse (1936) در آزمایشی برای اولین بار سقوط آزاد را در کانال مستطیلی بررسی کرد و نسبت عمق در لبه آبشار به عمق بحرانی (EDR)<sup>1</sup> را در کانال مستطیلی برای حالتی که دیوار کانال تا پایین دست جت آزاد ادامه داشته باشد (حالت محصور<sup>2</sup>) برابر  $0.715$  بدست آورد و با استفاده از آن دبی جریان را تخمین زد. پس از او تحقیقات متعددی در این زمینه برای کانال‌هایی با مقاطع عرضی مختلف توسط سایر محققان انجام شده که فهرستی از آنها در Beirami et al. (2006) ارائه شده است.

در این مقاله روشی پیشنهاد شده است که توسط آن می‌توان عمق آب در لبه آبشار را برای هر کانال دلخواه تخمین زد و از آنجا دبی جریان را محاسبه کرد. در این روش از معادله انرژی استفاده شده و جریان در کانال بالادست آبشار زیر بحرانی در نظر گرفته می‌شود؛ همچنین از داده‌های آزمایشگاهی و نتایج نظری دیگران برای مقایسه استفاده شده است.

در این مقاله روشی پیشنهاد شده است که توسط آن می‌توان عمق آب در لبه آبشار را برای هر کانال دلخواه تخمین زد و از آنجا دبی جریان را محاسبه کرد. در این روش از معادله انرژی استفاده شده و جریان در کانال بالادست آبشار زیر بحرانی در نظر گرفته می‌شود؛ همچنین از داده‌های آزمایشگاهی و نتایج نظری دیگران برای مقایسه استفاده شده است.

## ۲- روش پیشنهادی برای محاسبه EDR و دبی جریان

برای بررسی جریان در بالادست شیب‌شکن قائم، بر طبق شکل ۱ نخست یک حجم کنترل در نظر گرفته می‌شود.

1. End Depth Ratio
2. Confined

$$h_c + \alpha_c V_c^2 / 2g = h_b + \alpha_b V_b^2 / 2g - h_b V_b^2 / rg + \Delta E - \Delta Z \quad (1)$$

که در آن  $c$  و  $b$  به ترتیب متناظر با مقطع  $c$  و  $b$ ،  $h$  عمق جریان،  $V$  سرعت متوسط جریان،  $\Delta E$  افت انرژی،  $\Delta Z$  اختلاف ارتفاع کف کانال بین مقاطع  $b$  و  $c$ ،  $r$  شعاع انحنا،  $g$  شتاب جاذبه و  $\alpha$  ضریب توزیع سرعت است که مقدار آن در مقطع با عمق بحرانی برابر با لبه آبشار در نظر گرفته شده است ( $\alpha_c = \alpha_b = \alpha$ ). با توجه به اینکه در جریان زیر بحرانی اختلاف کف کانال در فاصله کوتاه بین مقاطع  $c$  و  $b$  بسیار کم بوده و افت انرژی نیز زیاد نیست، عبارت  $(\Delta E - \Delta Z)$  در رابطه (۱) را می‌توان تقریباً برابر صفر در نظر گرفت. از طرفی با قرار دادن  $V = Q/A$  در رابطه (۱) که در آن  $A$  سطح مقطع جریان و  $Q$  دبی جریان است، رابطه (۱) به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$h_c + \alpha Q^2 / (2gA_c^2) = h_b + \alpha Q^2 / (2gA_b^2) - h_b Q^2 / (rgA_b^2) \quad (2)$$

در مقطع  $c$  با جریان بحرانی رابطه زیر حاکم است:

$$\alpha Q^2 = gA_c^3 / T_c \quad (3)$$

که در آن  $T$  عرض در سطح آزاد آب است. با قرار دادن  $Q$  از رابطه (۳) در رابطه (۲) داریم:

$$h_c + 0.5A_c / T_c = h_b + 0.5A_c^3 / (A_b^2 T_c) - h_b [A_c^3 / (\alpha A_b^2 T_c)] \quad (4)$$

برای به دست آوردن EDR و دبی جریان مربوط به هر کانال ارائه شده که در آن N برابر mh/b است.

### ۳- نتایج محاسبات و مقایسه

با توجه به معادلات به دست آمده برای محاسبه EDR و دبی جریان در کانال‌های با مقاطع مختلف، نتایج زیر حاصل می‌شود:

۱- در کانال مستطیلی، EDR به دست آمده از روش پیشنهادی برابر ۰/۷۰۷ است و همانطور که در جدول ۳ نشان داده شده با مقادیر به دست آمده توسط دیگران اختلاف ناچیزی (در حدود ۱- تا ۲+ درصد) دارد. همچنین، دبی جریان بر اساس روش پیشنهادی برابر  $1.6818g^{0.5}bh_b^{1.5}$  به دست می‌آید که بسیار نزدیک به مقادیر به دست آمده توسط دیگران بوده و خطایی در حدود ۳- تا ۲+ درصد دارد.

۲- در کانال مثلثی، EDR به دست آمده از روش پیشنهادی برابر ۰/۸ است و همانطور که در جدول ۳ نشان داده شده با مقادیر به دست آمده توسط Rajaratnam and Muralidhar (1964)، Ali and Sykes (1972) و Murty (1994) اختلاف ناچیزی در حدود ۱+ درصد و با روش Anderson (1977) اختلافی در حدود ۵ درصد دارد. همچنین، دبی جریان بر اساس روش پیشنهادی برابر  $1.2345g^{0.5}mh_b^{2.5}$  به دست می‌آید. در اینجا نیز به جز روش Anderson (1977)، مقادیر دبی جریان بسیار نزدیک به مقادیر به دست آمده توسط دیگران است و خطایی کمتر از ۲- درصد دارد.

۳- در کانال سهمی، EDR به دست آمده از روش پیشنهادی برابر ۰/۷۶۲۵ است و همان‌طور که در جدول ۳ نشان داده شده با مقادیر به دست آمده توسط Rajaratnam and Muralidhar (1964)، and Ali and Sykes (1972) و

در این تحقیق فرض شده که میزان بار (هد) حاصل از اثر عمق و انحنا در لبه آبشار، یا به بیانی دیگر  $h_b[1-A_c^3/(\alpha A_b^2 T_c r)]$  برابر  $h_b * EDR$  است. از این رو با متحد قرار دادن  $h_b/h_c$  با EDR و تقسیم دو طرف معادله (۴) بر  $h_c$  معادله زیر به دست می‌آید:

$$1 + A_c / (2T_c h_c) = (A_c / A_b)^2 (A_c / 2T_c h_c) + (h_b / h_c)^2 \quad (5)$$

با قرار دادن مشخصات هندسی هر کانال دلخواه در رابطه (۵) و حل معادله با روشهای عددی، (در اینجا با نرم افزار Excel)  $EDR = h_b / h_c$  به دست می‌آید. پارامترهای معادله (۵) برای کانال‌های با مقطع عرضی مختلف در جدول ۱ آورده شده است.

در این جدول، b عرض کف کانال دوزنقه‌ای یا عرض کانال مستطیلی، m شیب جانبی کانال مثلثی یا دوزنقه‌ای، d قطر کانال دایره‌ای بوده و  $c_1$  و  $c_2$  ضرایب ثابتی هستند که به شکل کانال بستگی دارند. در کانال مستطیلی  $c_1 = b$  و  $c_2 = 0$ ، در کانال مثلثی  $c_1 = 2m$  و  $c_2 = 1$  بوده و در کانال سهمی مقدار آنها با توجه به معادله سهمی تعیین می‌شود. در اینجا  $\hat{h}$  برابر  $h/d$  در کانال‌های دایره‌ای و  $h/z$  در کانال مثلثی معکوس است. z ارتفاع کانال بوده (شکل ۳) و  $\psi(\hat{h})$  و  $\eta(\hat{h})$  نیز به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\psi(\hat{h}) = \arcsin(2\hat{h}) + 2\hat{h}(1-4\hat{h}^2)^{0.5} \quad (6)$$

$$\eta(\hat{h}) = \arccos(1-2\hat{h}) - 2(1-2\hat{h})(\hat{h}(1-\hat{h}))^{0.5} \quad (7)$$

برای تخمین دبی جریان از رابطه (۳) استفاده می‌شود. برای این منظور با قرار دادن  $\alpha = 1$ ، مشخصات هندسی کانال دلخواه (A و T) و EDR به دست آمده در رابطه (۳)، دبی جریان به صورت تابعی از عمق در لبه آبشار ( $h_b$ ) به دست می‌آید. در عمل با اندازه‌گیری  $h_b$  می‌توان دبی جریان را تخمین زد. در جدول ۲، معادلات نهایی

با روشهای ریاضی دیگران اختلاف پیدا می‌کند. ۴- همانطور که در شکل ۲-الف نشان داده شده در کانال دوزنقه‌ای، بین نتایج آزمایشگاهی (Diskin (1961) با شیب جانبی ( $m=1/5$ ) و (Pagliara and Viti (1995) با روش پیشنهادی اختلاف ناچیزی مشاهده می‌شود، اما با نتایج آزمایشگاهی (Keller and Fong (1989) و همچنین (Diskin (1961) ( $m=2$ ) - که آزمایش‌های خود را بر روی  $N_c \geq 1/2$  انجام داده‌اند - اختلاف قابل ملاحظه است.

(Murty (1994) اختلاف ناچیزی در حدود  $\pm 2\%$  درصد دارد. همچنین، دبی جریان بر اساس روش پیشنهادی برابر  $0.936c_1g^{0.5}h_b^2$  به دست می‌آید که با کارهای دیگران در حدود ۴- تا ۲/۵+ درصد اختلاف دارد. در این مورد نیز، نتایج تحقیق حاضر با نتایج (Anderson (1977) اختلاف قابل ملاحظه‌ای پیدا می‌کند. لازم است ذکر شود که نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که روش پیشنهادی با داده‌های آزمایشگاهی دیگران تطابق بسیار خوبی دارد، اما

جدول ۱ سطح مقطع جریان (A) و عرض در سطح آزاد آب (T) برای کانالهای با مقطع عرضی مختلف

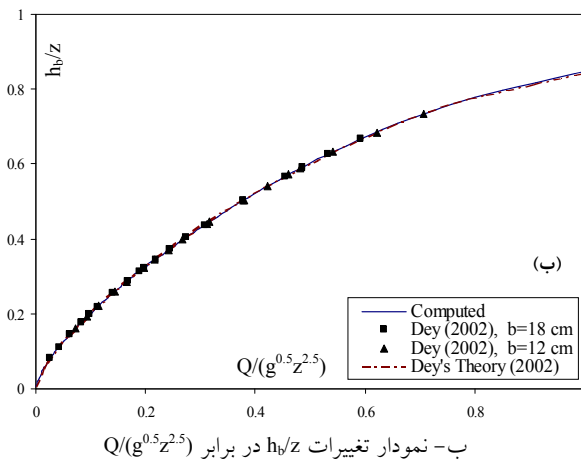
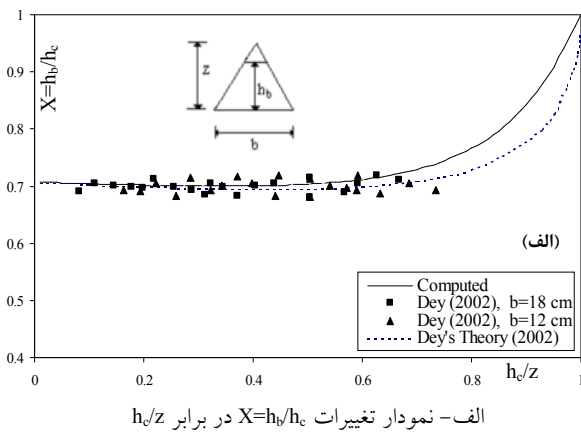
T	A	مقطع عرضی کانال
b	bh	مستطیلی
2mh	mh <sup>2</sup>	مثلثی
$c_1 h^{c_2}$	$[c_1/(1+c_2)]h^{1+c_2}$	سهمی
b+2mh	bh(1+mh/b)	دوزنقه‌ای
$2z(1-\hat{h})/3^{0.5}$	$z^2(2-\hat{h})\hat{h}/3^{0.5}$	مثلثی معکوس
$d(1-4\hat{h}^2)^{0.5}$	$0.25d^2\psi(\hat{h})$	نیم دایره‌ای معکوس
$2d[\hat{h}(1-\hat{h})]^{0.5}$	$0.25d^2\eta(\hat{h})$	دایره‌ای

جدول ۲ معادلات نهائی برای محاسبه EDR و دبی جریان در کانالهای با مقطع عرضی مختلف (X=EDR)

مقطع عرضی کانال	معادله نهایی محاسبه EDR	دبی جریان
مستطیلی	$3/2=1/(2X^2)+X^2$	$Q=1.6818g^{0.5}bh_b^{1.5}$
مثلثی	$5/4=1/(4X^4)+X^2$	$Q=1.2345g^{0.5}mh_b^{2.5}$
سهمی	$4/3=1/(3X^3)+X^2$	$Q=0.936c_1g^{0.5}h_b^2$
دوزنقه‌ای	$(3+5N_c)/(2+4N_c)=$ $(1+N_c)^3/[2(1+2N_c)(1+N_b)^2X^2]+X^2$	$Q/(g^{0.5}b^{2.5})=N_b^{1.5}(X+N_b)^{1.5}/(X^5m^3(X+2N_b))^{0.5}$
مثلثی معکوس	$1+0.25(2-\hat{h}_c)/(1-\hat{h}_c)=$ $(2-\hat{h}_c)^3/[4(1-\hat{h}_c)(2-\hat{h}_b)^2X^2]+X^2$	$Q/(g^{0.5}z^{2.5})=(\hat{h}_b^3/6)^{0.5}(2X-\hat{h}_b)^{1.5}/[X^5(X-\hat{h}_b)]^{0.5}$
نیم دایره‌ای معکوس	$1+\psi(\hat{h}_c)/[8\hat{h}_c(1-4\hat{h}_c^2)^{0.5}]=$ $\psi^3(\hat{h}_c)/[8\hat{h}_c\psi^2(\hat{h}_b)(1-4\hat{h}_c^2)^{0.5}]+X^2$	$Q/(g^{0.5}d^{2.5})=X^{0.5}\psi(\hat{h}_b/X)^{1.5}/[8(X^2-4\hat{h}_b^2)^{0.25}]$
دایره‌ای	$1+\eta(\hat{h}_c)/[16\hat{h}_c(\hat{h}_c(1-\hat{h}_c))^{0.5}]=$ $\eta^3(\hat{h}_c)/[16\hat{h}_c\eta^2(\hat{h}_b)(\hat{h}_c(1-\hat{h}_c))^{0.5}]+X^2$	$Q/(g^{0.5}d^{2.5})=X^{0.5}\eta(\hat{h}_b/X)^{1.5}/[128\hat{h}_b(X-\hat{h}_b)]^{0.5}$



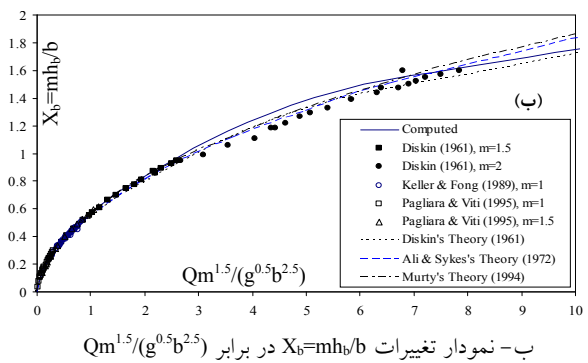
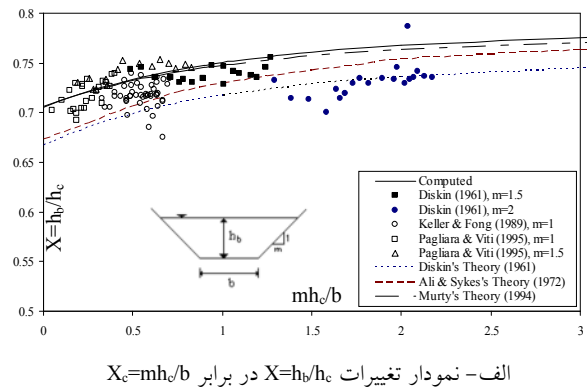
مختلف انجام شده و به‌ویژه به نتایج نظری (Dey 2003) بسیار نزدیک است. همچنین، تغییرات  $Q/(g^{0.5}d^{2.5})$  در برابر  $h_b/d$  با نتایج آزمایشگاهی و به‌ویژه با نتایج نظری (Dey 2003) مطابقت بسیار خوبی دارد. بنابراین در این کانال، با استفاده از نمودار شکل ۴-ب می‌توان دبی جریان را با خطای کمتر از  $\pm 5\%$  درصد تخمین زد.



شکل ۳ مقایسه پارامترهای کانال مثلثی

۷- در کانال دایره‌ای همانطور که در شکل ۵-الف نشان داده شده، EDR محاسباتی به ازای  $0.1 \leq h_c/d \leq 0.8$ ، به‌طور متوسط برابر ۰/۷۵ است که با نتایج آزمایشگاهی (Smith (1962) و Rajaratnam and Muralidhar (1964)

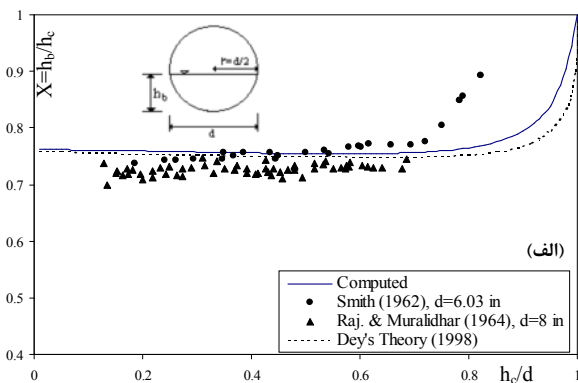
$h_c/z \leq 0.7$  بین ۰/۶۹۳ تا ۰/۷۰۵ متغیر است و به نتایج نظری و آزمایشگاهی (Dey 2002) که بر روی دو کانال مختلف صورت گرفته، بسیار نزدیک است. همچنین تغییرات  $Q/(g^{0.5}d^{2.5})$  در برابر  $h_b/z$  با نتایج آزمایشگاهی و نظری (Dey 2002) مطابقت بسیار خوبی دارد. بنابراین در این کانال با اندازه‌گیری عمق در لبه آبشار و با استفاده از نمودار شکل ۳-ب می‌توان دبی جریان را با خطای بسیار ناچیزی تخمین زد.



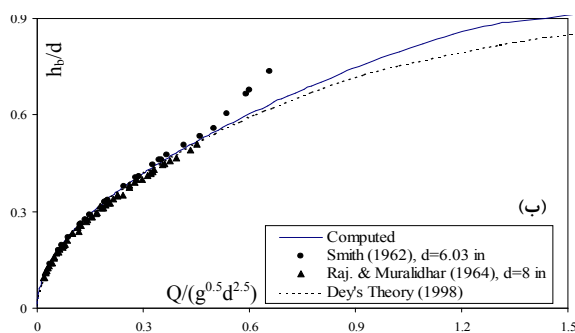
شکل ۲ مقایسه پارامترهای کانال دوزنقه‌ای

۶- در کانال نیم‌دایره‌ای معکوس همان‌طور که در شکل ۴-الف نشان داده شده، EDR پیشنهادی به ازای  $h_c/d \leq 0.35$ ، به‌طور متوسط برابر ۰/۷۰۵ است. این مقدار به نتایج آزمایشگاهی (Dey 2001) که بر روی سه کانال

در شکل ۵-ب نشان داده و همانطور که دیده می‌شود منحنی محاسبه شده به ازاء  $Q/(g^{0.5}d^{2.5}) \leq 0.5$  با نتایج آزمایشگاهی (Smith (1962) و Rajaratnam and Muralidhar (1964) مطابقت خوبی دارد. به ازای  $Q/(g^{0.5}d^{2.5}) > 0.5$ ، بین نتایج آزمایشگاهی (Smith (1962) و روش پیشنهادی مقداری اختلاف دیده می‌شود، اما نتایج روش پیشنهادی و نظریه (Dey (2003) در محدوده  $Q/(g^{0.5}d^{2.5}) \leq 0.5$  تطابق بسیار خوبی دارند. البته در محدوده  $Q/(g^{0.5}d^{2.5}) > 0.5$  اختلاف این دو نظریه در حدود ۴ درصد است.



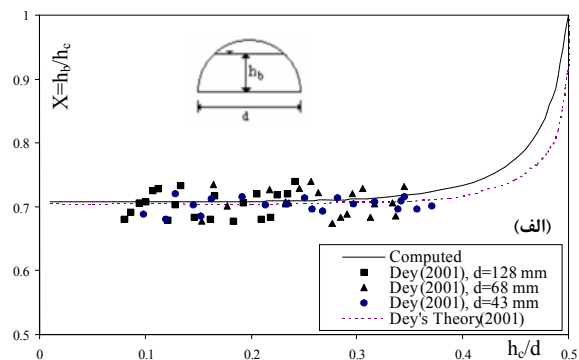
الف- نمودار تغییرات  $X=hb/hc$  در برابر  $hc/d$



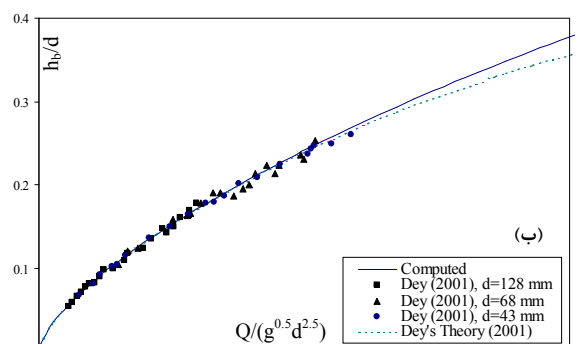
ب- نمودار تغییرات  $hb/d$  در برابر  $Q/(g^{0.5}d^{2.5})$

شکل ۵ مقایسه پارامترهای کانال دایره‌ای

که EDR متوسط را به ترتیب برابر ۰/۷۷۲ و ۰/۷۲۵ به دست آورده‌اند، اختلاف ناچیزی در حدود  $\pm 3\%$  دارد. به ازای  $hc/d \leq 0.9$ ، EDR به شدت افزایش می‌یابد و به ازای  $hc/d=1$  به عدد یک می‌رسد، اما در نتایج آزمایشگاهی (Smith (1962)، این افزایش ناگهانی EDR از  $hc/d > 0.7$  شروع می‌شود.



الف- نمودار تغییرات  $X=hb/hc$  در برابر  $hc/d$



ب- نمودار تغییرات  $hb/d$  در برابر  $Q/(g^{0.5}d^{2.5})$

شکل ۴ مقایسه پارامترهای کانال نیم‌دایره‌ای

(Dey (1998) نیز در نظریه خود EDR متوسط را برابر ۰/۷۵ به دست آورد و همان‌طور که در شکل ۵-الف دیده می‌شود، نظریه ایشان دقیقاً بر روش پیشنهادی منطبق است. در کانال دایره‌ای تغییرات  $Q/(g^{0.5}d^{2.5})$  در برابر  $hb/d$

N	mh/b
Q	دبی جریان
r	شعاع انحناء
T	عرض در سطح آزاد آب
V	سرعت متوسط جریان
X	نسبت عمق در لبه آبشار به عمق بحرانی ( $h_b/h_c$ )
$\alpha$	ضریب توزیع سرعت
$\Delta E$	افت انرژی
$\Delta Z$	اختلاف ارتفاع کف کانال بین دو مقطع
b	مربوط به جریان در لبه آبشار (زیرنویس)
c	مربوط به جریان بحرانی (زیرنویس)

#### ۶- منابع

Ahmad, Z. (2002). "Free overfall as measuring device in triangular channels", Conf. of hydr., water resources and ocean engineering, pp. 115-119.

Ali, K. H. M. and Sykes, A. (1972). "Free-vortex theory applied to free overfall", J. Hydr. Div., ASCE, 98(5), pp. 973-979.

Beirami, M.K. Nabavi, S.V. and Chamani, M.R. (2006). "Free overfall in channels with different cross sections and sub-critical flow", Iranian Journal of Science and Technology, 30 (B1), pp. 97-105.

Dey, S. (2003). "Free overfall in inverted semicircular channels", J. Hydr. Eng., ASCE, 129(6), pp. 438-447.

Dey, S. (2002). "Free overfall in circular channels with flat base: A method of open channel flow measurement", Flow Meas. Instrum., 13(5-6), pp. 209-221.

Dey, S. (2001). "EDR in circular channels", J. Irrig. Drain. Div., ASCE, 127(2), pp. 110-112.

Dey, S. (1998). "End depth in circular channels", J. Hydr. Eng., ASCE, 124(8), pp. 856-863.

#### ۴- نتیجه گیری

در این تحقیق، بر اساس معادله انرژی و با صرف نظر کردن از افت انرژی در حجم کنترل، به علت فاصله کوتاه آن و همچنین در نظر گرفتن میزان هد عمق و انحنا در لبه آبشار یعنی  $h_b[1-A_c^3/(\alpha A_b^2 T_c r)]$  برابر با  $h_b * EDR$ ، دبی جریان و نسبت عمق در لبه آبشار به عمق بحرانی در جریان زیر بحرانی برای کانال‌ها با مقطع عرضی مختلف به دست آمد. این روش، با مقایسه نتایج آن با نتایج آزمایشگاهی موجود برای کانال‌هایی با مقاطع مختلف، ارزیابی شد و نتایج نشان داد که روش پیشنهادی برای بسیاری از کانال‌های مورد مطالعه، به خصوص برای کانال‌های مستطیلی، مثلثی، سهمی، مثلثی معکوس با  $h_b/z < 0.8$ ، نیم دایره‌ای معکوس با  $h_b/d < 0.25$  و دایره‌ای کامل با  $h_b/d < 0.6$  نتایج مناسبی را ارائه می‌دهد و به طور متوسط خطائی کمتر از  $\pm 5\%$  دارد. در مورد کانال دوزنقه‌ای اختلاف بیشتری بین نتایج آزمایشگاهی و روش پیشنهادی دیده می‌شود، اما با وجود این به ازای  $mh_b/b < 1$  می‌توان دبی جریان را با دقت بالایی تخمین زد.

#### ۵- فهرست علائم

A	سطح مقطع جریان
b	عرض کف کانال دوزنقه‌ای یا عرض کانال مستطیلی
$c_1$ و $c_2$	ضریب شکل کانال سهمی
d	قطر کانال
D	عمق هیدرولیکی
g	شتاب ثقل
h	عمق مقطع جریان
$\hat{h}$	عمق بی‌بعد برابر $h/d$ در کانالهای دایره‌ای و یا $h/z$ در کانال مثلثی معکوس
z	ارتفاع کانال مثلثی معکوس
m	شیب جانبی کانال مثلثی یا دوزنقه‌ای



- Pagliara, S. and Viti, C. (1995). "Discussion on 'Discharge prediction in smooth trapezoidal free overfall' by Gupta, R.D. Jamil, M. and Mohsin, M.", J. Irrig. Drain. Div., ASCE, 121(1), pp. 128–130.
- Rajaratnam, N. and Muralidhar, D. (1964). "End depth for circular channels." J. Hydr. Div., ASCE, 90(2), pp. 99–119.
- Rajaratnam, N. and Muralidhar, D. (1964). "End depth for exponential channels", J. Irrig. Drain. Div., ASCE, 90(1), pp. 17–36.
- Rouse, H. (1936). "Discharge characteristics of the free overfall", Civil Eng., ASCE, 6(4), pp. 257–260.
- Smith, C.D. (1962). "Brink depth for a circular channel", J. Hydr. Div., ASCE, 88(6), pp. 125–134.
- Subramanya, K. (1977). Flow in open channels. Tata McGraw Hill Publishing Company, Inc., NewDelhi, India.
- Dey, S. and Ravi Kumar, B. (2002). "Hydraulics of free overfall in  $\Delta$  shaped channels", Sadhana Proceedings of Indian Academy Sciences, 27(June), pp. 353-363.
- Diskin, M.H. (1961). "The end depth at a drop in trapezoidal channels", J. Hydr. Div., ASCE, 87(4), pp. 11–32.
- Ferro, V. (1999). "Theoretical end-depth-discharge relationships for free overfall", J. Irrig. Drain. Div., ASCE, 125(1), pp. 40–44.
- Hager, W.H. (1983). "Hydraulics of the plane overfall", J. Hydr. Eng., ASCE, 109(2), pp. 1683–1697.
- Keller, R.J. and Fong, S.S. (1989). "Flow measurement with trapezoidal free overfall", J. Irrig. Drain. Div., ASCE, 115(1), pp. 125–136.
- Murty Bhallamudi, S. (1994). "End depth in trapezoidal and exponential channels", J. Hydr. Res., 32(2), pp. 219–232.