

مدل سازی جریان آبخوان دشت نیشابور به دو روش بدون شبکه المان تحلیلی و هم آبی نقطه‌ای

آرمان محمدی¹، مهناز قائینی حصاروئی^{2*}

1- دانش‌آموخته کارشناسی ارشد مهندسی عمران - آب، دانشکده مهندسی عمران و نقشه برداری، دانشگاه تحصیلات تکمیلی صنعتی و

فناوری پیشرفته، کرمان

2- استادیار بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان، کرمان

* mghaeini@uk.ac.ir

چکیده - در این تحقیق به کمک روش المان تحلیلی به بیان یک راهکار مؤثر برای مدل‌سازی دو بعدی جریان آب زیرزمینی یک منطقه با مقیاس وسیع در حالت دائمی پرداخته شده است. روش المان تحلیلی با استفاده از حل معادلات لاپلاس و معرفی توابع خطی، تأثیر ویژگی‌های هیدرولوژیکی را به طور مستقیم در مدل اعمال می‌کند. در الگوریتم ارائه شده، قبل از ترکیب المان‌ها، دبی پتانسیل ویژگی‌های هیدرولوژیکی به دست آمده و با استفاده از اصل برهم‌نهی با هم جمع شده و سپس به دبی پتانسیل کل آبخوان اضافه خواهد شد. برای مقایسه نتایج مدل المان تحلیلی، مدل‌سازی به روش هم‌آبی نقطه‌ای که از روش‌های بدون شبکه بر پایه روش المان محدود است، نیز انجام گرفته است. در این روش یک سری نقاط برای پوشش دامنه در نظر گرفته شده و برای حل معادلات حاکم از توابع شکل استفاده می‌شود. ارزیابی الگوریتم ارائه شده توسط داده‌های میدانی دشت نیشابور انجام شده است. واسنجی مدل‌ها توسط توسعه الگوریتم اجتماع ذرات انجام گرفته است و پیاده‌سازی مدل‌ها نیز توسط زبان برنامه نویسی شی‌گرا پایتون صورت گرفته است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد در روش المان تحلیلی، عدم نیاز به درونیابی و استفاده از اصل برهم‌نهی توابع خطی باعث کم شدن پیچیدگی و افزایش دقت مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در مقیاس بزرگ شده است.

کلیدواژگان: روش المان تحلیلی، روش هم‌آبی نقطه‌ای، جریان آب زیرزمینی، دبی پتانسیل، دشت نیشابور

1- مقدمه

سرعت در گره‌ها یا وجه‌ها کمک می‌کنند، اما با این وجود پارامترها به صورت کامل نمی‌توانند خود را از شبکه مجزا کنند (Pokrajac and Lazic, 2002).

روش المان تحلیلی، یک روش عددی برای مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی است. این روش بر پایه اصول نظریه پتانسیل استوار بوده و مستقل از شبکه‌بندی می‌باشد. این روش یک برداشت ایده‌آل از مفهوم برهم‌نهی توابع خطی است، به این ترتیب که به جای برهم‌نهی چند تابع خطی، یک پردازنده صدها و یا هزاران تابع خطی را با هم جمع می‌کند (Craig, 2004). این ویژگی‌ها باعث شده روش

یکی از راه‌های رسیدن به شناخت جریان‌های زیرزمینی، استفاده از مدل‌های عددی وابسته به شبکه از جمله روش‌های المان محدود و تفاضل محدود برای حل معادلات حاکم بر جریان آب زیرزمینی است. این روش‌ها معمولاً معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی در محیط اشباع را به وسیله گسسته‌سازی مسئله حل می‌کنند. به علت وجود این راه‌حل‌های گسسته، روش‌های درونیابی بسیاری برای محاسبه سرعت جریان، توسعه یافته‌اند. این روش‌ها تا حدودی به پیوستگی و رفتار یکنواخت مقادیر

دست آوردند. اگرچه انجام روش‌های شناخته موجود، مانند المان محدود و تفاضل محدود توانایی مدل‌سازی را به خوبی دارا هستند، اما در مناطق با وسعت زیاد و وجود ویژگی‌های هیدرولوژیکی متفاوت و متعدد، برای بالا بردن دقت نتایج بایستی شبکه‌های ریزتر برای اعمال جزئیات بیشتر استفاده شود. این تغییرات منجر به نیاز به افزایش قدرت پردازنده‌ها و همچنین طولانی‌تر شدن زمان انجام محاسبات می‌شود که خود هزینه مدل‌سازی را افزایش می‌دهد (Craig and Rabideau, 2006).

در مطالعه حاضر با استفاده از روش بدون شبکه المان تحلیلی و هم‌آیی نقطه‌ای و ارائه یک الگوریتم مؤثر، علاوه بر کاهش هزینه‌های محاسباتی ناشی از شبکه بندی مدل، ویژگی‌های هیدرولوژیکی (رودخانه) را با بیشترین دقت و به ساده ترین حالت وارد مدل نموده، به طوری که در نهایت دقت محاسبات کاهش نیابد. در این مطالعه برای ارزیابی مدل توسعه یافته بر مبنای الگوریتم ارائه شده، از داده‌های دشت نیشابور استفاده گردید. در ادامه منطقه مورد مطالعه معرفی می‌شود، سپس به معرفی روش‌ها و نحوه انجام مدل‌سازی پرداخته می‌شود. در نهایت نتایج حاصل از مدل المان تحلیلی و هم‌آیی نقطه‌ای با داده‌های میدانی مورد مقایسه و تحلیل قرار خواهند گرفت.

2- معرفی منطقه مورد مطالعه

دشت نیشابور جزئی از حوضه آبریز کالشور نیشابور می‌باشد که در دامنه جنوبی ارتفاعات بینالود و در شمال شرق کویر مرکزی ایران واقع شده است. این حوضه در طول جغرافیایی $58^{\circ} 13'$ تا $59^{\circ} 30'$ و عرض جغرافیایی $35^{\circ} 40'$ تا $36^{\circ} 39'$ واقع شده و از شمال به خط‌الرأس ارتفاعات بینالود، از شرق به بلندی‌های لیلاجوق و یال پلنگ، از جنوب به تپه ماهورهای نیزه بند، سیاه کوه و کوه نمک و از غرب به حوضه آبریز دشت سبزوار محدود می‌شود (خاشعی سیوکی و همکاران، 1392). وسعت کل حوضه 7350 کیلومتر مربع است که 3160 کیلومتر مربع آن را ارتفاعات و بقیه آن یعنی 4190 کیلومتر مربع را دشت تشکیل می‌دهد. شکل 1 موقعیت منطقه مورد مطالعه را نشان می‌دهد.

المان تحلیلی بدون توجه به وسعت منطقه، جواب‌های دقیقی برای مناطق با مقیاس بزرگ تولید نماید (Strack et al., 1987; Bakker et al., 1999) De Lang (1996) به مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی آبخوان کشور هلند پرداخت و به این نتیجه رسید که روش المان تحلیلی به خوبی پیچیدگی‌های هیدرولوژیکی در مقیاس‌های بزرگ را مدل‌سازی می‌کند. Badv and Deriszadeh (2005) از برنامه WhAEM 2000 که بر مبنای روش المان تحلیلی است برای محاسبه حریم حفاظتی چاه‌های دشت ارومیه استفاده نمودند.

Steward and Allen (2013) به مدل‌سازی جریان آبخوان دشت‌های مرتفع ایالت کانزاس با استفاده از روش المان تحلیلی پرداختند و از الگوریتم اجتماع ذرات و لونبرگ-مارکوارد برای بهینه‌سازی نتایج استفاده نمودند. یکی دیگر از روش‌های بدون شبکه که برای حل معادلات حاکم بر حرکت جریان آب زیرزمینی در این تحقیق استفاده شد، روش هم‌آیی نقطه‌ای¹ می‌باشد. این روش برداشتی از روش المان محدود بوده، با این تفاوت که سیستم معادلات جبری را برای کل دامنه مسئله بدون استفاده از شبکه از پیش تعیین شده ایجاد می‌کند و برای این کار، مجموعه‌ای از نقاط پخش شده در داخل دامنه را مورد استفاده قرار می‌دهد (Liu and Gu, 2005). در زمینه مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی به کمک روش هم‌آیی نقطه‌ای مطالعات مختلفی انجام شده است. Li و همکاران در سال 2003 با توسعه یک روش بدون شبکه بر پایه روش هم‌آیی نقطه‌ای به مدل‌سازی انتقال آلودگی در آب زیرزمینی پرداختند و به این نتیجه رسیدند که روش ارائه شده آسان، کاربردی و دقیق است. Kumar and Dodagoudar (2010) یک مدل عددی بر پایه روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی² برای انتقال آلودگی در یک محیط متخلخل اشباع را توسعه دادند. نتایج آن‌ها نشان داد که مدل پیشنهادی با نتایج تجربی پیشین مطابقت خوبی دارد. Meenal and Eldho (2011) به مدل‌سازی جریان آبخوان آزاد به کمک روش هم‌آیی نقطه‌ای پرداختند و با مقایسه نتایج مدل خود با نتایج مدل المان محدود و المان مرزی، نتایج مطلوبی را به

¹ Point Collocation Method

² Radial Point Interpolation Method

رودخانه به عنوان یک ویژگی هیدرولوژیکی اصلی با بار آبی مشخص در مدل اعمال شد. طول این رود 390 کیلومتر بوده و حداکثر دبی لحظه‌ای آن 6/17 مترمکعب در ثانیه می‌باشد. در این مطالعه از آمار سال آبی 82-1381 که میزان برداشت به صورت ماهیانه اندازه‌گیری شده و در دسترس می‌باشد (خاشعی سیوکی و همکاران، 1392)، برای مدل‌سازی استفاده شده است. طبق آمار سال 1381 آب منطقه‌ای خراسان (1381)، تخلیه سالیانه منابع زیرزمینی منطقه 1174/8 میلیون مترمکعب بوده که 994/6 میلیون مترمکعب آن مربوط به چاه‌ها می‌باشد. پراکندگی چاه‌ها در سطح دشت یکنواخت نبوده و به قسمت‌های جنوب و جنوب شرق با میانگین دبی برداشت 30 لیتر در ثانیه و میانگین عمق حفاری 106 متر، قسمت‌های غرب و مرکز دشت با میانگین دبی برداشت 13/17 لیتر در ثانیه و عمق متوسط چاه‌ها 81/8 متر و قسمت مرکز و شمال شرق دشت با دبی میانگین برداشت 11/23 لیتر در ثانیه و میانگین عمق چاه‌ها 80 متر تقسیم می‌شود (خاشعی سیوکی و همکاران، 1390).

3- مواد و روش‌ها

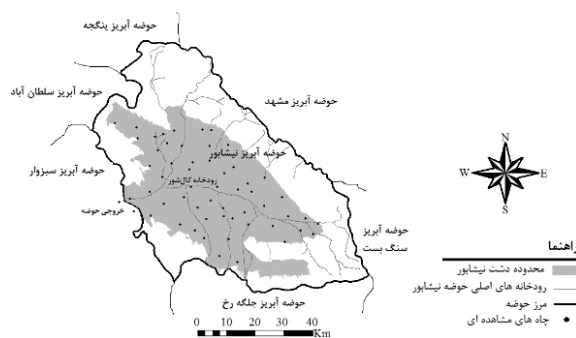
با توجه به تحقیقات انجام شده در زمینه مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی که از فرضیات دوپویی-فورشه‌ایمر به عنوان یک فرض واقع‌بینانه در مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی استفاده نموده‌اند، در این مطالعه، مدل‌سازی به صورت دو بعدی انجام شد (Steward, 2013 ; Rabideau et al., 2007). مدل‌سازی جریان در این مطالعه در حالت دائمی انجام شده است، به این ترتیب معادله حاکم به صورت رابطه (1) بیان می‌شود (Fitts, 2012):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) + N = 0 \quad (1)$$

که در آن T قابلیت انتقال، h بار آبی و N میزان تغذیه با علامت مثبت و یا میزان نشت با علامت منفی می‌باشد و x و y نیز محورهای مختصات کارتزین را نشان می‌دهند.

3-1- روش المان تحلیلی

در این روش یک المان، تابعی ریاضی بوده که به همراه یک شرط مرزی خاص خود بر تغییرات جریان آب



شکل 1 موقعیت منطقه مورد مطالعه و حوضه‌های مجاور آن (خاشعی سیوکی و همکاران، 1392)

پایین‌ترین نقطه در محل خروجی دشت (حسین‌آباد جنگل) در سمت غربی دشت قرار دارد که حدود 1050 متر از سطح دریا بالاتر است. طبق مطالعات انجام شده، آبخوان دشت نیشابور آزاد و تک لایه‌ای بوده و رسوبات تشکیل‌دهنده آن بر روی سنگ کف رسی میوسن قرار گرفته است (ولایتی و توسل، 1370).

2-1- مدل مفهومی منطقه مورد مطالعه

اولین قدم برای مدل‌سازی، تهیه مدل مفهومی سیستم آبخوان است. ضخامت آبخوان در غرب 80 متر، در مرکز 75 متر، در جنوب شرق 50 متر، در شمال شرق 180 متر و در اراضی باغروود و سالاری حدود 200 متر می‌باشد. ضریب انتقال منطقه از 26 تا 4300 مترمربع در روز تغییر می‌کند. با استفاده از ضخامت سفره و نقشه‌های ضریب انتقال منطقه (خاشعی سیوکی و همکاران، 1392)، مقدار ضریب هدایت هیدرولیکی متوسط 20 متر در روز برای فرض اولیه مدل‌سازی در نظر گرفته شد. با توجه به موقعیت زمین‌شناسی منطقه، دامنه مدل از طرف شمال به ارتفاعات بینالود، از شرق به بلندی‌های لیلجوق و یال پلنگ و از جنوب به تپه ماهورهای نیزه بند محدود شده است. این نواحی به صورت مرزهای بدون جریان در مدل اعمال می‌شوند. پایین‌ترین نقطه دشت در سمت غربی با تراز آب زیرزمینی حدود 1040 متر بالاتر از سطح دریا واقع شده است؛ این بخش به عنوان مرز با بار آبی مشخص در مدل وارد می‌شود و یکی از منابع مهم تغذیه زیرزمینی آب رودخانه‌ها هستند، به همین منظور وجود رودخانه کال شور در نتایج مدل‌سازی بسیار حائز اهمیت است. این

فرومنطقه⁴. المان جریان یکنواخت یک جواب ساده از حل معادله لاپلاس بوده و به مدل یک جریان یکنواخت پایدار اضافه می‌کند. در حقیقت علت استفاده از این المان، وارد کردن تأثیر ویژگی‌های دور دست که در مدل در نظر گرفته نشده، از قبیل شیب، می‌باشد (Craig, 2004). این المان به صورت رابطه (6) معرفی می‌شود.

$$\Omega_{uf}(z) = -Q_0(z - z_{ref})e^{i\beta} \quad (6)$$

که $\Omega_{uf}(z)$ پتانسیل مختلط ناشی از جریان، Q_0 میزان دبی جریان، z مختصات مختلط، β زاویه جریان با برای مثبت محور x ها و z_{ref} مختصات مختلط نقطه مرجع می‌باشد (Craig, 2004).

المان‌های فروخط گروه بزرگی از المان‌ها را شامل می‌شوند و ممکن است برای مدل‌سازی رودها، جریان‌ها، کانال‌ها، زهکش‌ها، چاه‌های افقی و حتی مرزهای آبخوان و یا مناطق ناهمگن که دارای هدایت هیدرولیکی متفاوت هستند استفاده شوند. المان‌های فروخط با مرتبه یک به شکل رابطه (7) تعیین می‌شود (Bakker and Kelson, 2009):

$$\Omega_{IS}(z) = \frac{a_n L}{4\pi} [(Z+1)\ln(Z+1) - (Z-1)\ln(Z-1)] \quad (7)$$

که $\Omega_{IS}(z)$ پتانسیل مختلط ناشی از فروخط، L طول فروخط و Z نیز موقعیت المان می‌باشد و برابر است با $\frac{2z - (z_1 + z_2)}{(z_2 - z_1)}$ که z_1 و z_2 مختصات نقاط رأس المان هستند. المان فرو منطقه برای مناطقی که دارای تغذیه و یا تخلیه از آبخوان می‌باشد، مفید است (Rabideau et al., 2007). تابع المان فرو منطقه که از حل معادله پواسن به دست می‌آید، به شکل رابطه (8) بیان می‌شود (Rabideau et al., 2007):

$$\Omega_{as}(Z) = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n, & |Z| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} b_n Z^{-n} + \frac{Q}{2\pi} \ln(R_c Z), & |Z| \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

که $\Omega_{IS}(z)$ پتانسیل مختلط ناشی از فروخط، a_n و b_n ضرایب مشخص شده یا محاسبه شده توسط شرایط مرزی

زیرزمینی مؤثر است (Rabideau et al., 2007). این المان‌ها ممکن است بیان‌کننده تأثیر یک چاه برداشت، یک جریان سطحی تبادل با آب زیرزمینی، یک منطقه تغذیه، یک مرز نفوذناپذیر و یا یک مرز مشخص‌کننده تغییرات در هدایت هیدرولیکی باشند. این توابع ریاضی باهم جمع شده و تشکیل یک معادله کلی را می‌دهند. این معادله ممکن است صدها عبارت داشته باشد. توسط این معادله می‌توان بار آبی و سرعت در هر نقطه از دامنه مدل را به عنوان تابعی از مکان محاسبه و پیش‌بینی نمود (Fitts, 2012). در روش المان تحلیلی، معادلات جریان به صورت عباراتی در قالب Φ یا دبی پتانسیل با بعد (L^3/T) نوشته می‌شود. دبی پتانسیل عبارت است از:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} = T \frac{\partial h}{\partial i} (i = x, y, z) \quad (2)$$

به این ترتیب رابطه (1) در قالب دبی پتانسیل به شکل رابطه (3) معرفی خواهد شد.

$$\nabla^2 \Phi = \pm N \quad (3)$$

با توجه به آزاد بودن سیستم آبخوان مدل شده در این تحقیق، برای به دست آوردن میزان بار آبی با استفاده از دبی پتانسیل می‌توان با در نظر گرفتن $T = Kh$ مطابق رابطه (4) عمل نمود:

$$\Phi_{(x,y)} = \frac{1}{2} Kh_{(x,y)}^2 + C_u \quad (4)$$

که K هدایت هیدرولیکی منطقه و C_u ثابت انتگرال‌گیری بوده و در بیشتر مواقع برای ساده‌سازی صفر در نظر گرفته می‌شود. مشابه تمام راه‌حل‌های معادله لاپلاس، در روش المان تحلیلی معمولاً راه‌حل‌های معادله لاپلاس و پواسن به شکل مختلط و به صورت رابطه (5) نوشته می‌شوند (Fitts, 2012).

$$\Omega(z) = \Phi(z) + i\Psi(z) \quad (5)$$

که $\Omega(z)$ پتانسیل مختلط، $z = x + iy$ مختصات مختلط، $\Phi(z)$ دبی پتانسیل، $i = \sqrt{-1}$ و $\Psi(z)$ تابع جریان می‌باشد.

با توجه به منطقه مورد مطالعه، المان‌های مورد نیاز برای مدل‌سازی عبارتند از جریان یکنواخت، فروخط³ و

⁴ Area Sink

³ Line Sink

ماتریسی جمع‌آوری شده و در نهایت با استفاده از اصل برهم‌نهی به صورت یک جا به دبی پتانسیل کلی اضافه می‌شوند. این امر باعث می‌شود تا علاوه بر کم شدن پیچیدگی محاسبات، سرعت محاسبات نیز افزوده شود، زیرا قبل از محاسبات مربوط به دبی پتانسیل مختلط، محاسبات مربوط به المان‌های فروخط انجام شده است.

3-2- روش هم‌آبی نقطه‌ای

روش هم‌آبی زیرمجموعه‌ای از روش باقی‌مانده‌های وزن‌دار است که برای حل تقریبی معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی یا جزئی با شرایط مرزی و همچنین حل عددی معادلات انتگرالی به کار می‌رود (Liu and Gu, 2005). در این روش حل دقیق معادله دیفرانسیل با یک چندجمله‌ای و به کمک محاسبه توابع آزمون، تقریب زده می‌شود.

برای دستیابی به جواب تقریبی معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی که دارای شرایط مرزی خاص خود می‌باشد، اولین کار تقریب تابع میدانی با استفاده از توابع شکل است. توابع شکل معمولاً به صورت محلی حمایت‌شده هستند، به این معنی که فقط یک مجموعه از نقاط میدانی در یک دامنه محلی کوچک برای ساخت تابع شکل استفاده شده و در نتیجه تابع شکل تولید شده فقط برای همان دامنه کوچک کاربرد داشته و خارج از آن صفر می‌باشد. به چنین دامنه‌های محلی، دامنه حمایتی گفته می‌شود (Liu and Gu, 2005).

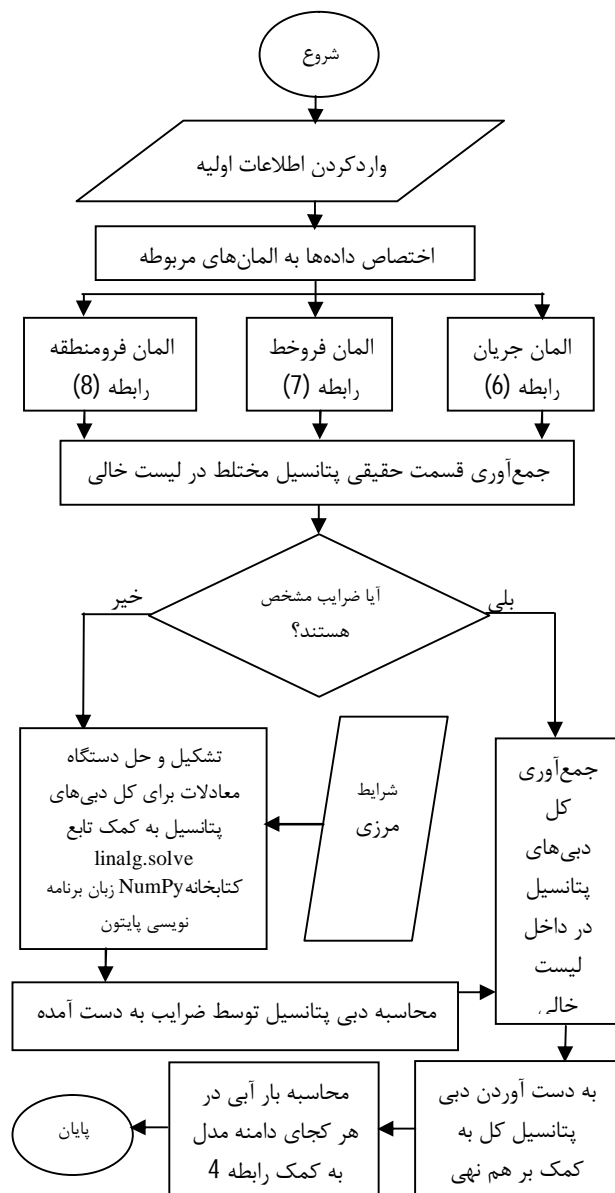
در مطالعه حاضر بر پایه مطالعات قبلی از توابع پایه شعاعی چند ربعی⁵ برای ساخت تابع شکل (Kansa, 1990) استفاده شده است. در روش درونیابی نقطه‌ای شعاعی تابع تقریبی برابر است با (Liu and Gu, 2005):

$$\bar{u}(x) = \sum_{i=1}^n R_i(x).a_i + \sum_{j=1}^m P_j(x).b_j \quad (9)$$

که a_i ضریب مجهول بوده و $R_i(x)$ تابع پایه شعاعی (تابع شکل) می‌باشد و در حالت دو بعدی مطابق رابطه (10) بیان می‌شود (Meenal and Eldho, 2011):

$$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^s \Rightarrow R_i(x, y) = \sqrt{r_i^2 + C_s^2} \quad (10)$$

می‌باشند. Q نشان‌دهنده تغذیه یا تخلیه از منطقه دایره‌ای بوده و R_c نیز شعاع دایره است. $Z = \frac{z - z_c}{R_c}$ که z_c مختصات نقطه مرکزی دایره می‌باشد. برای المان‌های نشان‌دهنده غیریکنواختی $Q=0$ می‌باشد. چگونگی توسعه مدل المان تحلیلی حاضر در فلوچارت شکل 2 مشخص شده است.



شکل 2 فلوچارت گسترش مدل المان تحلیلی حاضر

در این الگوریتم قبل از جمع‌آوری دبی پتانسیل کل، تمام ویژگی‌های هیدرولوژیکی موجود در مدل در قالب

⁵ Multi Quadric Radial Basis Functions

که d_c فاصله بین گره‌ها در دامنه حمایتی بوده و در این تحقیق $\alpha_c = 1, 2, 3$ در نظر گرفته شده است. همچنین x و y مختصات نقطه مورد نظر در دامنه حمایتی و x_i و y_i مختصات i مین گره در دامنه حمایتی می‌باشد.

نحوه فرمول بندی معادله جریان به این ترتیب است که با در نظر گرفتن معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی مطابق رابطه (1) و با ثابت فرض کردن هدایت هیدرولیکی در دو برای و مشتق گیری جزئی روابط (11، 12) بدست می‌آید:

$$K \left(\left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) + h \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right) + K \left(\left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right) + h \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (11)$$

$$\tilde{h}(x, y) = \sum_{i=1}^n R_i(x, y) h_i \quad (12)$$

که $h(x, y)$ مقادیر مشخص بار آبی با توجه به شرایط مرزی می‌باشند. $R_i(x, y)$ تابع شکل و h_i ضرایب مجهول بر حسب مقادیر بار آبی می‌باشد.

مشتقات تابع شکل رابطه (10) عبارت است از:

$$\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial x} = \frac{(x - x_i)}{R_i^3(x, y)} \quad (13)$$

$$\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial y} = \frac{(y - y_i)}{R_i^3(x, y)} \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2 R_i(x, y)}{\partial x^2} = \frac{-((y - y_i)^2 + C_s^2)}{R_i^4(x, y)} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 R_i(x, y)}{\partial y^2} = \frac{-((x - x_i)^2 + C_s^2)}{R_i^4(x, y)} \quad (16)$$

با جایگذاری تابع شکل و مشتقات آن در رابطه (11)، رابطه (17) بدست می‌آید:

$$K \left(\left(\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial x} \right) h_i \left(\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial x} \right) h_i + (R_i(x, y) h_i) \left(\frac{\partial^2 R_i(x, y)}{\partial x^2} \right) h_i \right) + K \left(\left(\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial y} \right) h_i \left(\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial y} \right) h_i + (R_i(x, y) h_i) \left(\frac{\partial^2 R_i(x, y)}{\partial y^2} \right) h_i \right) \quad (17)$$

رابطه (17) در شکل ماتریسی با فرض $R_i(x, y) = R_1$ و $\frac{\partial R_i(x, y)}{\partial x} = R_2$ و $\frac{\partial^2 R_i(x, y)}{\partial x^2} = R_3$

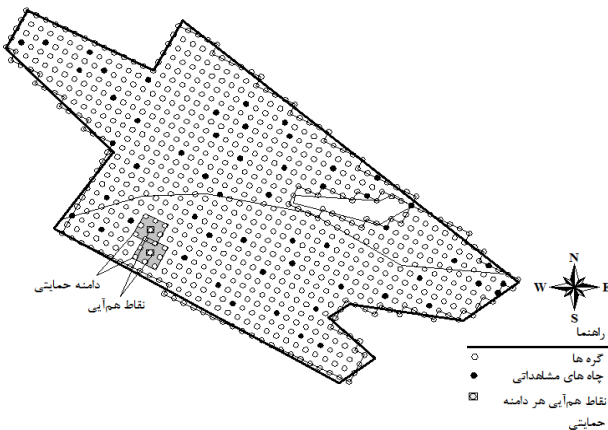
$$\left(K \left([R_2] \{h_i\} [R_2] \{h_i\} + [R_1] \{h_i\} [R_3] \{h_i\} \right) \right) + \left(K \left([R_4] \{h_i\} [R_4] \{h_i\} + [R_1] \{h_i\} [R_5] \{h_i\} \right) \right) = 0 \quad (18)$$

به این ترتیب می‌توان بعد از محاسبه تابع شکل هر دامنه حمایتی و ترکیب تمام دامنه‌های حمایتی در یک ماتریس کلی، مقدار بار آبی را محاسبه نمود.

در این مطالعه برای مدل سازی از نقاط هم فاصله در تمام قسمت‌های دامنه مدل استفاده شد. همچنین از دامنه حمایتی مستطیلی برای ساخت تابع شکل استفاده گردید. مقادیر مرزی گره‌های منطبق بر مرز با توجه به شرایط مرزی دریکله یا نیومن اختصاص داده می‌شوند و سپس ماتریس کلی با در نظر گرفتن خاصیت دلتای کرونکر مطابق رابطه (19) ساخته می‌شود.

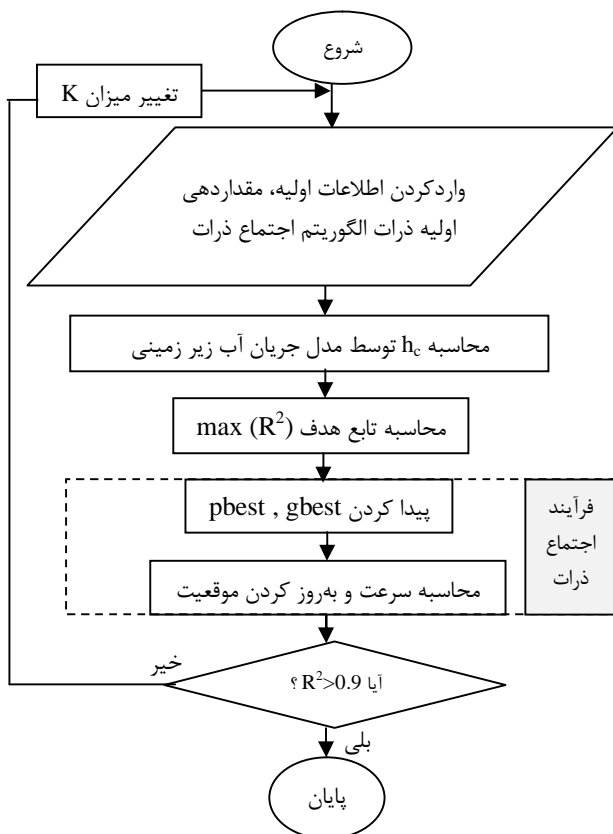
$$R_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1 & i = j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \\ 0 & i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (19)$$

برای مدل سازی منطقه مورد مطالعه مطابق شکل 3 کل دامنه به نقاط با فاصله یکسان تقسیم شد. میزان بار آبی در چاه‌های برداشت نیز به عنوان شرایط مرزی به مدل وارد گردید. هر چه تعداد نقاط در دامنه مدل شده بیشتر باشد، دقت و به ویژه پیوستگی جواب‌ها بیشتر، ولی زمان محاسبات طولانی تر و پیچیدگی مدل سازی افزایش می‌یابد.



شکل 3 چیدمان نقاط در دامنه منطقه مورد مطالعه

دائمی فرض نمودن رژیم جریان، نتیجه واسنجی مقدار هدایت هیدرولیکی خواهد بود. با بررسی‌های انجام شده مشخص گردید الگوریتم اجتماع ذرات در حین سادگی بهترین نتایج را در تحقیق حاضر به دست می‌آورد (محمدی و همکاران، 1392). پیاده سازی الگوریتم اجتماع ذرات در مدل حاضر در شکل 5 مشخص شده است.



شکل 5 توسعه الگوریتم اجتماع ذرات برای واسنجی مدل

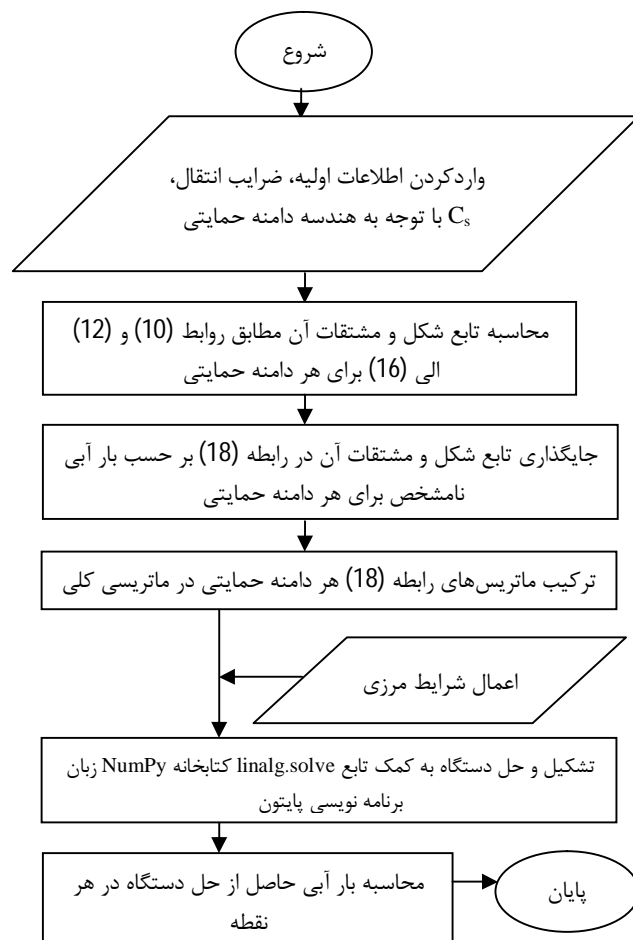
در توسعه الگوریتم اجتماع ذرات، تابع هدف محاسبه ضریب همبستگی بوده که مطابق رابطه (20) در نظر گرفته شده است.

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (h_o - h_c)^2}{\sum_{i=1}^N (h_o - \bar{h}_o)^2} \quad (20)$$

که h_o و h_c به ترتیب مقادیر بار آبی مشاهداتی و محاسباتی می‌باشند. N تعداد کل مشاهدات و \bar{h}_o میانگین وزنی بارهای آبی مشاهداتی می‌باشد.

پیاده‌سازی مدل هم‌آبی نقطه‌ای و روابط استفاده شده برای این مدل در فلوجارت شکل 4 ارائه شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود این الگوریتم قادر به اعمال جداگانه ویژگی‌های هیدرولوژیکی به مدل نبوده و فقط این قسمت‌ها به صورت نقاط با بار آبی مشخص مطابق شکل 3 به مدل معرفی می‌شوند. این موضوع علاوه بر پایین آوردن دقت، به این دلیل که بعضی از نقاط به طور دقیق پوشش دهنده رودخانه مد نظر نیستند، پیچیدگی مدل و میزان درونیابی را افزایش می‌دهد.



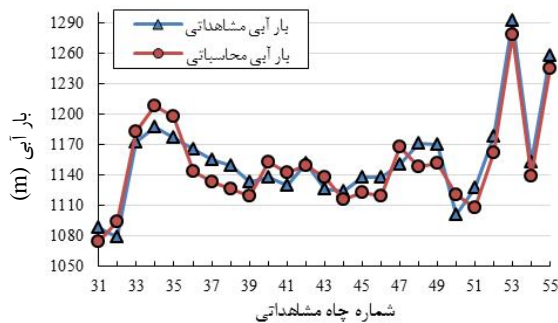
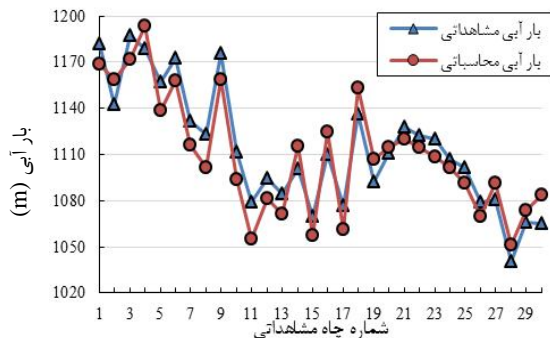
شکل 4 فلوجارت توسعه مدل به روش هم‌آبی نقطه‌ای

4- نتایج

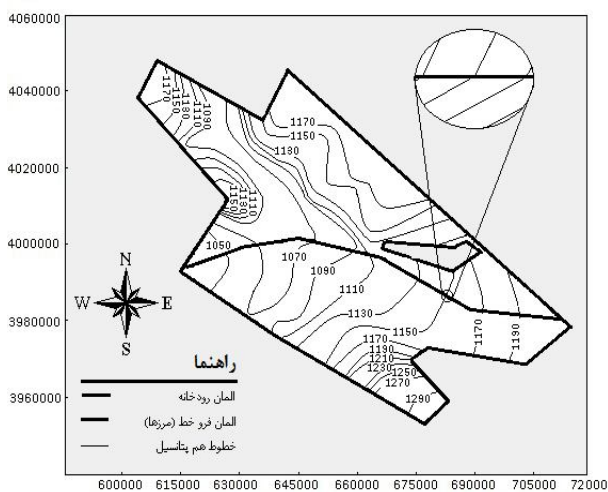
هر مدل آب زیرزمینی بعد از پیاده‌سازی برای نزدیک شدن به شرایط واقعی، نیازمند واسنجی⁶ است. با توجه به

⁶ Calibration

مشخص شده است. همان‌طور که در شکل مشخص است مان‌های فروخت به خوبی مرزهای بدون جریان و رودخانه منطقه را مدل‌سازی نموده‌اند. از طرفی خطوط هم‌پتانسیل الگوی برای جریان در منطقه را به درستی مدل نموده است. شکستگی خطوط هم‌پتانسیل توسط رودخانه نیز توسط بزرگنمایی انجام شده کاملاً قابل مشاهده است.



شکل 7 مقایسه بار آبی مشاهداتی و محاسباتی تیر 82-1381 مدل المان تحلیلی

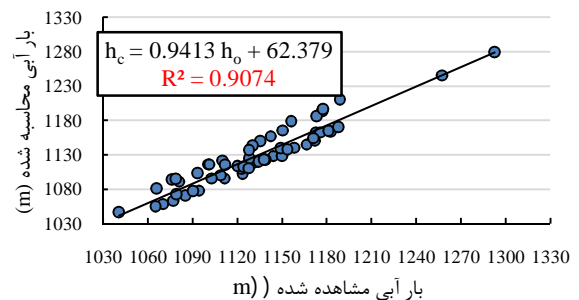


شکل 8 منحنی‌های تراز آب زیرزمینی مدل المان تحلیلی حاضر

روند کار الگوریتم به این صورت است که در هر مرحله از حرکت جمعیت (داده‌های ورودی به الگوریتم)، هر ذره با توجه به دو مقدار بهترین به روز می‌شود. اولین مقدار، بهترین جواب از لحاظ شایستگی است که تاکنون برای هر ذره به طور جداگانه به دست آمده است. این مقدار بهترین تجربه شخصی⁷ است که به نام pbest نامیده می‌شود. مقدار بهینه دیگر که توسط الگوریتم به دست می‌آید، بهترین مقداری است که تاکنون توسط تمام ذره‌ها در میان جمعیت به دست آمده است. این مقدار بهترین تجربه عمومی⁸ است که به نام gbest نامیده می‌شود. پس از یافتن این دو مقدار، هر ذره سرعت و مکان جدید خود را به روز می‌کند، تا زمانی این حلقه ادامه می‌یابد تا تابع هدف ارضا شود.

بعد از واسنجی، بهترین هدایت هیدرولیکی کل منطقه با توجه به یکسان فرض نمودن ضریب هدایت هیدرولیکی برای مدل المان تحلیلی مقدار 16/87 متر در روز با ضریب همبستگی 0/91 مطابق شکل 6 به دست آمد.

بعد از واسنجی، با توجه به ناچیز بودن بارندگی نسبت به برداشت طبق داده‌های موجود (خاشعی سیوکی و همکاران، 1392) و در نظر گرفتن هدایت هیدرولیکی 16/87 متر در روز، مدل‌سازی برای تیرماه 81-82 انجام گردید و ضریب همبستگی 0/89 محاسبه شد. در شکل 7 مقایسه نتایج مدل و داده‌های مشاهداتی برای هر چاه مشخص شده است.



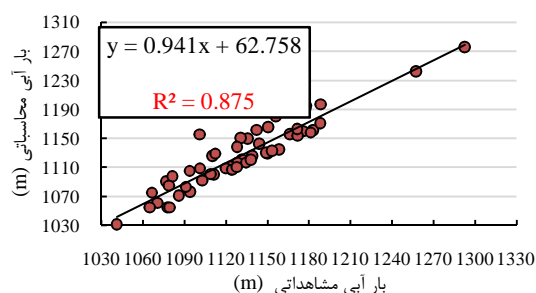
شکل 6 نتایج واسنجی مدل المان تحلیلی حاضر

در شکل 8 نتایج خروجی مدل بر حسب خطوط هم‌پتانسیل و تأثیر رودخانه بر خطوط تراز آب زیرزمینی

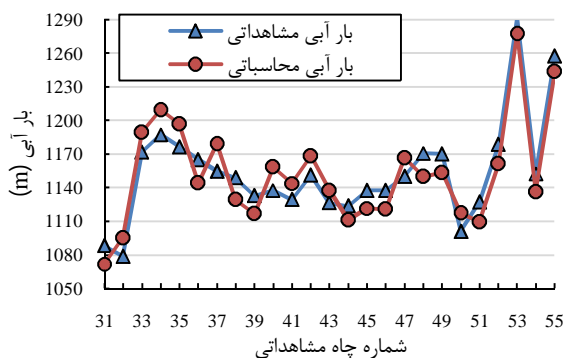
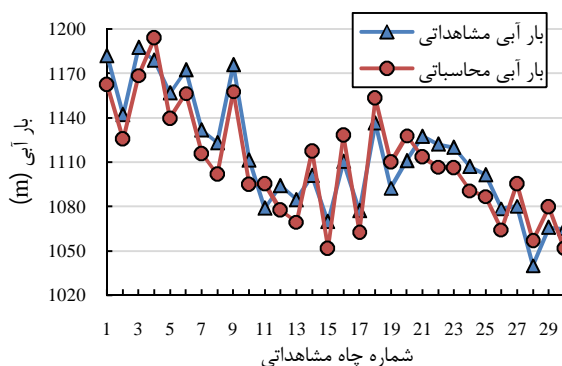
⁷ Personal best

⁸ Global best

آمده در $C_s=4000$ و $C_s=6000$ حاصل می‌شود و هر چه از این مقادیر فاصله بیشتر شود، دقت کاهش می‌یابد. با توجه به دقت $C_s=4000$ در شکل 11 خروجی مدل بر حسب خطوط هم پتانسیل مشخص می‌باشد. در این شکل الگوی جریان مطابق داده‌های مشاهداتی می‌باشد، ولی همان‌طور که مشخص است، به دلیل اینکه ویژگی‌های هیدرولوژیکی به صورت مستقیم به مدل اعمال نمی‌شود، در اطراف رودخانه منطقه تغییرات در خطوط هم پتانسیل برخلاف شکل 8 مشاهده نمی‌شود.



شکل 9 نتایج واسنجی مدل هم‌آبی نقطه‌ای حاضر



شکل 10 مقایسه بار آبی مشاهداتی و محاسباتی تیر 82-1381 مدل هم‌آبی نقطه‌ای با $C_s=4000$

در مدل هم‌آبی نقطه‌ای دامنه حل به 713 نقطه با فاصله یکسان ($\Delta x = \Delta y = 2000m$) تقسیم شد. با توجه به حساسیت مدل‌های هم‌آبی نقطه‌ای به ضریب C_s ، واسنجی با سه مقدار مختلف $C_s=2000$ و $C_s=4000$ و $C_s=6000$ انجام شد (Meenal and Eldho, 2011). این ضریب به هندسه و میزان وسعت دامنه حمایتی بستگی دارد. به این معنی که هر چه این مقدار بزرگ‌تر باشد، دامنه حمایتی بزرگ‌تر بوده و در نتیجه نقاط بیشتری را پوشش خواهد داد و برابر است با $C_s = \alpha \cdot d_c$ که d_c اندازه دامنه حمایتی و α نیز پارامتر شکل می‌باشد و بهترین مقدار آن بین 2 تا 3 پیشنهاد شده است (Liu and Gu, 2005). به این ترتیب واسنجی با توجه به سه مقدار C_s محاسبه شد. در $C_s=2000$ مقدار هدایت هیدرولیکی 14/178 متر در روز با ضریب همبستگی 0/82 به دست آمد. در $C_s=6000$ مقدار هدایت هیدرولیکی 15/01 متر در روز با ضریب همبستگی 0/86 به دست آمد و در $C_s=4000$ مقدار هدایت هیدرولیکی 15/23 متر در روز با ضریب همبستگی 0/87 به دست آمد. با توجه به نتایج بهتر $C_s=4000$ ، بهترین هدایت هیدرولیکی کل منطقه 15/23 متر در روز برای مدل‌سازی مطابق شکل 9 انتخاب گردید.

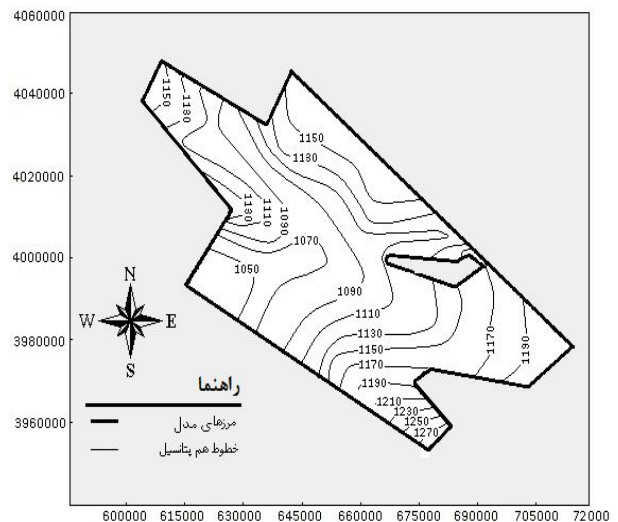
بعد از واسنجی، با در نظر گرفتن ضریب هدایت هیدرولیکی 15/23 متر در روز، مدل‌سازی برای تیرماه 82-81 با سه مقدار 2000، 4000 و 6000 برای C_s انجام شد. نتایج حاصل از مدل‌سازی برای $C_s=2000$ ضریب همبستگی 0/83 را مشخص نمود. به همین ترتیب نتایج حاصل از مدل‌سازی برای $C_s=6000$ ضریب همبستگی 0/86 را مشخص نمود. در نهایت با $C_s=4000$ مدل‌سازی مجدد انجام شد و ضریب همبستگی نتایج حاصل از مدل‌سازی مقدار 0/87 بدست آمد که بهترین ضریب همبستگی را داراست و در شکل 10 مقایسه نتایج مدل و داده‌های مشاهداتی مشخص شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود به ازای تغییر در مقدار C_s در نتایج مدل هم‌آبی نقطه‌ای نیز تغییر ایجاد می‌شود. مطابق مطالب ذکر شده بهترین مقدار برای α_c در محدوده 2 تا 3 می‌باشد به این ترتیب در مطالعه حاضر با فرض $\Delta x = \Delta y = 2000m$ بهترین مقدار مطابق نتایج به دست

5- نتیجه‌گیری

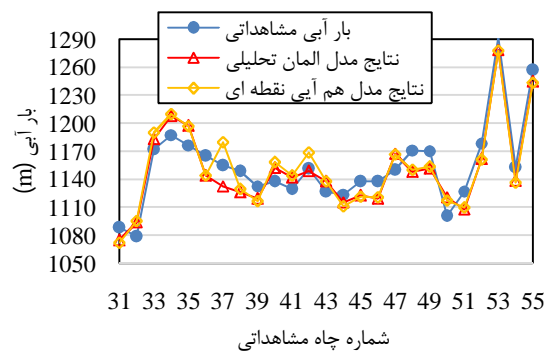
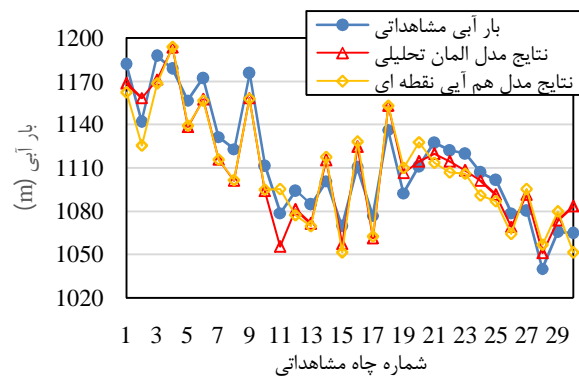
در این تحقیق به کمک روش مستقل از شبکه المان تحلیلی اقدام به مدل‌سازی دو بعدی جریان آب زیرزمینی در مقیاس بزرگ و در حالت دائمی گردید و نتایج آن با روش بدون شبکه هم‌آبی نقطه‌ای مقایسه گردید. در روش المان تحلیلی، قبل از اضافه نمودن دبی پتانسیل ویژگی‌های هیدرولوژیکی به دبی کلی، این دبی‌ها با استفاده از برهم‌نهی با هم ترکیب شده و بعد به دبی پتانسیل کلی اضافه شد. این امر علاوه بر کاهش پیچیدگی مدل‌سازی در مقیاس بزرگ، دقت نتایج را نیز افزایش داد. در روش هم‌آبی نیز با تبدیل معادله دیفرانسیلی حاکم بر جریان آب زیرزمینی به معادلات ساده جبری و استفاده از توابع شکل، مدل‌سازی انجام گردید. توسعه مدل‌های مذکور نیز توسط زبان برنامه‌نویسی شی‌گرا پایتون انجام گرفت. با توجه به یکسان فرض نمودن هدایت هیدرولیکی کل منطقه، واسنجی مدل جریان المان تحلیلی مقدار ضریب هدایت هیدرولیکی را $16/87$ متر در روز با ضریب همبستگی $0/91$ نسبت به مقادیر مشاهداتی مشخص نمود. با استفاده از این ضریب هدایت هیدرولیکی به دست آمده، اقدام به مدل‌سازی جریان گردید. نتایج حاصل از مدل‌سازی ضریب همبستگی $0/9$ نسبت به مقادیر مشاهداتی را نشان داد.

در مدل هم‌آبی نقطه‌ای با توجه به حساسیت مدل به ضریب C_s ، واسنجی برای سه مقدار مختلف 2000، 4000 و 6000 انجام شد. C_s ضریبی وابسته به هندسه و اندازه دامنه حمایتی و نقاط پوشش دهنده آن در روش هم‌آبی نقطه‌ای می‌باشد. واسنجی حاصل از این سه مقدار C_s به ترتیب ضریب هدایت هیدرولیکی را $14/18$ متر در روز، $15/01$ متر در روز و $15/23$ متر در روز به ترتیب با ضرایب همبستگی $0/82$ ، $0/86$ و $0/87$ مشخص نمود. در نهایت با توجه به نتایج بهتر واسنجی $C_s=4000$ ، مقدار هدایت هیدرولیکی $15/23$ متر در روز در نظر گرفته شد. با استفاده از این هدایت هیدرولیکی اقدام به مدل‌سازی با سه مقدار 2000 و 4000 و 6000 برای ضریب C_s گردید. نتایج، ضریب همبستگی $0/83$ را برای $C_s=2000$ ، ضریب همبستگی $0/87$ برای $C_s=4000$ و ضریب همبستگی

برای درک بهتر نتایج دو روش مدل‌سازی، شکل 12 مقایسه نتایج بین دو روش را در 55 چاه مشاهداتی نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است، نتایج مدل المان تحلیلی با توجه به نزدیکی ضریب همبستگی دو مدل به نسبت بهتر از نتایج مدل هم‌آبی نقطه‌ای به دست آمده است.



شکل 11 منحنی تراز آب زیرزمینی مدل هم‌آبی نقطه‌ای



شکل 12 مقایسه نتایج مدل المان تحلیلی و هم‌آبی نقطه‌ای

پتانسیل مختلط ناشی از جریان $\Omega_{uf}(z)$

0/86 را برای $C_s=6000$ نسبت به داده‌های مشاهداتی نشان می‌دهد. با توجه به نتایج می‌توان بهترین نتیجه را در $C_s=4000$ دانست.

در نهایت می‌توان به این نتیجه رسید مدل المان تحلیلی با توجه به فرضیات در نظر گرفته شده نتایج را با دقت بهتری محاسبه می‌کند. دلیل این موضوع را می‌توان در استفاده از توابع تحلیلی که حاصل از حل معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی در روش المان تحلیلی می‌باشد، دانست. در این روش ویژگی‌های هیدرولوژیکی به صورت دقیق و تحلیلی وارد مدل می‌شود و همین امر موجب افزایش دقت جواب‌ها می‌شود.

7- منابع

بانک اطلاعات معاونت مطالعات پایه منابع آب (1381). "آمار کمی منابع آب زیرزمینی (چاه، چشمه و قنات) محدوده مطالعاتی نیشابور با کد 4738"، شرکت سهامی آب منطقه‌ای خراسان رضوی، ایران.

خاشعی سیوکی ع، قهرمان ب. و کوچک‌زاده م. (1390). "ارزیابی پتانسیل استحصال آب از آبخوان با روش فرایند تحلیلی سلسله مراتبی فازی (مطالعه موردی: دشت نیشابور)"، مجله پژوهش آب ایران، دوره 5، شماره 9، ص.ص. 171-180.

خاشعی سیوکی ع، قهرمان ب. و کوچک‌زاده م. (1392). "مقایسه مدل‌های شبکه عصبی مصنوعی، ANFIS و رگرسیونی در برآورد سطح ایستابی آبخوان دشت نیشابور"، نشریه آبیاری و زهکشی ایران، دوره 1، شماره 1، ص.ص. 10-22.

محمدی ا، حسامی کرمانی م.ر. و قائینی حصاروئی م. (1392). "مقایسه روش‌های بهینه‌سازی ترکیب‌شده با روش المان تحلیلی برای تصفیه آب‌های زیرزمینی"، مجموعه مقالات هفتمین کنگره ملی عمران، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران.

ولایتی س. و توسلی س. (1370). منابع و مسائل آب خراسان، انتشارات آستان قدس رضوی، مشهد.

Badv, K. and Deriszadeh, M. (2005). "Wellhead protection area delineation using the analytic element method", Water, Air, and Soil Pollution, 161 (1), pp. 39-54.

Bakker, M., Anderson, E., Olsthoorn, T. and Strack, O. D. L. (1999). "Regional groundwater modeling of the Yucca Mountain site using analytic elements", Journal of Hydrology, 226 (3), pp. 167-178.

Bakker, M. and Kelson, V. A. (2009). "Writing analytic element programs in Python", Ground Water, 47 (6), pp. 828-834.

Craig, J. R. (2004). "Reactive contaminant transport modeling using analytic element flow solutions",

6- فهرست علائم

a_n	ضریب
b_n	ضریب
d_c	فاصله بین گره‌ها در دامنه حمایتی
$h(x,y)$	مقادیر بار آبی
h_i	ضرایب مجهول بر حسب مقادیر بار آبی
K	هدایت هیدرولیکی منطقه
L	طول فروخط
N	میزان تغذیه یا نشت
Q	نشان‌دهنده تغذیه یا تخلیه
Q_o	میزان دبی جریان
R_c	شعاع دایره
$R_i(x)$	تابع پایه شعاعی
T	قابلیت انتقال
x	محور مختصات کارترین
y	محور مختصات کارترین
z	مختصات مختلط
z_c	مختصات نقطه مرکزی دایره
z_{ref}	مختصات مختلط نقطه مرجع
β	زاویه جریان با برای مثبت محور x ها
$\Phi(z)$	دبی پتانسیل
$\Psi(z)$	تابع جریان
$\Omega(z)$	پتانسیل مختلط
$\Omega_{Is}(z)$	پتانسیل مختلط ناشی از فروخط

Springer, Dordrecht.

Meenal, M. and Eldho, T. I. (2011) "Simulation of groundwater flow in unconfined aquifer using meshfree point collocation method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 35 (4), pp. 700-707.

Pokrajac, D. and Lazic, R. (2002) "An efficient algorithm for high accuracy particle tracking in finite elements", *Advances in Water Resources*, 25 (4), pp. 353-369.

Rabideau, A.J., Craig, J.R., Silavisesrith, W., Fredrick, K., Flewelling, D.M., Janković, I., Becker, M.W., Bandilla, K. and Matott, L.S. (2007). "Analytic-element modeling of supraregional groundwater flow: Concepts and tools for automated model configuration", *Journal of Hydrologic Engineering (ASCE)*, 12 (1), pp. 83-96.

Steward, D.R. and Allen, A. J. (2013). "The analytic element method for rectangular gridded domains, benchmark comparisons and application to the high plains aquifer", *Advances in Water Resources*, 60, pp. 89-99.

Strack, O.D.L., Fitts, C. and Zaadnoordijk, W. (1987). "Application and demonstration of analytic element models", *NWWA Conference on Solving Ground Water Problems with Models*, Ohio, USA, 1464-1474.

PhD Thesis, The State University of New York, Buffalo, USA.

Craig, J. and Rabideau, A. (2006). "Finite element transport modeling using analytic element flow solutions", *Water Resources Research*, 42 (10), W10420.

De Lange, W. (1996). "NAGROM, a model for national groundwater management and regional and local studies", *European Water Management*, 6 (5), pp. 63-67.

Fitts, C. R. (2012). *Groundwater Science*, 2nd Ed., Academic Press, Oxford.

Kansa, E. J. (1990). "Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations", *Computers & Mathematics with Applications*, 19 (8), pp. 147-161.

Kumar, R. P. and Dodagoudar, G. (2010) "Two-dimensional meshfree modelling of contaminant transport through saturated porous media using RPIM", *Environmental Earth Sciences*, 61 (2), pp. 341-353.

Li, J., Chen, Y. and Pepper, D. (2003). "Radial basis function method for 1-D and 2-D groundwater contaminant transport modeling", *Computational Mechanics*, 32, (1-2), pp. 10-15.

Liu, G.-R. and Gu, Y. T. (2005). *An introduction to meshfree methods and their programming*,