

مدل سازی جریان دانه‌ای به کمک مدل رئولوژیکی $\mu(I)$ در روش SPH

مهران خیرخواهان¹، خسرو حسینی^{2*}

1- دانشجوی دکتری آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه سمنان

2- دانشیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه سمنان

*khoseini@semnan.ac.ir

چکیده - مدل‌سازی جریان‌های دانه‌ای به علت ماهیت ذره‌ای و جدا بودن آن‌ها، یکی از مسائل مورد علاقه محققان برای شبیه‌سازی در روش‌های ذره‌ای (لاگرانژی) در دینامیک سیالات محاسباتی می‌باشد. به همین دلیل تاکنون تحقیقات گسترده‌ای برای مدل‌سازی این نوع از جریان‌ها انجام شده است. در این مطالعات ذرات پیوسته و تراکم‌ناپذیر فرض شده و رفتار آن‌ها به کمک مدل‌های ویسکوپلاستیک بررسی شده‌اند که منجر به کاربرد معادلات حرکت سیال در این جریان‌ها شده است. یکی از روش‌های پرکاربرد لاگرانژی، روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) است. در این تحقیق برای بررسی حرکت دانه‌ای از کد SPHysics استفاده شده است که در این کد برای تعیین مقادیر فشار از معادله حالت بهره گرفته می‌شود. سپس با توسعه آن و بهره‌گیری از مدل رئولوژیکی $\mu(I)$ انطباق یافته، جریان دانه‌ای به صورت دو بعدی مدل‌سازی شده است. این مدل به کمک داده‌های آزمایشگاهی و بر اساس مشخصات فیزیکی حرکت دانه‌ها، از جمله لختی و مقدار اصطکاک، به دست آمده است. در نهایت برای بررسی عملکرد کد توسعه یافته، نتایج مدل با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه گردیده است. نتایج حاکی از آن است که روش هیدرودینامیک ذرات هموار مورد استفاده در این تحقیق، توانایی مدل‌سازی مناسب سطح آزاد و تعیین ذرات بدون حرکت در بخش داخلی جریان دانه‌ای را در هر گام زمانی دارد.

کلید واژگان: SPH، مدل رئولوژیکی $\mu(I)$ ، حرکت ذرات دانه‌ای، سطح آزاد ذرات، ذرات بدون حرکت.

1- مقدمه

حائز اهمیت باشد و از طرف دیگر تلفیق این روش‌ها با معادلات اساسی جریان کارایی و گستردگی این معادلات را نشان می‌دهد. همچنین متغیرهای مورد استفاده در این روابط همچون سرعت و فشار، درک بهتری را برای محقق ایجاد خواهد کرد و هزینه‌های زیاد آزمایشگاهی را برای بررسی‌های بیشتر کاهش می‌دهد.

روش‌های عددی ابزاری کارآمد در بررسی رفتارهای انواع جریان‌ها می‌باشند. در دهه اخیر نگرش لاگرانژی به علت ویژگی‌های آن از جمله ردیابی آسان ذرات و نیز کاهش مشکلات در تغییر شکل‌های بزرگ بسیار مورد توجه

حرکت ذرات دانه‌ای یکی از مسائل مورد علاقه محققان در مدل‌سازی‌های روش‌های لاگرانژی از جمله SPH می‌باشد. اهمیت نوع حرکت و نحوه مدل‌سازی می‌تواند در شبیه‌سازی زمین لغزش‌ها، ریزش بهمن و مسائلی از این دست قابل بررسی باشد که کمک زیادی به بررسی دقیق پارامترهای موجود می‌کند و منجر به کاربرد معادلات در بررسی مسائل موجود می‌گردد. به دلیل ماهیت پیچیده حرکت توده ذرات که با تعامل با یکدیگر انتقال می‌یابند، بررسی آن‌ها با مدل‌های رفتاری تنشی میان آن‌ها می‌تواند

غیرنیوتنی به دست آمده‌اند که در صورتی که در معرض تنش برشی قرار گیرند تا قبل از رسیدن تنش برشی به آستانه معین، رفتار ماده همانند جامد بوده و پس از این آستانه، همانند سیال جاری می‌شوند. این مدل‌ها به صورت موفقیت‌آمیزی در مورد حرکت ذرات دانه‌ای نیز در روش‌های لاگرانژی مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

در زمینه استفاده از مدل‌های ویسکوپلاستیک با استفاده از نگرش لاگرانژی می‌توان به مدل‌سازی‌های جریان رسوبات تحت جریان‌های سریع همچون شکست سد و یا به زمین لغزش‌ها اشاره کرد. (Szewc (2017) به کمک روش SPH حرکت ذرات دانه‌ای را به کمک مدل رئولوژیکی کراس برای مدل‌های دوبعدی و سه‌بعدی بررسی کرد و نتایج کار خود را با داده‌های آزمایشگاهی و خروجی‌های DEM و FEM مقایسه کرد. وی برای سرعت بخشیدن به زمان اجرا از کد موازی استفاده کرد که در آن از سرعت پردازشی کارت گرافیک GPU بهره گرفته می‌شود. (Fu and Jin (2016) مدل لاگرانژی MPS جدیدی را برای مدل‌سازی سیستم دوفازی آب-رسوب برای شکست سد ارائه دادند. آن‌ها برای مدل‌سازی فاز رسوب از مدل رئولوژیکی هرشل-بالکی استفاده نمودند. Fourtakas and Rogres (2016) به کمک مدل‌سازی جریان دوفازی آب-رسوب با مدل موازی تراکم‌پذیر کم SPHysics، اثر GPU را در سرعت اجرای برنامه بررسی کردند. آن‌ها برای اعمال رفتار رسوبات از مدل رئولوژیکی هرشل-بالکی - پاپاناستاسیو استفاده کردند. (Khanpour et al. (2016) برای بررسی و مدل‌سازی آبشستگی و فلاشینگ رسوبات به وسیله جریان سریع آب از روش SPH با تراکم‌پذیری کم استفاده کردند. آن‌ها در این تحقیق به کمک مدل ویسکوپلاستیک بینگهام رسوبات را مدل‌سازی کردند. (Ghadampour et al. (2013) به کمک روش دینامیک ذرات هموار تراکم‌ناپذیر (ISPH) به مدل‌سازی مخلوط آب-رسوب در دو نمونه شکست سد و جریان زیر دریچه پرداختند. آن‌ها برای مدل کردن رسوب از مدل رئولوژیکی هرشل-بالکی استفاده کردند. (Razavitoosi et al. (2013) مدل دوبعدی SPH را برای شکست سد با بستر متحرک استفاده کردند. هر دو فاز رسوب و آب به صورت سیال با تراکم‌پذیری کم با معادله حالت در نظر گرفته شدند.

محققان قرار گرفته است. این روش‌ها بر خلاف روش‌های اولری که نیازمند شبکه در دامنه حل می‌باشند، معادلات حاکم بر جریان را برای هر ذره حل نموده و حرکت هر ذره را در تعامل با دیگر ذرات ردیابی می‌کنند. لذا این روش‌ها نیازی به شبکه ندارند و اصطلاحاً به روش‌های بدون شبکه معروف هستند.

یکی از این روش‌های لاگرانژی بدون شبکه که به صورت گسترده‌ای مورد استفاده قرار گرفته و قادر به تحلیل مسائلی همچون بررسی حرکت مخلوط آب-رسوب چسبنده (جریان غلیظ)، حرکت ذرات دانه‌ای و ماسه‌ای، بررسی مدل‌های چندفازی ذرات غیرچسبنده به همراه آب و هوا و موارد دیگر می‌باشد، مدل SPH است. این روش ابتدا توسط Lucy (1977) در اختریف یک به منظور مطالعه برخورد کهکشان‌ها مورد استفاده قرار گرفت و بعدها توسط Monaghan (1994) گسترش یافته و در مسائل حرکت سیال با سطح آزاد مورد استفاده قرار گرفت. در این مقاله از کد SPHysics استفاده شده که در چند دانشگاه معتبر توسعه یافته است (Gomez-Gesteira et al., 2012). این کد به زبان فورتن و به صورت متن باز در اختیار سایر محققان قرار دارد و توانایی مدل‌سازی جریان برای سیالات نیوتنی را دارا می‌باشد. در مطالعه حاضر با توسعه ساختار کد موجود، از آن برای مدل‌سازی جریان دانه‌ای استفاده شده است.

به صورت کلی می‌توان حرکت ذرات دانه‌ای را به سه دسته کلی تقسیم نمود: 1- جریان شبه ایستا یا پلاستیک، 2- جریان شبه ویسکوز یا مایع (جریان غلیظ) و 3- جریان‌های گازی که در آن‌ها ذرات دارای سرعت‌های بسیار زیادی می‌باشند (Xu and Jin, 2016).

بسیاری از جریان‌های دانه‌ای همانند حرکت رسوبات غیرچسبنده و یا ذرات شیشه و موادی از این قبیل در دسته‌بندی دوم قرار می‌گیرند که اصطلاحاً دارای رفتار ویسکوپلاستیک می‌باشند. مدل‌سازی جریان‌های دانه‌ای به کمک مدل‌های ویسکوپلاستیک همچون بینگهام، هرشل بالکی، کراس و دیگر مواردی از این قبیل که شروع ذرات در آن‌ها به کمک یک آستانه حرکت در تنش برشی مشخص می‌شود تاکنون مورد استفاده بسیاری از محققان قرار گرفته است. این مدل‌ها برای بررسی سیالاتی

در آن ایجاد کردند. Xu and Jin (2016) با استفاده از روش لاگرانژی MPS و مدل رئولوژیکی به کار گرفته شده توسط Chauchat and Médale (2014)، شکست سد دانه‌ای دو بعدی را برای دو حالت حذف یک دیواره و نیز حذف هر دو دیواره مدل‌سازی کردند که نتایج کار آن‌ها بیانگر دقت مناسب این روش بود.

هدف این مقاله توسعه کد SPH و اعمال مدل ویسکوپلاستیک $\mu(I)$ برای مدل‌سازی جریان دانه‌ای است. برای این منظور با فرض این‌که ذرات دانه‌ای دارای پیوستگی لازم هستند و همچنین تراکم پذیری آن‌ها قابل چشم‌پوشی است از معادلات حرکت سیال برای بررسی مکانیک انتقال حرکت آن‌ها استفاده شده است. در نهایت برای بررسی دقت عملکرد مدل، نتایج با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شده‌اند.

2- معادلات حاکم

معادلات حاکم در جریان‌ها، پیوستگی و اندازه حرکت می‌باشند که در شکل لاگرانژی به صورت رابطه‌های (1) و (2) ارائه شده‌اند (Khanpour et al., 2016).

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot u) = 0 \quad (1)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla P + \nabla \tau + F \quad (2)$$

در روابط بالا u سرعت، ρ چگالی، P فشار، τ تنشور تنش، F دیگر نیروهای مؤثر در حرکت سیال و t زمان هستند.

3- روش SPH

در این مطالعه فرض شده است که حرکت ذرات دانه‌ای به صورت پیوسته و تراکم ناپذیر می‌باشند، هرچند این فرض، فرض دقیقی نبوده و می‌تواند تأثیرگذار در نتایج عددی باشد. لازم به ذکر است دیگر محققان نیز با چنین فرضیاتی اقدام به مدل‌سازی نموده‌اند و با استفاده از معادلات جریان حرکت این ذرات را مورد بررسی قرار داده‌اند.

روش SPH از درون‌یابی انتگرالی تابع f بر دامنه Ω حاصل می‌شود. که موجب تخمین تابع f بر اساس مقادیر موجود در اطراف دامنه آن می‌گردد. مقدار تابع f با استفاده از تابع پیچشی (کانولوشن) به صورت رابطه (3) قابل بیان است.

آن‌ها در مدل خود از ترکیب لزجت مصنوعی و همچنین مدل بینگهام با مدل کراس و نیز مدل بینگهام با لزجت مصنوعی برای فاز رسوب استفاده کردند. مقصودی و شفیع‌فر (1394) از روش لاگرانژی SPH با تراکم‌پذیری کم برای تحلیل شکست سد با بستر فرسایش‌پذیر استفاده کردند. آن‌ها برای مدل‌سازی به اصلاح کد SPHysics پرداختند و هر دو فاز را با یک سری از معادلات به کار بردند و در آن برای فاز رسوب از مدل رئولوژیکی بینگهام بهره جستند. فرزین و همکاران (1393) با استفاده از روش ISPH به مدل‌سازی دوفازی شکست سد پرداختند. آن‌ها در این مطالعه فاز رسوب را به صورت مدل بینگهام مدل‌سازی نمودند. (Shakibaeinia and Jin (2011) با استفاده از ایده سیال غیرنیوتنی، شکست سد دوفازی را با MPS مدل‌سازی نمودند. برای مدل‌سازی سیال غیرنیوتنی یا همان رسوبات از مدل‌های رئولوژیکی مختلفی، از جمله مدل پلاستیک بینگهام، مدل هرشل - بالکی و مدل ویسکو پلاستیک تعمیم یافته استفاده کردند.

در این تحقیق برای بررسی حرکت ذرات از مدل رئولوژیکی $\mu(I)$ استفاده شده است که توسعه روابط آن در آزمایشگاه توسط Da Cruze et al. (2005) بر اساس ویژگی‌های حرکتی دانه‌ها از جمله ضریب اصطکاک ایستایی و لختی ذرات و نیز ارتباط میان این دو پارامتر صورت گرفته است.

مدل‌های رئولوژیکی پیشین از جمله بینگهام و هرشل-بالکی بر اساس رفتار حرکت سیالات بوده است و در این معادلات ویژگی‌های رفتاری سیال از جمله لزجت وجود دارد که این مقدار با سعی و خطا برای مصالح دانه‌ای مورد نظر به دست آمده و در مدل‌سازی‌ها به کار برده شده است. ولی مدل مورد استفاده در این تحقیق بر اساس ویژگی‌های ذرات به دست آمده و نیازی به تعیین مقادیر مشخصه سیال برای ذرات ندارد. این مدل نحوه مدل کردن دقیق ذرات را مورد بررسی قرار می‌دهد که در دیگر روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی از جمله روش اجزا محدود و MPS مورد استفاده قرار گرفته است.

(Chauchat and Médale (2014) با استفاده از روش اجزاء محدود و مدل $\mu(I)$ جریان دانه‌ای سه بعدی را شبیه‌سازی کردند. آن‌ها برای استفاده از مدل رئولوژیکی تغییراتی را

از رابطه (9) ثابت B برابر با $c_0^2 \rho_0 / \gamma$ به دست می‌آید که حدی برای بیشینه تغییرات چگالی تعیین می‌کند. c_0 سرعت صوت در چگالی مرجع است. انتخاب مقدار B اهمیت فوق‌العاده‌ای دارد. چنانچه B برحسب مقدار واقعی سرعت صوت در آب در نظر گرفته شود، در مدل‌سازی عددی به‌ناچار مجبور به استفاده از گام‌های زمانی کوتاه خواهیم بود. طبق یافته (Monaghan (1994) برای سیالات می‌توان سرعت صوت را به‌صورت مصنوعی به مقدار قابل توجهی کاهش داد، به‌گونه‌ای که تأثیری در حرکت سیال نداشته باشد. ضمن این‌که حداقل این سرعت باید 10 برابر حداکثر سرعت قابل انتظار جریان باشد تا تغییرات زیادی در چگالی مشاهده نشود (کمتر از 1 درصد).

3-1- شرایط مرزی

در این مطالعه از ذرات مرزی دینامیکی استفاده شده است. این نوع از ذرات مرزی مانند ذرات سیال در معادلات پیوستگی و حالت دخالت داده می‌شوند، اما تفاوتی که دارند این است که موقعیت آن‌ها مانند مرزهای کف ثابت مانده و یا تغییر موقعیت به آن‌ها تحمیل می‌گردد. یکی از مزیت‌های این روش سادگی آن است، چون ذرات مرزی می‌توانند در همان حلقه‌ای که برای ذرات سیال نوشته می‌شود، حل شده و در نتیجه هزینه محاسباتی پایین بیاید. این نوع مرز ابتدا توسط (Dalrymple (2006 معرفی و در مطالعات مختلف در مسائل مدل‌سازی موج و سازه‌های ساحلی به کار گرفته شد.

4- جریان دانه‌ای

همان‌طور که در بخش‌های قبل اشاره شد، در این تحقیق از مدل رئولوژیکی $\mu(I)$ استفاده گردیده است. این مدل بر اساس رابطه اصطکاک میان تنش نرمال و تنش برشی به صورت رابطه (10) عمل می‌کند (Xu and Jin, 2016).

$$\tau = \mu p \quad (10)$$

در این رابطه μ ضریب اصطکاک، τ تنش برشی و p تنش عمودی می‌باشند. مقدار μ بر اساس تحقیقات Da Cruze et al. (2005) واپسته به لختی (I) است. مقدار لختی توسط رابطه (11) به دست می‌آید (Xu and Jin, 2016).

$$I = \frac{|\dot{\gamma}|D}{\sqrt{p/\rho_s}} \quad (11)$$

(Liu and Liu, 2010 و Khanpour et al., 2016)

$$f(x) \approx \langle f(x) \rangle = \int_{\Omega} f(x') W(x-x', h) dx' \quad (3)$$

با گسسته‌سازی به صورت تقریب ذره‌ای رابطه (3) به رابطه (4) تبدیل می‌گردد (Khanpour et al., 2016 و Liu and Liu, 2010).

$$f(x_i) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W(x_i - x_j, h) = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f(x_j) W_{ij} \quad (4)$$

در این رابطه W_{ij} تابع کرنل و h طول هموار هستند. m_j و ρ_j به ترتیب جرم و چگالی ذره در نقطه j می‌باشند.

در نهایت، شکل کلی معادلات جریان در روش SPH به وسیله تقریب‌های کرنل و ذره به صورت رابطه‌های (5) و (6) در خواهد آمد (Gomez-Gesteira et al., 2012).

$$\frac{D\rho_i}{Dt} = \sum_j m_j v_{ij} \nabla_i W_{ij} \quad (5)$$

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{F}{\rho_i} - \sum_j m_j \left(\frac{P_i}{\rho_i^2} + \frac{P_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} + \sum_j m_j \left(\frac{\tau_i}{\rho_i^2} + \frac{\tau_j}{\rho_j^2} \right) \nabla_i W_{ij} \quad (6)$$

در این رابطه P فشار ذره و v اختلاف سرعت دو ذره i و j است و تعریف بقیه پارامترها در رابطه‌های قبلی آمده است. در این مطالعه از روش دینامیک ذرات هموار با تراکم پذیری کم استفاده شده است که در آن مقدار فشار به وسیله معادله حالت و بر اساس تابعی از چگالی و به صورت صریح به دست می‌آید (Monaghan, 1994).

$$P_i = B \left(\left(\frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (7)$$

در رابطه (7)، P_i مقدار فشار ذره i و γ ثابتی است که در اغلب تحلیل‌ها برابر 7 در نظر گرفته می‌شود و ρ_0 چگالی مرجع و ρ_i چگالی ذره i است (Khanpour et al., 2016 و Xu and Jin, 2016 و Shakibaenia and Jin, 2011).

برای تعیین B ، مشتق رابطه فوق برحسب چگالی (مربع سرعت صوت) همانند رابطه (8) محاسبه می‌شود (Monaghan, 1994).

$$c^2(\rho) = \frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{B\gamma}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\gamma-1} = \frac{B\gamma}{\rho_0^\gamma} \rho^{\gamma-1} \quad (8)$$

با جایگذاری ρ_0 در رابطه (8)، رابطه (9) به دست می‌آید.

$$c_0^2 = c^2(\rho_0) = \frac{\partial P}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = \frac{B\gamma}{\rho_0} \quad (9)$$

برشی رابطه (15) به دست می‌آید (Xu and Jin, 2016).

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{\mu(I)p}{|\dot{\gamma}|} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} = \eta \dot{\gamma}_{\alpha\beta}, \quad \eta = \frac{\mu(I)p}{|\dot{\gamma}|} \quad (15)$$

این رابطه بر اساس داده‌های آزمایشگاهی زیادی توسعه یافته است و به کمک روش‌های مختلفی در مدل‌های عددی به کار گرفته شده است. یکی از این روش‌ها توسط Chauchat and Médale (2014) در مدل اجزاء محدود می‌باشد که به صورت رابطه (16) به کار گرفته شده است (Xu and Jin, 2016).

$$\eta_r = \left(\mu_s + \frac{(\mu_2 - \mu_s)|\dot{\gamma}|}{I_o \sqrt{\phi p + |\dot{\gamma}|}} \right) \frac{p}{(|\dot{\gamma}|^2 + \alpha_r^2)^{1/2}} \quad (16)$$

در این رابطه ϕ کسر حجمی و عددی بی‌بعد می‌باشد و برای مطالعات جریان دانه‌ای مقداری میان 0/6 تا 0/65 دارد. α_r مقداری کوچک است که در صورت صفر شدن نرخ کرنش موجب واگرایی مدل نگردد.

در این تحقیق، از رابطه (16) برای مدل‌سازی حرکت دانه‌ها در روش SPH استفاده شده است. مقدار ϕ برابر با 0/62 و α_r برابر با 0/000001 در نظر گرفته شده‌اند. همان‌طور که از سمت راست معادله (16) مشخص می‌شود، برای شروع حرکت ذرات نیاز است تا مقدار تنش برشی بزرگ‌تر از $\mu_s p$ گردد.

لازم به ذکر است که در این مدل‌سازی از زبری بستر و اثر آن بر ذرات صرف‌نظر شده است.

5- الگوریتم حل

روش پیشروی زمانی در این مطالعه به صورت پیش‌بینی-تصحیح می‌باشد. این طرح توسط موناگان (1994) به کار گرفته شد و وی نشان داد که هر دو مومنتم خطی و زاویه‌ای با استفاده از این طرح اجرا می‌شود. در این روش، طرح مرتبه دوم در زمان به منظور محاسبه پارامترها در گام زمان بعدی به کار گرفته می‌شود. ابتدا ترم‌های مورد نظر در زمان $n + \frac{1}{2}$ محاسبه می‌شود (Monaghan, 1994 و Gomez-Gesteira et al., 2012).

$$\begin{cases} \rho_i^{n+\frac{1}{2}} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{2} G_i^n \\ V_i^{n+\frac{1}{2}} = V_i^n + \frac{\Delta t}{2} F_i^n \\ r_i^{n+\frac{1}{2}} = r_i^n + \frac{\Delta t}{2} H_i^n \end{cases} \quad (17)$$

در این رابطه $G = \frac{d\rho_i}{dt}$ ، $F = \frac{dv_i}{dt}$ و $H = \frac{dr_i}{dt}$ به ترتیب

در این رابطه $|\dot{\gamma}|$ نرخ برش، D قطر ذره، p تنش عمودی (فشار) و ρ_s چگالی ذره می‌باشند.

ضریب اصطکاک μ از رابطه (12) قابل محاسبه می‌باشد که توسط Jop et al. (2005) ارائه گردیده است.

$$\mu = \mu_s + \frac{\mu_2 - \mu_s}{1 + I_o/I} \quad (12)$$

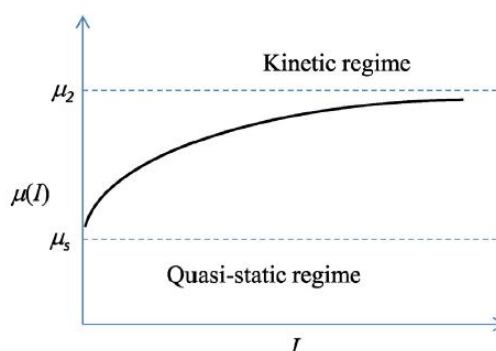
μ_s ، μ_2 و I_o پارامترهای وابسته به نوع ماده می‌باشند که در آزمایشگاه به دست می‌آیند. در مدل $\mu(I)$ همان‌طور که در شکل 1 قابل مشاهده است، مقدار μ_s همان ضریب اصطکاک ایستایی برای شروع حرکت ذرات است که مقدار I در آن برابر با صفر است. مقدار μ در جایی که نمودار آن با خطی افقی مماس شود، برابر با μ_2 خواهد شد. در این نمودار حرکت ذرات میان دو مقدار μ_s و μ_2 به صورت ویسکوپلاستیک می‌باشد که موضوع بحث این مقاله است و از روابط موجود در این محدوده نیز برای مدل کردن حرکت ذرات استفاده می‌شود. برای مقادیر کمتر از μ_s مواد به صورت شبه ایستا می‌باشند و برای مقادیر بیشتر از μ_2 مواد به صورت ذرات گازی شکل حرکت می‌کنند (Xu and Jin, 2016).

تنسور نرخ کرنش به صورت رابطه (13) تعریف می‌شود (Xu and Jin, 2016).

$$\dot{\gamma}_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} \quad (13)$$

اندازه این تنسور را می‌توان به وسیله رابطه (14) به دست آورد (Xu and Jin, 2016).

$$|\dot{\gamma}| = \sqrt{\frac{1}{2} \dot{\gamma}_{\alpha\beta} \dot{\gamma}_{\alpha\beta}} \quad (14)$$



شکل 1 انواع حالت‌های جریان بر اساس میزان اصطکاک و لختی (Xu and Jin, 2016)

با استفاده از روابط (10)، (13) و (14) میان فشار و تنش

$$\mu_a = \max\left(\frac{h V_{ab} r_{ab}}{r_{ab}^2}\right) \quad (22)$$

گام زمانی نهایی به صورت رابطه (23) نوشته می‌شود (Monaghan and Gomez-Gesteira et al., 2012) و Kos, 1999.

$$\delta t = c_r \min(\delta t_{forces}, \delta t_{cv}) \quad (23)$$

که c_r عدد کورانت است.

6- نتایج و بحث

برای صحت‌سنجی مدل از داده‌های آزمایشگاهی Lajeunesse et al. (2006) استفاده شده است که در آن شکست سد دانه‌ای با ذرات گوی شیشه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. مشخصات ذرات مورد استفاده در آزمایشگاه عبارتند از: $D = 1.15\text{mm}$, $\rho_o = 2500\text{kg/m}^3$, $I_o = 0.279$, $\mu_s = \tan 20.90$ و $\mu_2 = \tan 32.76$ (Xu and Jin, 2016).

برای بررسی آزمایشگاهی روند شکست و ریزش توده دانه‌ای از پارامترهای $a = h_o/l_o$ و $t^* = \sqrt{g/h_o}$ استفاده شده است که به ترتیب نسبت ارتفاع اولیه به عرض اولیه مصالح دانه‌ای و زمان می‌باشند. پارامتر a به عنوان پارامتر مؤثر در حرکت دانه‌ای ذرات بیان شده است. یعنی نتایج حاصل از مقادیر مختلف h_o و l_o با مقدار a ثابت، یکسان می‌باشند. همان‌طور که انتظار می‌رود با افزایش مقدار a میزان حرکت ذرات در راستای سرعت غالب (سرعت در جهت x) و نیز جابجایی تعداد ذرات بیشتر و کوچک شدگی ناحیه ایستا بیشتر می‌شود. برای مدل‌سازی از مقادیر $a = 3.2$ با طول اولیه $0/053$ متر، $a = 2.4$ با طول اولیه $0/056$ متر و $a = 0.46$ با طول اولیه $0/108$ متر استفاده شده است. برای بررسی اثر تعداد ذرات در مدل با $a = 3.2$ از فواصل $0/004$ متر، $0/002$ متر و $0/001$ متر در هر دو راستا استفاده گردید که به ترتیب منجر به 1564 ، 5447 و 19900 تعداد ذره شد. در ادامه برای مدل‌سازی مقادیر $a = 2.4$ و $a = 0.46$ به ترتیب از فواصل $0/004$ متر و $0/003$ متر در دو جهت عمود بر هم x و z استفاده شد که در نهایت تعداد ذرات در این مدل‌سازی‌ها به ترتیب برابر با 1403 و 1814 گردید. رایانه مورد استفاده برای مدل‌سازی دارای مشخصات Windows 10/CPU Intel core i7 6800K/RAM 16GB می‌باشد.

معادله‌های پیوستگی، اندازه حرکت و مکان ذره هستند که به صورت خلاصه در اینجا نشان داده شده است. در این مرحله مقدار فشار $P_i^{n+\frac{1}{2}}$ با استفاده از معادله حالت بر حسب $\rho_i^{n+\frac{1}{2}}$ محاسبه می‌شود. این مقادیر با استفاده از نیروها در نیم‌گام زمانی تصحیح می‌شوند (Monaghan, 1994 و Gomez-Gesteira et al., 2012).

$$\begin{cases} \rho_i^{n+\frac{1}{2}} = \rho_i^n + \frac{\Delta t}{2} G_i^{n+\frac{1}{2}} \\ V_i^{n+\frac{1}{2}} = V_i^n + \frac{\Delta t}{2} F_i^{n+\frac{1}{2}} \\ r_i^{n+\frac{1}{2}} = r_i^n + \frac{\Delta t}{2} H_i^{n+\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (18)$$

و در نهایت مقادیر این پارامترها در پایان گام زمانی به صورت رابطه (19) محاسبه می‌شوند (Monaghan, 1994 و Gomez-Gesteira et al., 2012).

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} = 2\rho_i^{n+\frac{1}{2}} - \rho_i^n \\ V_i^{n+1} = 2V_i^{n+\frac{1}{2}} - V_i^n \\ r_i^{n+1} = 2r_i^{n+\frac{1}{2}} - r_i^n \end{cases} \quad (19)$$

و فشار در گام زمانی $n+1$ توسط چگالی مربوطه در این گام یعنی ρ^{n+1} محاسبه می‌شود.

5-1- گام زمانی متغیر

کنترل گام زمانی به ترم‌های نیرویی، شرط کورانت-فردریچ-لوی (CFL) و ترم پخش لزج بستگی دارد. شرط ترم‌های نیروی داخلی و خارجی به این دلیل اعمال می‌شود که از در هم فرورفتن ذرات همسایه در طی حرکت، زمانی که نیروهای داخلی و خارجی را تجربه می‌کنند، جلوگیری شود (Gomez-Gesteira et al., 2012) و (Monaghan and Kos, 1999).

$$\delta t_{forces} = \min\left(\sqrt{\frac{h}{|f_i|}}\right) \quad (20)$$

که f_i به نیروهای داخلی و خارجی وارد بر ذره i بر واحد جرم اشاره دارد. ترکیب شرایط لزج و CFL روابط زیر را می‌دهد (Monaghan and Gomez-Gesteira et al., 2012) and Kos, 1999.

$$\delta t_{cv} = \min\left(\frac{h}{c_s + \mu_a}\right) \quad (21)$$

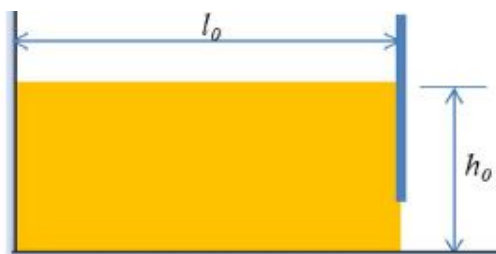
که در آن μ_a از رابطه (22) به دست می‌آید (Gomez-Gesteira et al., 2012 و Monaghan and Kos, 1999).

به چشم نمی‌خورد و با افزایش تعداد ذرات تنها هزینه زمان محاسبات (تا حدود 65 برابر) بالا خواهد رفت.

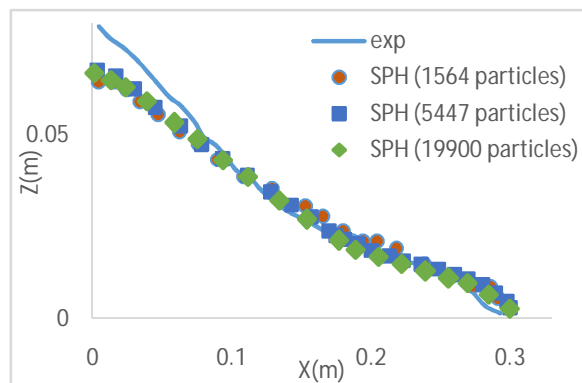
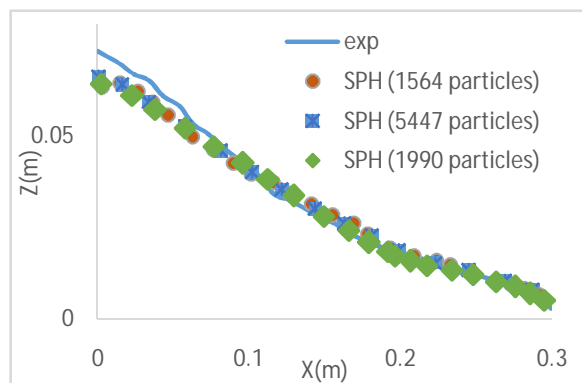
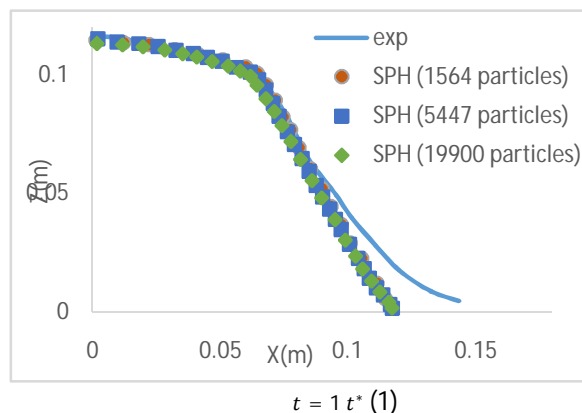
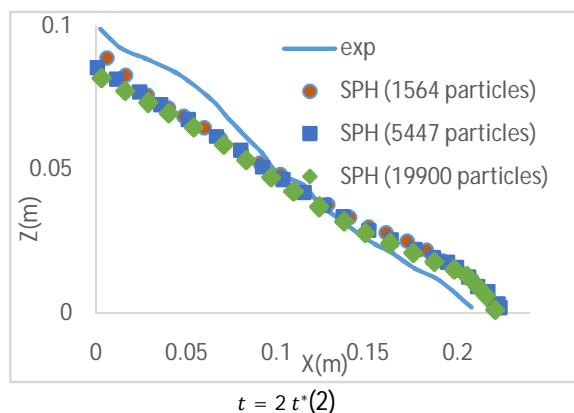
برای بررسی نحوه عملکرد مدل از معیار RSM استفاده شده است. خطای RSM به صورت رابطه (24) تعریف می‌شود (Shakibaenia and Jin, 2011).

$$RSM = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta H)_i^2}{\sum_{i=1}^N (H)_i^2} \quad (24)$$

در رابطه (24)، ΔH اختلاف میان سطح آزاد آزمایشگاهی و سطح آزاد مدل می‌باشد و H ارتفاع توده ذرات در مدل آزمایشگاهی است. میزان خطا برای گام‌های مختلف زمانی در جدول 1 نشان داده شده است.



شکل 2 موقعیت اولیه ذرات و ابعاد مخزن سد به صورت دو بعدی



(4) موقعیت نهایی ذرات

(3) از $t = 3t^*$

شکل 3 موقعیت سطح بالای ذرات در گام‌های زمانی مختلف و مقایسه آن‌ها با داده‌های آزمایشگاهی برای $a = 3.2$

مدل شماتیک که شامل یک مخزن مستطیل شکل با بستر افقی می‌باشد، در شکل 2 نشان داده شده است.

ستون مواد دانه‌ای با استفاده از یک دریچه که به صورت عمودی جابجا می‌شود، جدا شده است. این دریچه باعث ایجاد یک مخزن می‌شود که اجازه انتشار ناگهانی جریان دانه‌ای را فراهم می‌کند. دریچه به صورت ناگهانی برداشته شده و منجر به آزاد شدن حجم مواد دانه‌ای می‌گردد.

در شکل 3 مقادیر خروجی سطح آزاد مدل عددی در زمان‌های مختلف و تعداد ذرات متفاوت با داده‌های آزمایشگاهی برای $a = 3.2$ مقایسه شده‌اند. همان‌طور که مشاهده می‌شود نتایج حاکی از دقت مناسب خروجی‌های حاصل از روش SPH می‌باشد.

در این شکل خروجی‌های سطح آزاد مدل برای تعداد ذرات 1564، 5447 و 19900 ذره نشان داده شده‌اند که مدت زمان اجرای آن‌ها به ترتیب برابر با 1054، 8694 و 69126 ثانیه می‌باشند. همان‌طور که مشخص است در این شکل تفاوت چندانی میان سطح آزاد بر اساس تعداد ذرات موجود

مدل عددی می‌باشد. در این شکل، محدوده توده در حرکت و بخش ساکن توده توسط منحنی شکست از یکدیگر جدا شده‌اند. همانگونه که در شکل‌ها مشخص است، الگوی کلی جریان شامل بردارهای سرعت و امتداد آن‌ها، محدوده منحنی شکست و سطح آزاد جریان در مدل عددی همانند مدل آزمایشگاهی می‌باشد که نشان دهنده توانایی مدل رئولوژیکی و همچنین مدل عددی استفاده شده در مدل‌سازی پدیده می‌باشد.

در شکل 5 روند تغییرات سرعت و فشار و نیز توسعه و پیشروی توده در مدل عددی نشان داده شده است. همانطوری که در شکل مشاهده می‌شود، حرکت ذرات در ابتدا از پایین‌ترین نقطه و چسبیده به دریچه که دارای بالاترین سرعت می‌باشد، شروع شده و پس از آن ذرات بالایی با لغزیدن بر ذرات پایینی به سمت پایین حرکت کرده و جریان شکل می‌گیرد.

در تمامی گام‌های زمانی ذرات واقع بر سطح توده دارای بیشترین سرعت بوده و تعدادی از ذرات بدون حرکت باقی می‌مانند که محل قرارگیری آن‌ها در ناحیه داخلی و بین کف و دیواره ثابت انتهایی ذرات می‌باشد که با فیزیک مسئله کاملاً همخوانی دارد، چرا که این ذرات تحت بیشترین فشار در هر گام زمانی قرار دارند و در نتیجه طبق رابطه (10) قادر به تحمل تنش‌های برشی بیشتر می‌باشند. شکل 5-ه، موقعیت کلیه ذرات در انتهای گام زمانی و رسیدن به حالت ساکن را نشان می‌دهد.

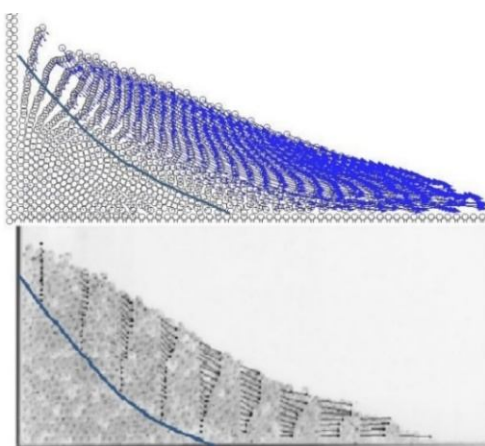
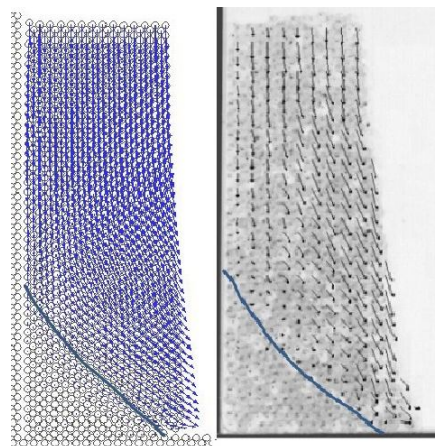
جدول 1 مقادیر خطا برای گام‌های زمانی مختلف

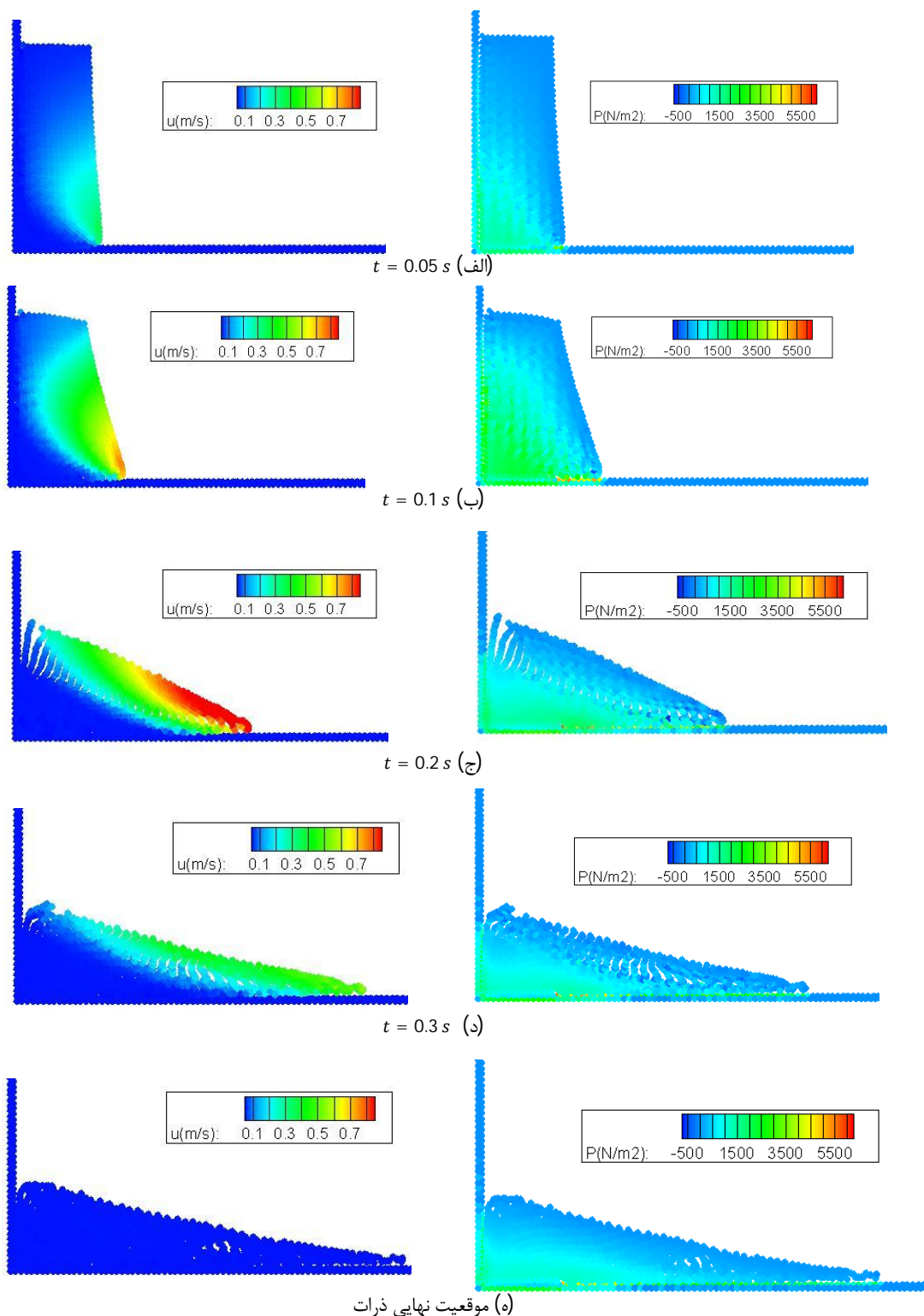
زمان	$1 t^*$	$2 t^*$	$3 t^*$	نهایی
RSM (1564 particles)	0/066	0/143	0/121	0/057
RSM (5447 particles)	0/064	0/144	0/118	0/056
RSM (19900 particles)	0/064	0/146	0/116	0/056

همان‌طور که در این جدول مشخص است درصد خطا میان داده‌های آزمایشگاهی و مدل عددی برای مدل‌سازی با ذرات مختلف قابل قبول است و همچنین مشاهده می‌شود که تعداد ذرات انتخاب شده تأثیر زیادی در خروجی نتایج ندارند.

همچنین این مدل توانایی مدل‌سازی صحیح نحوه حرکت ذرات را داراست. زیرا همان‌طور که در شکل 4-الف مشاهده می‌شود، ذراتی که دارای بیشترین فشار از طرف سربار هستند، دارای بیشترین مقاومت برشی هستند که توسط دیگر ذرات و در ناحیه میان دیواره انتهایی و کف (مرزهای بدون لغزش) و ذرات بالای آن محصور شده‌اند و هیچ حرکتی را در طول مدل‌سازی نخواهند داشت که این موضوع با واقعیت پدیده تطابق کامل دارد. شکست ذرات و شروع حرکت آن‌ها در قسمت پایینی سمت راست توده رخ خواهد داد که در این محل ذرات دارای بیشترین سرعت خود هستند.

در شکل 4 وضعیت حرکت توده ذرات در زمان‌های 0/04 و 0/229 ثانیه نشان داده شده‌اند. تصویر سیاه و سفید مربوط به مدل آزمایشگاهی و تصویر آبی رنگ مربوط به

شکل (ب) $t = 0.229s$ شکل (الف) $t = 0.04s$ شکل 4 الگوی سرعت، موقعیت و مرز شکست ذرات برای $\alpha = 3.2$



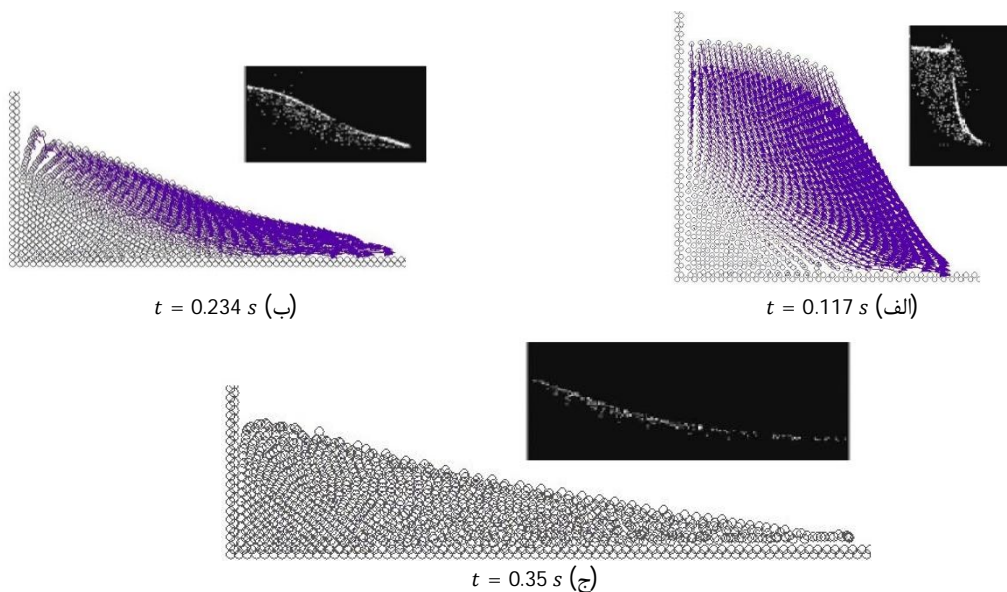
شکل 5 موقعیت ذرات، فشار و سرعت آن‌ها برای $a = 3.2$ و گام‌های زمانی مختلف

همان‌طور که مشاهده می‌شود، مدل عددی توانسته است شرایط واقعی را به خوبی پیش‌بینی نماید. بخشی از توده که در حرکت است در نمونه آزمایشگاهی با رنگ روشن‌تر

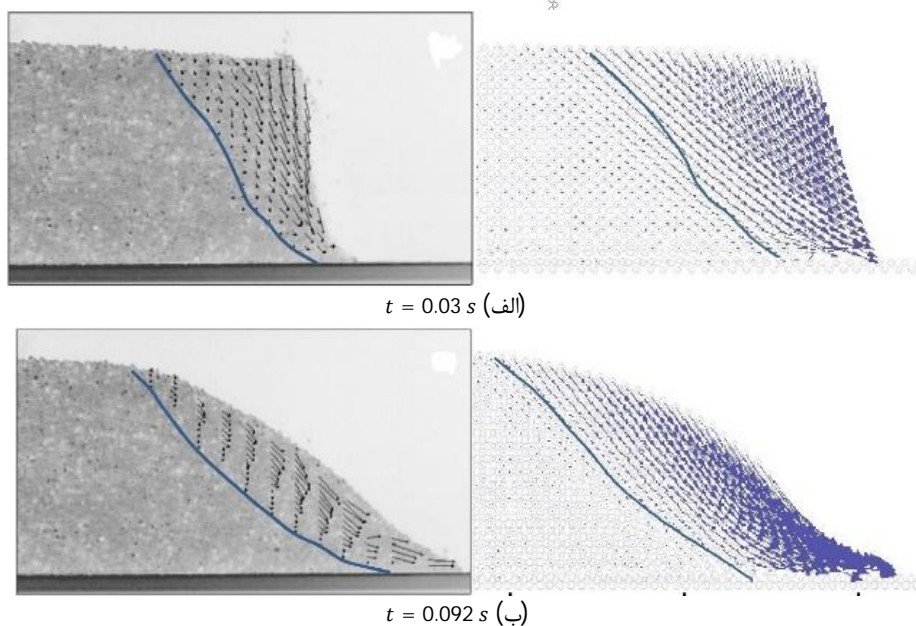
در شکل 6 نتایج شکل‌گیری سطح آزاد توده رسوبی و الگوی سرعت برای $a = 2.4$ در زمان‌های مختلف در نمونه آزمایشگاهی و مدل عددی نشان داده شده است.

در شکل 7 نتایج حاصل از سرعت میان ذرات آزمایشگاهی و مدل و نیز مرز شکست میان آن‌ها برای $a = 0.46$ نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌گردد، در این وضعیت نیز روش عددی توانسته است شرایط واقعی را به خوبی مدل‌سازی نماید که نشان از توانمندی مدل رئولوژیکی و روش عددی به کارگرفته شده در مدل‌سازی را دارد. نتایج مدل‌سازی عددی برای $a = 0.46$ در شکل 8 نشان داده شده است.

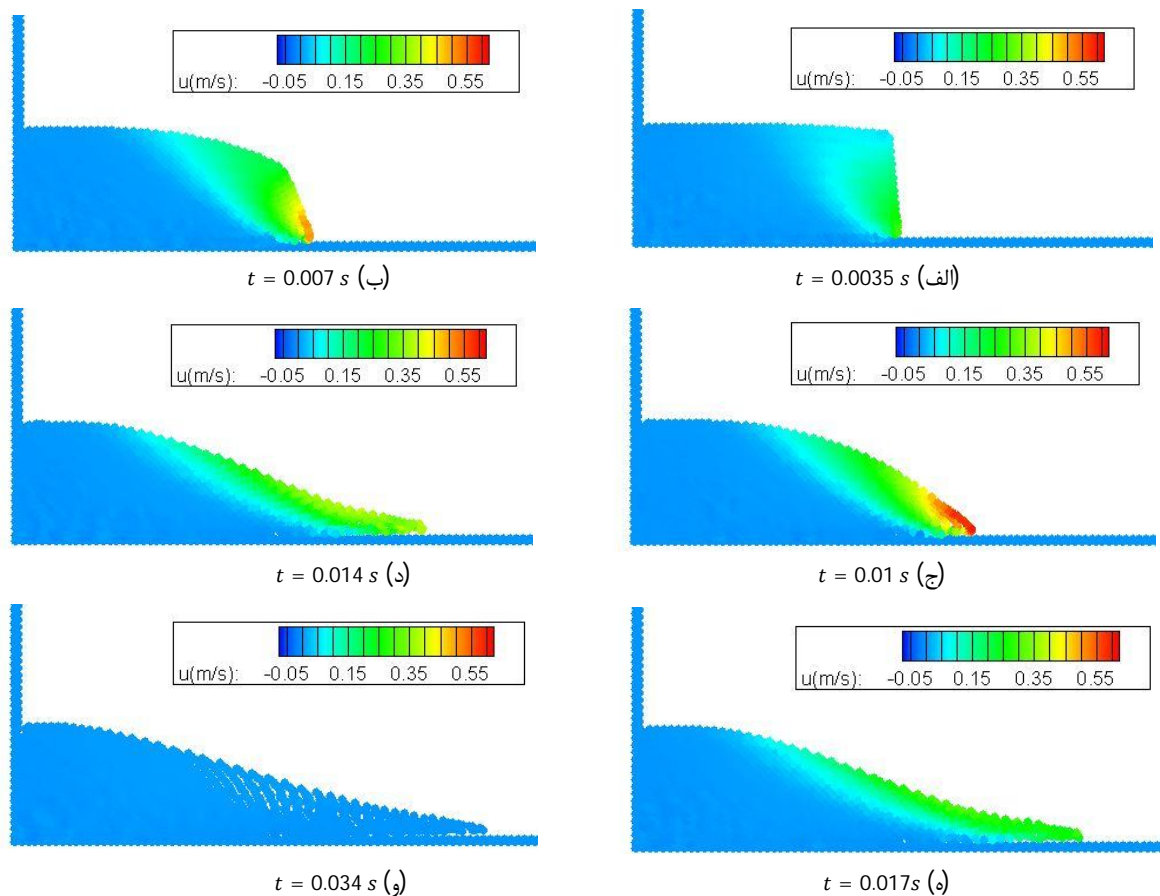
و بخش ساکن توده در آن با رنگ مشکی نشان داده شده است. در مدل عددی، بخش در حرکت که در آن جهت بردار سرعت نیز نشان داده شده است با رنگ بنفش و بخش ساکن به صورت دایره‌های طوسی رنگ نمایش داده شده‌اند. ضمناً ساختار داخلی ذرات در هر دو مدل آزمایشگاهی و عددی که بدون حرکت باقی می‌ماند، نسبت به حالتی که $a = 3.2$ است، بزرگ‌تر می‌باشد و طول حرکت نیز به نسبت آن کمتر شده است.



شکل 6 موقعیت ذرات و سرعت آن‌ها برای $a = 2.4$ و گام‌های زمانی مختلف



شکل 7 موقعیت ذرات و مرز شکست آن‌ها برای $a = 0.46$



شکل 8 موقعیت ذرات و سرعت آن‌ها برای $a = 0.46$ و گام‌های زمانی مختلف

مدل‌ها برای سیالات غیرنیوتنی توسعه یافته‌اند و معمولاً دارای ضرایبی هستند که برای استفاده از آن‌ها در حرکت ذرات دانه‌ای نیاز به سعی و خطا می‌باشد تا با کمک این ضرایب، معادلات رفتار مشابه با واقعیت را از خود نشان دهند.

در این پژوهش از کد SPHysics استفاده شد که این مدل برای سیالات نیوتنی با تراکم‌پذیری کم توسعه یافته است. برای استفاده از این کد در این تحقیق، پس از توسعه آن و اعمال مدل رئولوژیکی مورد نظر، عملکرد آن توسط مدل آزمایشگاهی شکست سد دانه‌ای مورد بررسی قرار گرفت. سه نوع مختلف شکست سد با نسبت‌های ارتفاع به عرض متفاوت مدل‌سازی گردید و نتایج آن‌ها با نتایج مدل آزمایشگاهی مقایسه شد. این نتایج حاکی از آن است که روش SPH و مدل رئولوژیکی $\mu(I)$ توانایی قابل توجهی در مدل‌سازی حرکت ذرات دارند. حرکت ذرات در این

در این حالت بزرگ‌ترین گوه ذرات بدون حرکت نسبت به دو حالت قبل رخ می‌دهد و همان‌طور که انتظار می‌رود به علت کم بودن ارتفاع توده، مقدار حرکت ذرات از دو حالت قبلی کمتر می‌باشد.

9- نتیجه‌گیری

در این مقاله جریان دانه‌ای به وسیله روش هیدرودینامیک ذرات هموار مدل گردید. برای این که بتوان از معادلات حرکت سیال یعنی پیوستگی و اندازه حرکت استفاده کرد، فرض شده است که ذرات به صورت پیوسته عمل کرده و تراکم ناپذیر می‌باشند. برای بررسی رفتار ذرات از مدل رئولوژیکی $\mu(I)$ بهره گرفته شد. این مدل برخلاف دیگر مدل‌های ویسکوپلاستیک پیشین همچون بینگهام و هرشل بالکی، بر اساس مشخصات مصالح دانه‌ای همچون اصطکاک و اینرسی توسعه یافته است، در صورتی که دیگر

μ_s	ضریب اصطکاک ایستایی
ρ_o	چگالی مرجع
ρ_s	چگالی ذرات دانه‌ای
ρ	چگالی
τ	تنش برشی
ϕ	کسر حجمی

مدل‌سازی به نحو مناسبی با حرکت فیزیکی ذرات در واقعیت تطابق دارد، به طوری که برای حرکت مصالح، ذرات در بالاترین تراز به سمت پایین لغزش پیدا می‌کنند و همچنین نکته جالب دیگری که در این مدل به چشم می‌خورد عدم حرکت برخی از ذرات در ناحیه داخلی آن‌ها است که این ذرات ایستا به شکل گوه‌ای میان کف و دیواره بدون حرکت قرار می‌گیرند. در هر گام زمانی دسته‌ای از این ذرات در این ناحیه بدون حرکت باقی می‌مانند که بازهم این موضوع با تحلیل‌های مکانیک خاک تطابق کامل دارد. در نهایت می‌توان این‌طور نتیجه‌گیری کرد که روش SPH و مدل $\mu(I)$ قابلیت بالایی در مدل‌سازی جریان دانه‌ای با توجه به خصوصیات مصالح را دارا می‌باشند و می‌توانند طیف وسیعی از مسائل مهندسی خاک و هیدرولیک را در برگیرند.

11- منابع

فرزین، س؛ حسن زاده، ی؛ اعلمی، م. ت. و فاتحی، ر. (1393). "توسعه دو روش SPH تراکم ناپذیر به منظور شبیه‌سازی جریان‌های سطح آزاد حاوی رسوب"، مجله مهندسی مکانیک مدرس، 14(12): 91-103.

مقصودی، م. ص. و شفیع‌فر، م. (1394). "مدل‌سازی شکست سد با بستر فرسایش‌پذیر با استفاده از روش SPH"، نشریه هیدرولیک ایران، 3(10): 41-52.

Chauchat, J. and Médale, M. (2014). "A three-dimensional numerical model for dense granular flows based on the $\mu(I)$ rheology". J. Comput. Phys. 256, pp. 696–712.

Da Cruz, F. Emam, S. Prochnow, M. Roux, J. and Chevoir, F. (2005). "Rheophysics of dense granular materials: discrete simulation of plane shear flows", Phys. Rev. E 72 (2) 021309.

Dalrymple, R.A. and Rogers, B.D. (2006). "Numerical modeling of water waves with the SPH method", Coastal Eng. 53(2-3), pp. 141-147.

Fourtakas, G. and Rogres, B. D. (2016). "Modelling multi-phase liquid-sediment scour and resuspension induced by rapid flows using Smoothed Particle Dynamics (SPH) accelerated with a Graphic Processing Unit (GPU)". Adv. Water Resour. 92, pp. 186-199.

Fu, L. and Jin, Y.C. (2016). "Improved multiphase Lagrangian method for simulating sediment transport in Dam-Break flows". ASCE, J. Hydraul. Eng. 142(10): 04016005.

Ghadampour, Z. Talebbeydokhti, N. Hashemi, M.R. Nikseresht, A. H. and Neill, S. P. (2013). "Numerical simulation of free surface mudflow using incompressible SPH". IJST, Trans. Civil Eng. Vol. 37, No. C1, 99, pp. 77-95.

Gomez-Gesteira, M. Crespo, A.J.C. Rogers, B.D. Dalrymple, R.A. Dominguez, J.M. and Barreiro, A. (2012). "Sphysics-development of a free-surface fluid solver-part 1: Theory and formulations".

10- فهرست علائم

B	ثابت معادله حالت
c_s	سرعت صوت
D	قطر ذره
f	نیرو
h	طول هموار
h_o	ارتفاع اولیه ذرات
I	اینرسی
I_o	مقدار اینرسی در ضرب اصطکاک صفر
l_o	عرض اولیه ذرات
m	جرم ذره
P	فشار
r	فاصله مکان ذرات از مبدا
t	زمان
W_{ij}	تابع کرنل
μ_2	ضریب اصطکاک در مماس افقی نمودار $\mu - I$
α_r	ضریب تصحیح
γ	ثابت معادله حالت
$ \dot{\gamma} $	اندازه تنسور کرنش
$\dot{\gamma}_{\alpha\beta}$	تنسور کرنش
u	سرعت
η	ضریب تنسور کرنش
μ	ضریب اصطکاک

- flows with SPH". *J. Comput. Phys.*, 110, pp. 399-406.
- Monaghan, J.J. Kos, A. (1999). "Solitary waves on Cretan beach", *J. Waterway Port Coast Ocean Eng.* 125:145-154.
- Razavitoosi, S.L. Ayyoubzadeh, S.A. and Valizadeh, A. (2014). "Two-phase SPH modelling of waves caused by dam break over a movable bed", *Int. J., Sediment Research.* 29(3), pp. 344-356.
- Szewc, K. (2017). "Smoothed particle hydrodynamics modeling of granular column collapse". *Granular Matter*, 19(1), 3, pp. 1-13.
- Shakibaeinia, A. and Jin, Y.C. (2011b). "A mesh-free particle model for simulation of mobile-bed dam break". *Advanced Water Resources*, Vol. 34, pp. 794-807.
- Xu, T. and Jin, Y.C. (2016). "Modeling free-surface flows of granular flow collapses using a mesh-free method". *J. Powder Technology.* 298, pp. 20-34.
- Computers and Geosciences, V. 48, pp. 289-299.
- Jop, P. Forterre, Y. and Pouliquen, O. (2005). "Crucial role of sidewalls in granular surface flows: consequences for the rheology". *J. Fluid Mech.* 541, pp. 167-192.
- Khanpour, M. Zarrati, A.R. Kolahdoozan, M. Shakibaeinia, A. and Amirshahi, S.M. (2016). "Mesh-free SPH modeling of sediment scouring and flushing". *J. Computer and Fluids.* 129, pp. 67-78.
- Lajeunesse, E. Monnier, J. and Homsy, G. (2005). "Granular slumping on a horizontal surface". *Phys. Fluids*, 17(10), pp. 1-15.
- Liu, M.B., Liu, G.R. (2010). "Smoothed particle hydrodynamics (SPH): an overview and recent developments". *Arch Comput Methods Eng.* 17:25-76.
- Lucy, L.B. (1977). "A numerical approach to testing the fission hypothesis", *The Astron. J.*, 82(12), pp.1013-1024.
- Monaghan, J.J. (1994). "Simulating free surface