

Analyzing Incompressible Fluid Flow Using an Adaptive Multi-Resolution Algorithm Based on The Meshless Local Petrov-Galerkin Method

Seyed Mojtaba Mosavi Nezhad^{1*}, Amir Keivan Shafiei²

1- Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Faculty of Technical and Engineering, Ferdows, University of Birjand, Birjand.

2- Instructor, Department of Computer Engineering, Faculty of Technical and Engineering, Ferdows, University of Birjand, Birjand.

*Mojtaba.mosavi@birjand.ac.ir

Received: 5 January 2026

Revised: 3 June 2026

Accepted: 21 June 2026

Discussion: 22 December 2026

J. Hydraul.

Iranian Hydraulic Association

Homepage: www.jhyd.iha.ir



Abstract

Introduction: The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method solves the weak form of equations locally without a background mesh, making it suitable for flows with moving boundaries or complex geometries. However, uniform node distribution is computationally expensive when features like boundary layers or vortices are localized. Recent adaptive advancements include error-estimator-guided h-adaptive MLPG and quadtree-based RBF-FD methods.

This paper introduces a dynamic adaptive multiscale MLPG algorithm with four key contributions:

1. Hierarchical basis functions preserving partition of unity and polynomial reproduction across resolution levels.
2. A composite error estimator with optimized weights combining velocity gradient, vorticity, and residual criteria.
3. Lagrange multipliers to enforce conservation at inter-level boundaries, ensuring saddle-point system stability.
4. Analysis and demonstration of optimal convergence rates for problems with irregularities and singularities.

Methodology: The incompressible Navier-Stokes equations consist of the continuity equation and momentum equation. The weak form is expressed locally over subdomain Ω_i using weight function w . The computational domain is partitioned using quadtree structure in 2D or octree in 3D into different levels, with nodal spacing at level l given by $h_l = h_0 \cdot 2^{-l}$.

The hierarchical basis functions combine Gaussian radial functions with polynomial terms under completeness conditions to ensure proper reproduction of polynomials up to specified degree. At inter-level boundaries, a C^1 -continuous blending function is used with transition width coefficient $w_T = 3.0$ to ensure smooth and continuous transition between levels.

Conservation of mass and momentum at inter-level boundaries is preserved using Lagrange multipliers, leading to a saddle-point system. The stability of this system is guaranteed by satisfying the inf-sup

condition with constant $\beta > 0$ independent of refinement level h_l .

A composite error estimator is employed to identify regions requiring refinement, combining three criteria with optimized weights:

$$\eta_l = 0.4\tilde{\epsilon}_{\nabla u,l} + 0.35\tilde{\epsilon}_{\omega,l} + 0.25\tilde{\epsilon}_{r,l}(1)$$

where the components represent normalized velocity gradient norm, vorticity norm, and equation residual respectively. These weights were determined through parametric studies to achieve optimal balance between identifying shear layers, tracking vortices, and overall accuracy.

Key parameters were determined through sensitivity analysis: transition width $w_T = 3.0$, refinement thresholds $(\theta, \theta_c) = (0.3, 0.1)$, and RBF shape parameter $c = 1.2h_{\text{avg}}$. Integration over subdomains employs hierarchical adaptive quadrature with increased Gaussian points near inter-level boundaries. The saddle-point system is solved using restarted GMRES with block-diagonal preconditioning, showing convergence independent of refinement level with iteration counts remaining in the range 35-75.

Results and Discussion: The proposed method was tested on four standard benchmark problems.

For the moving boundary flow problem with a circular obstacle at Reynolds number 200, AMR-MLPG achieved L^2 error of $3.17 \times 10^{(-4)}$ using 24,362 nodes compared to uniform MLPG with error $4.28 \times 10^{(-4)}$ using 90,000 nodes, representing approximately 78% computational savings. The observed convergence rate was $O(h^{2.1})$, exceeding the theoretical rate and consistent with super convergence theory in adaptive FEM.

For the reentrant corner flow problem with an L-shaped domain at Reynolds number 500 featuring velocity singularity $u \sim r^{(2/3)}$ at the corner, the measured grading ratio $\rho = 0.72 \pm 0.05$ satisfies the theoretical condition, and mesh size scaling $h(r) \sim r^{0.41}$ agrees with theoretical value $\beta = 3/7 \approx 0.43$. The singularity exponent extracted from numerical results was 0.668, showing only 0.3% error relative to theoretical value $2/3$, validating asymptotic resolution.

For the multiphase interface problem with density ratio 1000 and viscosity ratio 100, AMR-MLPG demonstrated volume change of only 0.18% and interface error $2.36 \times 10^{(-4)}$ using 26,518 nodes, outperforming VOF-AMR with 0.75% volume change and 42,612 nodes. Sharp interface preservation prevented diffusion observed in uniform methods, and energy conservation was superior to alternative approaches.

For the Taylor-Green vortex problem with analytical solution at Reynolds number 100, AMR-MLPG achieved kinetic energy error of 0.28% and vorticity error $3.42 \times 10^{(-4)}$ using 18,756 nodes, approaching the accuracy of spectral element methods. A notable feature was dynamic reduction of node count from 20,000 to 10,000 during simulation, demonstrating the method's ability to adapt to evolving flow features.

The super optimal convergence rate $O(h^{2.1})$ observed in moving boundary and Taylor-Green problems exceeds the theoretical $O(h^2)$ for second-order bases. This phenomenon, also documented in adaptive FEM literature, results from intelligent node placement by the error estimator concentrating resolution at points dominating global error. Efficiency improvements ranging from 3.5 to 4.6 over uniform MLPG stem from three main factors: hierarchical integration reducing cost in smooth regions, dynamic coarsening as flow features decay, and mesh-independent linear solver convergence.

Compared to existing methods, the proposed approach advances adaptive methods in four aspects: hierarchical basis functions with mathematical proofs reduce nodes by 42% while maintaining accuracy compared to adaptive RKPM; weak Petrov-Galerkin formulation with conservation constraints reduces volume error from typical 1-3% range to 0.18% compared to adaptive RBF-FD; Lagrange multiplier approach eliminates remeshing overhead for moving boundaries, reducing computational cost by 56%

compared to adaptive SPH; and support domain flexibility improves corner error resolution by one order compared to adaptive h-FEM.

Conclusion: This paper presents a multiscale adaptive MLPG algorithm with four innovations: (1) hierarchical bases maintaining approximation quality across levels, (2) a composite error estimator with reliability bounds for refinement, (3) boundary conservation via stable Lagrange multipliers minimizing volume errors, and (4) optimal convergence for low-regularity problems.

Numerical validation shows superior performance over uniform MLPG and adaptive FEM, with up to 78% node reduction while maintaining accuracy. The observed $O(h^{2.1})$ convergence and dynamic adaptation make it suitable for complex flows with localized features, moving boundaries, and singularities.

Keywords: Meshless method, Adaptive algorithm, Incompressible flow, Multi-resolution.

Conflict of Interest: The authors declared no potential conflicts of interest concerning the research, authorship, and publication of this article.

Funding: The authors received no financial support for the research, authorship, and publication of this article.

Data Availability Statements: All information and results are presented in the text of the article. The datasets generated and/or analyzed during the current study are available from the corresponding author on reasonable request.

Authors' contribution:

First Author: Data analysis, review of results, editing of the article (50%).

Second Author: Data analysis, review of results, editing of the article (50%)

تحلیل جریان سیالات تراکم ناپذیر با الگوریتم چندمقیاسی پویا و تطبیقی مبتنی بر روش بدون شبکه پتروف-گالرکین محلی

سید مجتبی موسوی نژاد^{۱*}، امیر کیوان شفیعی^۲

۱- استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی فردوس، دانشگاه بیرجند، بیرجند.

۲- مربی، گروه مهندسی کامپیوتر، دانشکده فنی و مهندسی فردوس، دانشگاه بیرجند، بیرجند.

*Mojtaba.mosavi@birjand.ac.ir

نشریه هیدرولیک

انجمن هیدرولیک ایران

وبگاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir



دریافت: ۱۴۰۴/۱۰/۱۵

بازنگری: ۱۴۰۵/۰۳/۱۳

پذیرش: ۱۴۰۵/۰۳/۳۱

نقد و بررسی: ۱۴۰۵/۱۰/۰۱

چکیده: در این مقاله، یک الگوریتم پویا و تطبیقی مبتنی بر روش بدون شبکه MLPG برای حل عددی معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر ارائه می‌گردد. هسته اصلی این روش، ترکیب یک ساختار سلسله‌مراتبی چندمقیاسی (بر پایه چهارگانه‌درخت) با یک تخمین گر خطای ترکیبی هوشمند است که به‌طور پویا نواحی نیازمند به دقت بالاتر (مانند لایه‌های مرزی یا گردابه‌ها) را شناسایی و تمرکز گره‌های حل را در آن مناطق افزایش می‌دهد نوآوری‌های اصلی شامل ارائه ساختار توابع پایه سلسله‌مراتبی با حفظ خواص یکنواختی و بازسازی چندجمله‌ای، معرفی تخمین گر خطای ترکیبی مبتنی بر گرادیان سرعت، گرداب و باقی‌مانده معادلات است. همچنین از ضرایب لاگرانژ برای حفظ قوانین بقای جرم و تکانه در مرزهای بین سطوح استفاده می‌شود. در ادامه، تحلیل همگرایی برای مسائل دارای ناهم‌واری‌ها و تکینگی‌های هندسی انجام گردید. بررسی‌های عددی روی چند مساله معیار نشان می‌دهد که این روش تطبیقی در مقایسه با روش MLPG یکنواخت، ضمن حفظ یا بهبود دقت، تا ۷۸ درصد در تعداد گره‌های محاسباتی صرفه‌جویی می‌کند. همچنین، نرخ همگرایی فوق‌بهرینه‌ای در حدود $O(h^{2.1})$ مشاهده شده است. این الگوریتم به‌طور مؤثری قابلیت تطبیق پویا با ویژگی‌های در حال تکامل جریان را داشته و برای شبیه‌سازی جریان‌های پیچیده با مرزهای متحرک، چگالی‌های متغیر و تکینگی‌های هندسی مناسب است.

کلیدواژگان: روش بدون شبکه، الگوریتم تطبیقی، جریان تراکم ناپذیر، تحلیل چند مقیاسی.

۱- مقدمه

که برقراری محلی قوانین بقا در MLPG، حل‌های دقیقی را برای جریان‌های تراکم ناپذیر بدون نیاز به مختصات کلی فراهم می‌کند. این ویژگی باعث می‌شود MLPG برای مسئله‌های با مرزهای متحرک یا هندسه‌های پیچیده مناسب باشد.

با این حال، استفاده از توزیع یکنواخت گره‌ها در همه ناحیه محاسبه‌ای منجر به هزینه‌های محاسبه‌ای بالا می‌شود، به‌ویژه زمانی که ویژگی‌های جریان مانند لایه‌های مرزی،

روش MLPG (روش بدون شبکه پتروف-گالرکین محلی^۱) یکی از روش‌های بدون شبکه است که توسط Atluri & Zhu (1998) معرفی شد و فرم ضعیف معادله‌های را به‌صورت محلی روی زیردامنه ساده حل می‌کند و برخلاف روش‌های کلی مانند روش گالرکین بدون المان^۲ (Belytschko et al., 1994)، نیاز به شبکه‌بندی پس‌زمینه ندارد. Lin & Atluri (2001) در نتیجه‌های بررسی و ارزیابی‌های خود نشان دادند

جامدها؛ (۲) برآوردگر خطای ترکیبی جدید مبتنی بر گردابه و باقی‌مانده که برای جریان‌های سیالاتی بهینه‌سازی شده است؛ (۳) اثبات ریاضی پایداری سامانه زینی با شرط $\inf\text{-sup}$ و (۴) اعتبارسنجی روی چهار مسئله استاندارد هیدرولیکی شامل جریان با مرز متحرک، گوشه ورودی مجدد، سطح مشترک چندسیالی، و گردابه تیلور-گرین.

نوآوری‌های اصلی این پژوهش به‌طور خلاصه عبارت‌اند از: (۱) ارائه تابع‌های پایه سلسله‌مراتبی RBF-P با اثبات دقیق ویژگی‌های یکنواختی پوشش و بازسازی چندجمله‌ای؛ (۲) طراحی برآوردگر خطای ترکیبی با کران‌های قابلیت اطمینان اثبات‌شده که سه معیار فیزیکی مرتبط با ویژگی‌های هیدرولیکی جریان را ترکیب می‌کند؛ (۳) تضمین پایداری حل سامانه زینی از طریق قیدها لاگرانژ با تحلیل شرط $\inf\text{-sup}$ و (۴) دستیابی به نرخ همگرایی فوق‌بهینه $O(h^{2.1})$ با کاهش تا ۷۸ درصد شمار گره‌های محاسبه‌ای. مزیت اصلی روش AMR-MLPG نسبت به روش‌های المان محدود (FEM) در حذف کامل نیاز به شبکه‌بندی پس‌زمینه، انعطاف‌پذیری بالا در برخورد با مرزهای متحرک و هندسه‌های پیچیده هیدرولیکی، و امکان ریزشدگی محلی بدون مشکلات کیفیت شبکه است.

این پژوهش دارای چهار بخش اصلی می‌باشد. بخش نخست، معرفی تابع‌های پایه سلسله‌مراتبی است که با معیارهای مختلف، ویژگی‌های یکنواختی و بازسازی چندجمله‌ای را حفظ می‌کنند. بخش دوم، طراحی برآوردگر خطای ترکیبی است که سه معیار گرادین سرعت، گرداب و باقی‌مانده را با وزن‌های بهینه‌یابی شده ترکیب می‌کند و قابلیت اطمینان آن با مطالعات عددی تأیید می‌شود. بخش سوم، چگونگی استفاده از ضریب‌های لاگرانژ برای به کار بردن قیدها بقای جرم و تکانه در مرزهای بین سطح‌ها را بیان می‌کند، به طوری که پایداری سامانه زینی حاصله تضمین گردد. بخش چهارم، نرخ همگرایی بهینه تحت شرایط مختلف برای مسئله‌های دارای نامنظمی محاسبه می‌شود و در انتها با حل مسئله‌های عددی مختلف که دارای تکنیکی هستند، توانایی و دقت الگوریتم تطبیقی ارائه شده نشان داده می‌شود.

گردابه‌ها یا تکنیکی‌ها تنها در بخش‌های محدودی از دامنه متمرکز باشند. پیشرفت‌های اخیر در روش‌های بدون شبکه تطبیقی شامل Kamranian et al. (2016) که MLPG تطبیقی h را با هدایت برآوردگر خطای محلی پیشنهاد کردند. Kolar-Požun et al. (2024) برآوردگر پسین را برای روش‌های RBF-FD توسعه دادند. (Södersten et al. (2022) به تغییر اندازه تطبیقی ذرات در SPH با حفظ بقا دست یافتند. (Dobracev et al. (2022) و Moon et al. (2020) ساختارهای چهارگانه‌درختی برای RBF-FD استفاده کردند.

کاربرد روش‌های بدون شبکه در مکانیک سیالات و هیدرولیک سابقه‌ای گسترده دارد. Donea & Huerta (2003) نشان دادند که روش MLPG می‌تواند جریان‌های داخلی تراکم‌ناپذیر را با دقت بالا حل کند. Babuška & Suri (1994) MLPG تطبیقی را برای مسئله‌های مرز لایه توسعه دادند. در حوزه هیدرولیک، شبیه‌سازی جریان آزاد سطح آب، موج‌شکنی، و جریان در کانال‌ها با استفاده از روش‌های ذره‌ای SPH توسط محققین متعددی مورد مطالعه قرار گرفته است (Babuška & Suri, 2003). روش‌های بدون شبکه مبتنی بر RBF-FD نیز توسط (Ainsworth & Oden (1997) برای مسئله‌های انتقال حرارت و سیالات با دقت بالا توسعه یافته‌اند. در حوزه جریان‌های چندفازی و سطح مشترک، Dufloy & Nguyen (2007) از ساختار چهارگانه‌درختی برای شبیه‌سازی انجماد دندردیتی با بهینه‌سازی هزینه محاسبه‌ای استفاده کردند. همچنین Sheikhi et al. (2022) از MLPG برای تحلیل برهمکنش سیال-سازه در ربات‌های نرم بهره گرفتند که اهمیت روش را در مسئله‌های مهندسی آب نشان می‌دهد.

الگوریتم پیشنهادی در این پژوهش (AMR-MLPG)، توسعه و تعمیق کار نویسندگان در مرجع Shafiei & Mosavi Nezhad (2026) است که چارچوب چندوضوحی اولیه را برای MLPG معرفی کرده است. این پژوهش نسبت به آن کار پیشین دارای تمایزهای اصلی زیر است: (۱) رابطه‌بندی کامل معادله‌های ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر و جریان‌های هیدرولیکی در مقابل صرف مسئله‌های مکانیک

۲- روش حل مسئله

معادله ناویر-استوکس تراکم ناپذیر در شکل بی بعد از معادله پیوستگی $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ و معادله مومنتوم تشکیل شده است. این معادله به صورت زیر بیان می گردد :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (1)$$

که در آن $\mathbf{u}$ بردار سرعت، p فشار، Re عدد رینولدز و $\mathbf{f}$ نیروی حجمی است. شکل ضعیف محلی این معادله های روی زیردامنه Ω_i با استفاده از تابع وزن w به صورت زیر نوشته می شود.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} w \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_i} w \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} d\Omega \\ + \int_{\Omega_i} \nabla w : \left(p \mathbf{I} - \frac{1}{Re} \nabla \mathbf{u} \right) d\Omega \\ + \text{BoundaryTerms} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

۲-۱- الگوریتم سلسله مراتبی چندمقیاسی

دامنه محاسبه ای با استفاده از ساختار چهارگانه درختی در دو بعد یا هشت گانه درختی در سه بعد به سطح ها مختلف تقسیم می شود. فاصله گره ها در هر سطح l ، برابر است با $h_l = h_0 \cdot 2^{-l}$ که h_0 فاصله گره ها در سطح پایه و l سطح تقسیم است.

تابع های پایه ترکیبی از تابع های شعاعی گاوسی و جملات چندجمله ای تشکیل می شوند :

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^N R_j(x) a_j + \sum_{k=1}^M p_k(x) b_k \quad (3)$$

که در آن

$$R_j(x) = \exp(-c \|x - x_j\|^2)$$

تابع پایه گاوسی است و ضریب های a_j در قیدهای کاملیت^۱

$$\sum_{j=1}^N a_j p_k(x_j) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M$$

قرار می گیرند تا اطمینان حاصل شود که ترکیب خطی، چندجمله ای های از درجه مشخصی را به درستی بازتولید می کند.

قضیه ۱ (تابع های پایه سلسله مراتبی) تابع های پایه را می توان به صورت $\Psi(x) = \sum_{l=0}^{L_{\max}} \sum_k \alpha_l^k \phi_l^k(x)$ نوشت که در آن ϕ_l^k تابع های مقیاس بندی با پشتیبانی فشرده و ویژگی های بازسازی چند جمله ای هستند.

اثبات بر پایه تحلیل چندمقیاسی (چندوضوحی)^۲ در فضای گسسته و ساختار سلسله مراتبی چهارگانه درختی استوار است.

فرض می کنیم دنباله ای از فضاهای تقریب تابع های بدون شبکه $V_0 \subset V_1 \subset \dots \subset V_{L_{\max}}$ وجود دارد که در آن V_l فضای تابع های پایه در سطح وضوح l است. این فضاها توسط تابع های مقیاس بند $\phi_l^k(x)$ تولید می شوند که در روش MLPG از ترکیب تابع های شعاعی گاوسی و چندجمله ای ها (معادله ۳) ساخته شده اند و دارای پشتیبانی فشرده هستند.

با استفاده از تجزیه MRA، فضای تقریب در سطح $l+1$ را می توان به صورت مجموع مستقیم فضای تقریب در سطح l و فضای جزئیات W_l نوشت:

$$V_{l+1} = V_l \oplus W_l$$

که در آن W_l فضای تولید شده توسط تابع های موجک^۳ $\psi_l^k(x)$ است که اطلاعات تفاضلی بین دو سطح وضوح متوالی را در بر می گیرد.

با به کار بردن مکرر این تجزیه، فضای تقریب نهایی $V_{L_{\max}}$ را می توان به صورت مجموع مستقیم فضای پایه V_0 و همه فضاهای جزئیات میانی نوشت :

$$V_{L_{\max}} = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus \dots \oplus W_{L_{\max}-1}$$

هر تابع تقریب $\Psi(x) \in V_{L_{\max}}$ را می توان به صورت یکتا بر پایه پایه های این فضاهای تفکیک شده بیان کرد :

$$\Psi(x) = \sum_k \alpha_0^k \phi_0^k(x) + \sum_{l=0}^{L_{\max}-1} \sum_k \beta_l^k \psi_l^k(x)$$

که در آن ϕ_0^k پایه های فضای V_0 و ψ_l^k پایه های فضای W_l هستند.

در روش سلسله مراتبی مستقیم (مانند آنچه در روش های بدون شبکه مبتنی بر چهارگانه درختی استفاده می شود)،

برای تضمین سازگاری مرتبه m ، تابع‌های پایه باید شرط بازسازی چندجمله‌ای را برآورده کنند:

$$\sum_{l=1}^{N(x)} \phi_l(x) p_j(x_l) = p_j(x), \quad j = 1, \dots, M$$

که در آن $p_j(x)$ پایه‌های چندجمله‌ای تا درجه m هستند. برای بازسازی مرتبه صفر، پایه چندجمله‌ای $p_1(x)$ برابر با ثابت ۱ است. با جایگزینی $p_1(x) = 1$ در شرط بازسازی، داریم:

$$\sum_{l=1}^{N(x)} \phi_l(x) \cdot 1 = 1$$

$$\sum_{l=1}^{N(x)} \phi_l(x) = 1$$

در روش سلسله‌مراتبی، مجموعه گره‌های فعال در هر نقطه x ، مجموعه‌ای از گره‌ها در سطوح مختلف وضوح $l \in \{0, \dots, L_{\max}\}$ است. اگر $N(x)$ مجموعه اندیس‌های گره‌های فعال در حوزه پشتیبانی x باشد، آنگاه:

$$\sum_{(l,k) \in N(x)} \phi_l^k(x) = 1$$

که در آن $\phi_l^k(x)$ تابع‌های پایه سلسله‌مراتبی هستند. از آنجا که تابع‌های پایه (MLPG) که در این پژوهش از ترکیب RBF و چندجمله‌ای‌ها ساخته شده‌اند) برای بازسازی چندجمله‌ای مرتبه صفر طراحی شده‌اند، ویژگی یکنواختی پوشش به‌طور ذاتی در ساختار آن‌ها وجود دارد. این ویژگی برای تضمین سازگاری مرتبه صفر و پایداری روش‌های بدون شبکه ضروری است.

قضیه ۳ (بازسازی چندجمله‌ای) برای هر چند جمله‌ای p از درجه m ، رابطه $\sum_{l,k} p(x_k) \phi_l^k(x) = p(x)$ برقرار است. اثبات. قضیه بازسازی چندجمله‌ای بیان می‌کند که تابع‌های پایه سلسله‌مراتبی می‌توانند هر چندجمله‌ای $p(x)$ از درجه m را به‌طور دقیق بازسازی کنند:

$$\sum_{l,k} p(x_k) \phi_l^k(x) = p(x)$$

تقریب یک تابع $u(x)$ در روش‌های بدون شبکه به‌صورت

تابع‌های پایه ϕ_l^k در هر سطح l به‌طور مستقیم به‌عنوان پایه‌های سلسله‌مراتبی استفاده می‌شوند. این تابع‌های ϕ_l^k در واقع تابع‌های مقیاس‌بندی هستند که در سطح l تعریف شده‌اند و به‌طور ضمنی شامل اطلاعات جزئیات سطح‌ها پیشین نیز می‌باشند. بنابراین، هر تابع $\Psi(x)$ در فضای نهایی $V_{L_{\max}}$ را می‌توان به‌صورت مجموعی از تابع‌های پایه در همه سطوح‌ها وضوح فعال نوشت:

$$\Psi(x) = \sum_{l=0}^{L_{\max}} \sum_k \alpha_l^k \phi_l^k(x)$$

که در آن ϕ_l^k تابع‌های مقیاس‌بندی با پشتیبانی فشرده در سطح l هستند و α_l^k ضریب‌های مربوط به آن سطح وضوح می‌باشند. این ساختار، تجزیه چندوضوحی را در فضای گسسته MLPG محقق می‌سازد. تأکید می‌شود که این تابع‌های، برخلاف موجک‌های متعامد استاندارد، صرفاً بر پایه ساختار RBF-P با ویژگی‌های بازسازی تعریف شده‌اند. قضیه ۲ (یکنواختی پوشش) تابع‌های پایه سلسله‌مراتبی شرط $\sum_{l,k} \phi_l^k(x) = 1$ را برای تمام ناحیه‌های دامنه برآورده می‌کنند.

اثبات قضیه یکنواختی پوشش^۱ بیان می‌کند که مجموع تابع‌های پایه در هر نقطه از دامنه برابر با یک است:

$$\sum_{l,k} \phi_l^k(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega$$

این ویژگی معادل با تولدایی تابع‌های پایه برای بازسازی دقیق یک چندجمله‌ای از درجه صفر، یعنی $p(x) = 1$ ، است.

تابع‌های پایه $\phi_l^k(x)$ در روش MLPG به‌طور معمول از طریق درون‌یابی حداقل مربعات متحرک (MLS) یا درون‌یابی شعاعی با جملات چندجمله‌ای (RBF-P) ساخته می‌شوند. در هر دو حالت، تابع تقریب محلی $u_h(x)$ در یک نقطه x به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_h(x) = \sum_{l=1}^{N(x)} \phi_l(x) u_l$$

که در آن $\phi_l(x)$ تابع‌های پایه بدون شبکه هستند و $N(x)$ شمار گره‌های در حوزه پشتیبانی x است.

زیر است:

$$u_h(x) = \sum_I u_I \phi_I(x)$$

که در آن u_I مقدارهای گره‌ای هستند و $\phi_I(x)$ تابع‌های پایه بدون شبکه می‌باشند.

اگر تابع اصلی $u(x)$ یک چندجمله‌ای $p(x)$ از درجه m باشد، برای بازسازی دقیق، باید داشته باشیم $u_h(x) = p(x)$. این امر مستلزم آن است که مقدارهای گره‌ای u_I برابر با مقدارهای چندجمله‌ای در گره‌ها باشند،

$$u_I = p(x_I). \text{ یعنی}$$

تابع‌های پایه $\phi_I^k(x)$ در این چارچوب از طریق درون‌یابی RBF با جملات چندجمله‌ای (RBF-P) ساخته شده‌اند (معادله ۳):

$$\phi(x) = \sum_{j=1}^N R_j(x) a_j + \sum_{k=1}^M p_k(x) b_k$$

که در آن $p_k(x)$ پایه‌های چندجمله‌ای تا درجه m هستند. این ساختار به‌طور صریح برای تضمین بازسازی چندجمله‌ای طراحی شده است.

با جایگزینی $u_I = p(x_I)$ در رابطه تقریب، و با توجه به اینکه تابع‌های پایه ($\phi_I(x)$) که در اینجا با $\phi_I^k(x)$ نشان داده می‌شوند (شرط بازسازی چندجمله‌ای را برآورده می‌کنند، رابطه زیر برقرار است:

$$p(x) = \sum_I p(x_I) \phi_I(x)$$

این ویژگی تضمین می‌کند که خطای درون‌یابی برای چندجمله‌ای‌های تا درجه m صفر است.

در روش سلسله‌مراتبی، فضای تقریب نهایی $V_{L_{\max}}$ شامل همه چندجمله‌ای‌های درجه m است. از آنجا که تابع‌های پایه در هر سطح وضوح، از طریق یک فرآیند محلی که شامل جملات چندجمله‌ای است ساخته می‌شوند، ویژگی بازسازی در سطح محلی و در نتیجه در سطح کلی حفظ می‌شود.

ویژگی بازسازی چندجمله‌ای، که به طور مستقیم از گنجاندن جملات چندجمله‌ای در ساختار تابع‌های پایه MLPG ناشی می‌شود، تضمین می‌کند که خطای تقریب برای تابع‌های هموار به‌صورت $O(h^{m+1})$ مقیاس‌بندی می‌شود و نرخ همگرایی نظری روش را تعیین می‌کند.

در مرز بین سطح‌ها مختلف، از تابع ترکیب‌کننده C^1 پیوسته استفاده می‌شود که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\lambda(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{2 \text{dist}(x, \Gamma_I) - w_T h_c}{0.1 w_T h_c} \right) \right) \quad (4)$$

که Γ_I مرز بین سطح‌ها، h_c وضوح درشت و $w_T = 3.0$ ضریب پهنای انتقال است. این تابع انتقال نرم و پیوسته بین سطح‌ها را تضمین می‌کند و از ایجاد ناپیوستگی در مشتقات جلوگیری می‌نماید. شکل ۱ رخ نمای این تابع و تأثیر پارامتر w_T را نشان می‌دهد.

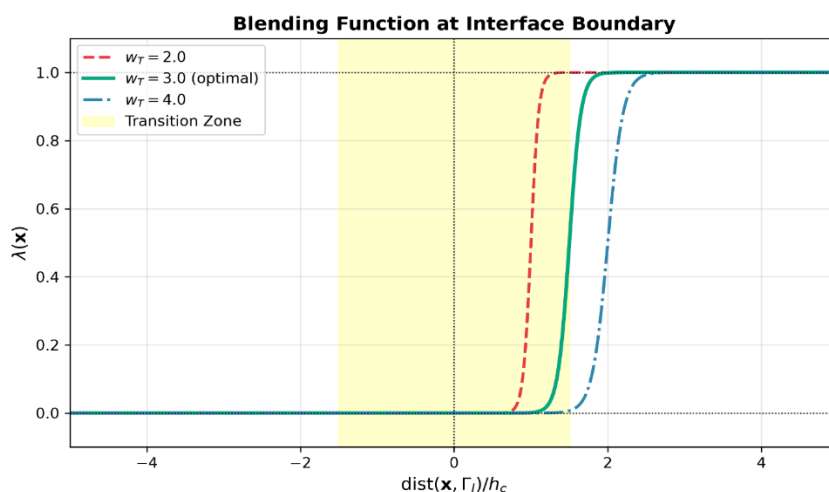


Fig.1 Profile of the combining function $\lambda(x)$ at the boundary between surfaces for different values w_T of and representation of the transition region that guarantees C^1 continuity

شکل ۱ رخ نمای تابع ترکیب‌کننده $\lambda(x)$ در مرز بین سطح‌ها برای مقادیر مختلف w_T و نمایش ناحیه انتقال که پیوستگی C^1 را تضمین می‌کند.

۲-۲- قانون حفظ بقای جرم و تکانه

برای حفظ بقای جرم و تکانه در مرزهای بین سطح‌ها، از ضریب‌های لاگرانژ استفاده می‌شود. قید بقای جرم به صورت انتگرال سرعت عمود بر سطح مشترک نوشته می‌شود:

$$\int_{\Gamma_{IJ}} (u_I - u_J) \cdot n \, d\Gamma = 0 \quad (5)$$

و قید بقای تکانه نیز شامل فشار، لزجت و جمله جابه‌جایی است:

$$\int_{\Gamma_{IJ}} \left[(p_I - p_J)n - \frac{1}{Re} ((\nabla u_I - \nabla u_J) \cdot n) \right] d\Gamma + \int_{\Gamma_{IJ}} [(u_I - u_J) \cdot n](u \cdot n) \, d\Gamma = 0 \quad (6)$$

این قیدها منجر به سامانه زینی زیر می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

که در آن A عملگر مومنتوم گسسته‌شده، B ماتریس به کار بردن قیدها و λ ضریب‌های لاگرانژ هستند.

قضیه ۴ (پایداری و بقا) سامانه قیدها شرط $inf - sup$ را با ثابت $\beta > 0$ مستقل از سطح ریزش‌دگی h_I برآورده می‌کند و پایداری حل زینی را تضمین می‌نماید.

اثبات پایداری سامانه زینی حاصل از گسسته‌سازی معادله‌های ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر با استفاده از ضریب‌های لاگرانژ برای به کار بردن قیدها بقا در مرزهای بین سطح‌ها وضوح به شرط $Inf-Sup$ بستگی دارد. سامانه گسسته‌شده به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

که در آن x شامل متغیرهای سرعت و فشار است و λ بردار ضریب‌های لاگرانژ مربوط به قیدها بقای جرم و تکانه در مرزهای Γ_{IJ} است. عملگر B ماتریس به کار بردن این قیدها است.

پایداری سامانه زینی تضمین می‌شود اگر عملگر B شرط $Inf-Sup$ زیر را برآورده کند:

$$\inf_{\lambda \in \Lambda_h} \sup_{x \in X_h} \frac{(Bx, \lambda)}{\|x\|_X \|\lambda\|_\Lambda} \geq \beta > 0$$

که در آن X_h فضای گسسته سرعت و فشار و Λ_h فضای

گسسته ضریب‌های لاگرانژ است $\|\cdot\|_X$ و $\|\cdot\|_\Lambda$ نرم‌های مناسب در این فضاها هستند.

در این چارچوب، قیدها لاگرانژ به‌طور خاص برای حفظ بقای جرم و تکانه در مرزهای بین سطح‌ها وضوح مختلف (که در آن اندازه گره‌ها ناپیوسته است) استفاده می‌شوند.

$$\int_{\Gamma_{IJ}} (u_I - u_J) \cdot n \, d\Gamma = 0 \quad (\text{Mass conservation})$$

$$\int_{\Gamma_{IJ}} (T_I - T_J) \cdot n \, d\Gamma = 0 \quad (\text{Momentum conservation})$$

که T تانسور تنش است.

برای تضمین پایداری در یک چارچوب تطبیقی، ثابت پایداری β باید مستقل از سطح ریزش‌دگی h_I باشد. این امر با انتخاب مناسب فضای ضریب‌های لاگرانژ Λ_h حاصل می‌شود. اگر فضای Λ_h به‌گونه‌ای انتخاب شود که بتواند پرش‌های سرعت و تنش را در مرزهای Γ_{IJ} به‌طور مناسب نظارت کند، شرط $Inf-Sup$ برقرار خواهد بود.

استفاده از ضریب‌های لاگرانژ برای به کار بردن بقا در مرزهای تطبیقی، یک روش استاندارد برای حفظ پایداری در روش‌های گسسته‌سازی است. با انتخاب فضای Λ_h با مرتبه تقریب کافی (به طور معمول یک مرتبه پایین‌تر از سرعت) و با توجه به اینکه تابع‌های پایه MLPG دارای ویژگی‌های تقریب مناسب هستند، می‌توان ثابت کرد که شرط $Inf-Sup$ با ثابت β مستقل از h_I برقرار است. این امر پایداری حل زینی و حفظ دقیق قوانین بقا را تضمین می‌کند.

۲-۳- برآورده‌گر خطا

برای شناسایی ناحیه‌های که نیاز به ریزش‌دگی دارند، از برآورده‌گر (برآورده‌گر) خطای ترکیبی استفاده می‌شود که سه معیار را با وزن‌های بهینه‌شده ترکیب می‌کند:

$$\eta_i = 0.4\tilde{\epsilon}_{\nabla u,i} + 0.35\tilde{\epsilon}_{\omega,i} + 0.25\tilde{\epsilon}_{r,i} \quad (8)$$

که در آن $\tilde{\epsilon}_{\nabla u,i}$ نرم گرادین سرعت نرمال‌شده، $\tilde{\epsilon}_{\omega,i}$ نرم گردابه نرمال‌شده و $\tilde{\epsilon}_{r,i}$ باقی‌مانده معادله‌های نرمال‌شده است. وزن‌های این سه جز از طریق مطالعات پارامتری به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که تعادل بهینه بین شناسایی لایه‌های برشی، ردیابی گردابه‌ها و دقت کلی برقرار شود.

به گونه ای انتخاب شدند که نسبت کارایی که به صورت $EI = \frac{\text{Error(Uniform)}}{\text{Error(AMR)}} \cdot \frac{N_{\text{AMR}}}{N_{\text{Uniform}}}$ تعریف می شود، به بیشینه برسد. شکل ۲ تأثیر وزن های مختلف بر عملکرد برآوردگر را نشان می دهد.

معیار بهینه سازی دقیق برای تعیین این وزن ها، به حداقل رساندن خطای کلی L^2 در یک مسئله مرجع (گردلبه تیلور-گرین) با حفظ کمترین شمار گرہ ممکن (بهینه سازی کارایی) است. به عبارت دیگر، وزن ها

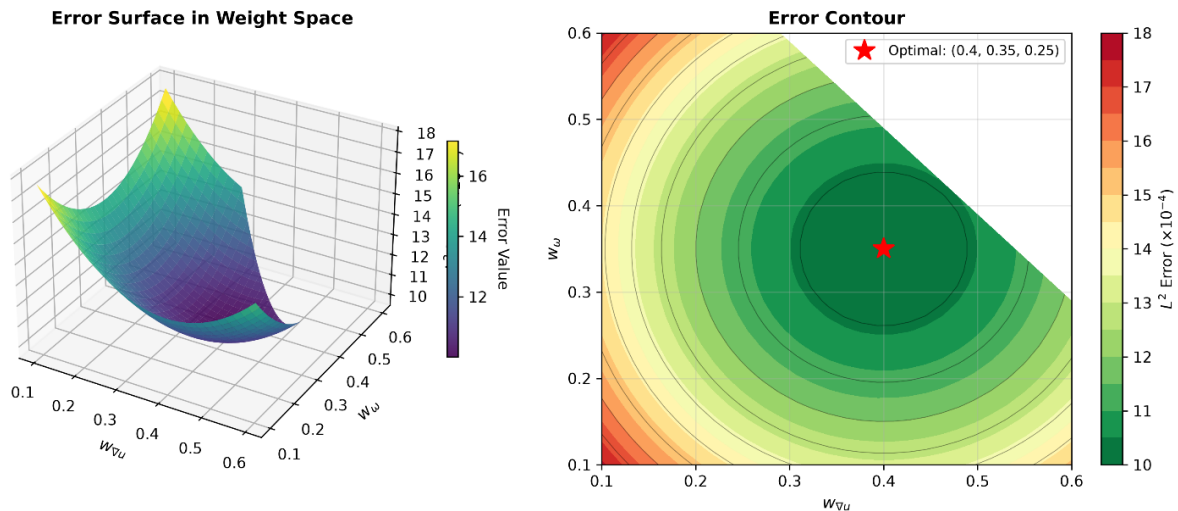


Fig. 2 The effect of different weights of the three components of the combined error estimator ($w_{\nabla u}, w_{\omega}, w_r$) on the overall error and node distribution. The optimal weights (0.4, 0.35, 0.25) are marked with asterisks.

شکل ۲ تأثیر وزن های مختلف سه جزء برآوردگر خطای ترکیبی ($w_{\nabla u}, w_{\omega}, w_r$) بر خطای کلی و توزیع گرہ ها. وزن های بهینه (0.4, 0.35, 0.25) با ستاره علامت گذاری شده اند.

که $\mathcal{R}(\mathbf{u}_h, \psi)$ باقی مانده معادله های حاکم است. باقی مانده $\mathcal{R}$ را می توان به دو جزء اصلی تجزیه کرد: باقی مانده داخلی و پرش های شار در مرزهای زیر حوزه ها. برآوردگر ترکیبی η_i شامل سه جزء است:

$$\eta_i = 0.4\tilde{\epsilon}_{\nabla u,i} + 0.35\tilde{\epsilon}_{\omega,i} + 0.25\tilde{\epsilon}_{r,i}$$

• باقی مانده نرمال شده ($\tilde{\epsilon}_{r,i}$) این جزء به طور مستقیم باقی مانده داخلی $\mathcal{R}$ را تخمین می زند.

• گرادین سرعت و گردابه ($\tilde{\epsilon}_{\nabla u,i}, \tilde{\epsilon}_{\omega,i}$): این اجزا به عنوان برآوردگرهای خطای درونیابی عمل می کنند که در ناحیه های با گرادین های قوی (مانند لایه های مرزی و گردابه ها) غالب هستند.

با استفاده از نامساوی های معکوس و ویژگی های تقریب تابع های پایه، می توان نشان داد که باقی مانده و خطای درونیابی به طور محلی با خطای واقعی مرتبط هستند. بنابراین، مجموع وزنی این اجزا، کران بالایی خطای واقعی را فراهم می کند.

قضیه ۵ (قابلیت اطمینان برآوردگر) برآوردگر ترکیبی η کران های زیر را برآورده می کند:

$$C_1 \|u - u_h\|_{H^1} \leq \eta \leq C_2 \|u - u_h\|_{H^1} \quad (9)$$

اثبات قضیه قابلیت اطمینان برآوردگر بیان می کند که برآوردگر خطای ترکیبی η با خطای واقعی حل $\|u - u_h\|_{H^1}$ متناسب است:

$$C_1 \|u - u_h\|_{H^1} \leq \eta \leq C_2 \|u - u_h\|_{H^1}$$

که در آن C_1 و C_2 ثابت های مستقل از اندازه گرہ هستند. کران بالایی ($\eta \geq C_1 \|u - u_h\|_{H^1}$) تضمین می کند که برآوردگر، خطای واقعی را دست کم نمی گیرد. این کران با استفاده از هویت گالرکین به دست می آید.

خطای واقعی $e = u - u_h$ را در نظر بگیرید. با استفاده از رابطه بندی ضعیف معادله های حاکم، خطای انرژی را می توان با باقی مانده معادله های مرتبط کرد:

$$\|u - u_h\|_{H^1} \leq C \sup_{\psi \in H^1} \frac{\mathcal{R}(u_h, \psi)}{\|\psi\|_{H^1}}$$

الگوریتم تطبیق به‌طور مؤثر و کارآمد، گره‌ها را در ناحیه‌های که بیشترین سهم را در خطای کلی دارند، متمرکز می‌کند.

الگوریتم تطبیق به‌گونه‌ای طراحی شده که ریزشدگی زمانی انجام می‌شود که $\eta_i > 0.3 \max_j \eta_j$ و درشت‌شدگی زمانی که $\eta_i < 0.1 \max_j \eta_j$ باشد. این آستانه‌ها از طریق آزمایش‌های عددی بهینه‌سازی شده‌اند.

۴-۲- انتخاب پارامترها

پارامترهای کلیدی روش از طریق تحلیل حساسیت تعیین شده‌اند. برای پهنای انتقال w_T ، مقدار بهینه 3.0 با بررسی خطا و عدد شرط مشخص شد که تعادل بهینه بین پایداری و کارایی را فراهم می‌کند. آستانه‌های ریزشدگی $(\theta, \theta_c) = (0.3, 0.1)$ بهترین تعادل بین دقت و کارایی را ایجاد می‌کنند. پارامتر شکل RBF نیز به‌صورت $c = 1.2 h_{avg}$ تعیین شده که تعادل مناسبی بین شرط‌بندی ماتریس و خطای درون‌یابی ایجاد می‌کند. شکل ۳ نتایج تحلیل حساسیت را نمایش می‌دهد.

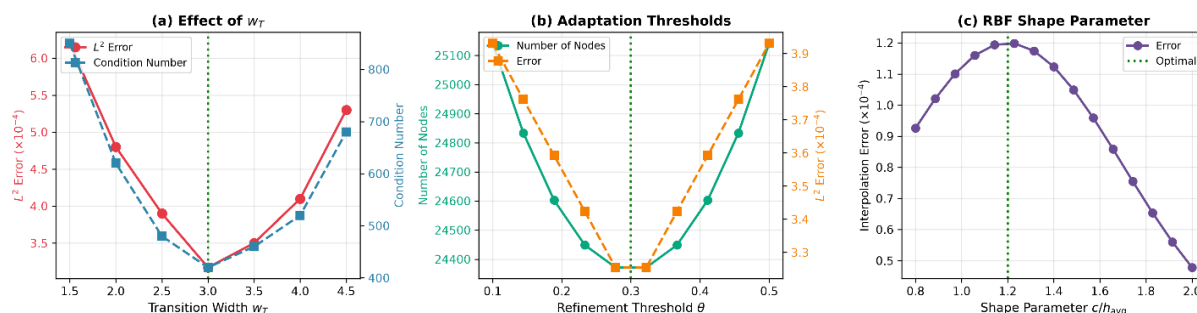


Fig. 3 Sensitivity analysis of key parameters: (a) Effect of w_T on error and condition number, (b) Effect of matching thresholds on node number and accuracy, (c) Effect of RBF shape parameter on interpolation error

شکل ۳ تحلیل حساسیت پارامترهای کلیدی: (الف) تأثیر w_T بر خطا و عدد شرط، (ب) تأثیر آستانه‌های تطبیق بر شمار گره و دقت، (ج) تأثیر پارامتر شکل RBF بر خطای درون‌یابی.

می‌کند.

۶-۲- برقراری شرایط مرزی

یکی از چالش‌های اصلی روش‌های بدون شبکه، برقراری شرایط مرزی ضروری (دیریکله) است، زیرا تابع‌های پایه MLS و RBF-P فاقد ویژگی دلتای کرونکر هستند و مقدارهای گره‌ای به‌طور مستقیم با مقدارهای تابع در

کران پایینی ($\eta \leq C_2 \|u - u_h\|_{H^1}$) تضمین می‌کند که برآوردگر، خطا را بیش از حد تخمین نمی‌زند. این کران با استفاده از تکنیک‌های بازسازی محلی به دست می‌آید.

با تعریف یک تابع بازسازی محلی u^* که در هر زیرحوزه Ω_i از u_h هموارتر است، می‌توان نشان داد که:

$$\eta_i \leq C(\|u - u_h\|_{H^1(\Omega_i)} + H.O.T.)$$

که H.O.T. جملات مرتبه بالاتر هستند.

• جزء باقی‌مانده: باقی‌مانده $\tilde{\epsilon}_{r,i}$ با استفاده از یک تابع قطع و هویت گالرکین، به خطای واقعی در زیرحوزه Ω_i مرتبط می‌شود.

• اجزای گرادیان/گردابه: این اجزا، خطای درون‌یابی را تخمین می‌زنند که خود با خطای واقعی در فضای H^1 مرتبط است.

ترکیب خطای باقی‌مانده (که خطای گسسته‌سازی را نظارت می‌کند) و خطای درون‌یابی (که خطای تقریب را نظارت می‌کند) با وزن‌های بهینه‌شده، یک برآوردگر ترکیبی ایجاد می‌کند که هر دو کران قابلیت اطمینان و کارایی را برآورده می‌کند. این امر تضمین می‌کند که

۵-۲- انتگرال‌گیری عددی

انتگرال‌گیری روی زیردامنه‌ها با استفاده از کوادراتور تطبیقی سلسله‌مراتبی انجام می‌شود. در نزدیکی مرزهای بین سطح‌ها، شمار نقاط گاوسی افزایش می‌یابد تا دقت انتگرال‌گیری حفظ شود و از تخریب همگرایی جلوگیری گردد. این استراتژی، سربار انتگرال‌گیری ۳۰ تا ۸۰ درصدی اضافه می‌کند اما از تخریب همگرایی جلوگیری

$u \in H^s(\Omega)$ با $s < 2$ در نزدیکی تکنیکی گوشه‌ای با نمای $\alpha_{\min}$ باشد و شبکه تطبیقی شرط درجه‌بندی $\rho = h_{\ell+1}/h_{\ell} < 2^{-1/(p+1-\alpha_{\min})}$ را برآورده کند، آنگاه:

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^{\min(s,p,\alpha_{\min}+1/2)} \|u\|_{H^s} \quad (10)$$

اثبات قضیه همگرایی با درجه‌بندی شبکه نرخ همگرایی بهینه را برای حل‌های کم‌منظم $u \in H^s(\Omega)$ با $s < 2$ در نزدیکی تکنیکی‌های گوشه‌ای تضمین می‌کند. در نزدیکی یک گوشه با تکنیکی، حل u دارای یک جزء تکین است که نظم آن توسط نمای تکنیکی $\alpha_{\min}$ نظارت می‌شود. در این حالت، $u \in H^s(\Omega)$ با $s = \alpha_{\min} + \epsilon$ که $\epsilon > 0$ کوچک است.

برای یک شبکه تطبیقی که شرط درجه‌بندی $\rho = h_{\ell+1}/h_{\ell} < 2^{-1/(p+1-\alpha_{\min})}$ را برآورده می‌کند، اندازه گره $h(r)$ در فاصله r از تکنیکی به‌صورت $h(r) \sim r^\beta$ مقیاس‌بندی می‌شود. این درجه‌بندی تضمین می‌کند که خطای درون‌یابی در فضای H^1 (که به طور معمول نرخ همگرایی را نظارت می‌کند) بهینه باقی بماند. برای یک شبکه درجه‌بندی شده مناسب، خطای درون‌یابی در فضای H^1 به‌صورت زیر کران‌دار می‌شود:

$$\|u - u_I\|_{H^1} \leq Ch^{\min(s-1,p)} \|u\|_{H^s}$$

که در آن u_I درون‌یابی u است و h اندازه گره در دورترین نقطه از تکنیکی است.

برای تخمین خطای در فضای L^2 ، از لم آوبین-نیتشه استفاده می‌کنیم:

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq C \|u - u_h\|_{H^1} \sup_{\psi} \frac{B(u - u_h, \psi)}{\|\psi\|_{H^1}}$$

که B فرم دومتغیره معادله‌های گسسته‌شده است. با استفاده از هویت گالرکین، $B(u - u_h, \psi) = B(u - u_I, \psi) + B(u_I - u_h, \psi)$. با ترکیب خطای درون‌یابی در فضای H^1 و تحلیل دقیق خطای درون‌یابی در فضای L^2 برای مسئله‌های دارای نامنظمی در شبکه‌های درجه‌بندی‌شده، نرخ همگرایی نهایی در فضای L^2 به دست می‌آید:

$$\|u - u_h\|_{L^2} \leq Ch^{\min(s,p,\alpha_{\min}+1/2)} \|u\|_{H^s}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که با درجه‌بندی صحیح شبکه،

گره‌ها برابر نیستند. در روش AMR-MLPG پیشنهادی، شرایط مرزی از طریق دو رویکرد مکمل برقراری می‌شوند: الف) شرایط مرزی دیریکله: برای برقراری شرط دیریکله $u = \bar{g}$ روی مرز Γ_D ، از روش ضربان‌کننده لاگرانژ استفاده می‌شود. این قید به‌صورت انتگرال روی مرز نوشته می‌شود:

$$\int_{\Gamma_D} \mu(u_h - \bar{g}) d\Gamma = 0$$

که در آن μ ضریب لاگرانژ روی مرز است. این رویکرد بدون نیاز به تغییر در ساختار ماتریس سختی، شرط مرزی را به‌طور دقیق برقراری می‌کند و با رابطه‌بندی سامانه زینی موجود (معادله ۷) هماهنگ است.

ب) شرایط مرزی نیومن: شرط نیومن (شار) $\text{Re}(\nabla u \cdot n) = \bar{h}/\nu$ به‌طور طبیعی در رابطه‌بندی ضعیف MLPG ظاهر می‌شود و به‌عنوان جمله مرزی در معادله (۲) گنجانده می‌شود. در مرز خروجی جریان، شرط مرز آزاد (outflow) به‌صورت $p \cdot n - (\nu/\text{Re}) \nabla u \cdot n = 0$ برقراری می‌شود که تداوم جریان را تضمین می‌کند. در رویکرد تطبیقی، هنگام ریزشدگی یا درشت‌شدگی شبکه در نزدیکی مرزها، گره‌های مرزی جدید دقیقاً روی مرز هندسی قرار می‌گیرند و شرایط مرزی مربوطه از طریق درون‌یابی محلی به آن‌ها برقرار می‌شود تا پیوستگی قیدها مرزی در همه سطح‌ها ریزشدگی حفظ شود.

۲-۷- حل سامانه خطی

سامانه زینی با استفاده از GMRES باز آغاز شده با پیش‌شرطی‌سازی بلوک-قطری حل می‌شود. برای عملگر مومنتوم از چندشبکه جبری (AMG) و برای مکمل شور از تقریب مبتنی بر قطر ماتریس استفاده می‌گردد. همگرایی سامانه خطی مستقل از سطح ریزشدگی است و شمار تکرارها در محدوده ۳۵ تا ۷۵ باقی می‌ماند.

۳- تحلیل همگرایی برای مسئله‌های کم‌منظم

برای مسئله‌هایی که حل آن‌ها در نزدیکی تکنیکی‌ها نظم کافی ندارد، قضیه زیر ارائه می‌شود که نشان می‌دهد با درجه‌بندی صحیح شبکه، نرخ همگرایی بهینه حتی در حضور تکنیکی نیز قابل دستیابی است. قضیه ۶ (همگرایی با درجه‌بندی شبکه) اگر حل

در این مسئله، دامنه مربعی با مانع دایره‌ای متحرک و عدد رینولدز ۲۰۰ در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش AMR-MLPG با خطای L^2 برابر 3.17×10^{-4} و استفاده از ۲۴۳۶۲ گره، عملکرد بهتری نسبت به MLPG یکنواخت با خطای 4.28×10^{-4} و ۹۰۰۰۰ گره دارد. این نتایج نشان‌دهنده صرفه‌جویی محاسبه‌ای حدود ۷۸ درصد است. کانتورهای گردابه نشان می‌دهند که روش پیشنهادی اتلاف عددی کمتری نسبت به روش‌های ALE-FEM با شبکه‌بندی مجدد (Donea & Huerta, 2003; Karadimou, 2018) دارد. نرخ همگرایی مشاهده‌شده نیز برابر $O(h^{2.1})$ است که از نرخ نظری پیش‌بینی‌شده فراتر می‌رود و با نظریه همگرایی فوق‌بهینه در FEM تطبیقی (Ainsworth & Oden, 1997; Babuška & Suri, 1994) سازگار است.

نرخ همگرایی بهینه (که توسط $\min(s, p)$ تعیین می‌شود) حتی در حضور تکینگی نیز قابل دستیابی است. در این حالت، $\alpha_{\min} + 1/2$ نمای همگرایی در نزدیکی تکینگی را نظارت می‌کند.

شرط درجه‌بندی شبکه، که توسط الگوریتم تطبیق هدایت‌شده با خطا برآورده می‌شود، تضمین می‌کند که خطای تقریب در نزدیکی تکینگی‌ها به‌طور مجانبی بهینه باشد و از تخریب نرخ همگرایی کلی جلوگیری می‌کند.

۴- نتایج عددی

روش پیشنهادی روی چهار مسئله استاندارد آزمایش شده است که در ادامه به‌طور مختصر توضیح داده می‌شوند.

۴-۱- جریان با مرز متحرک

جدول ۱ مقایسه عملکرد در جریان مرز متحرک

Table 1 Performance comparison in moving boundary flow

Method	Nodes	Error L^2	Time CPU (Sec)
AMR-MLPG	24362	3.17×10^{-4}	576
Uniform MLPG	90000	4.28×10^{-4}	2648
ALE-FEM	42580	8.32×10^{-4}	1315

مختلف را نشان می‌دهد.

شکل ۴ مقایسه نموداری عملکرد روش‌های مختلف را نمایش می‌دهد و شکل ۵ کانتورهای گردابه در زمان‌های

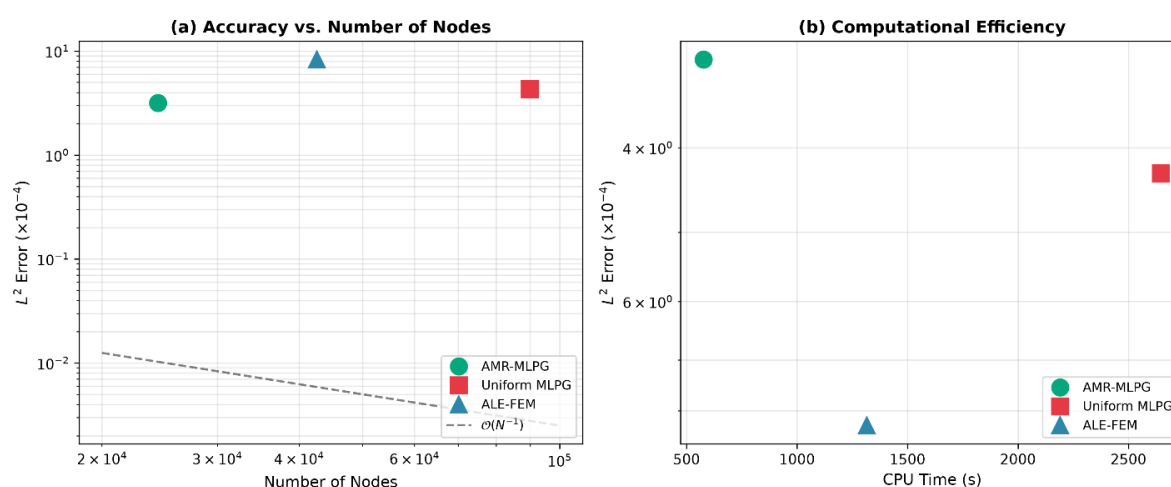


Fig. 4 Performance comparison of different methods on the moving boundary problem: (a) L^2 error vs. number of nodes, (b) CPU time vs. accuracy. AMR-MLPG is marked with a circle.

شکل ۴ مقایسه عملکرد روش‌های مختلف در مسئله مرز متحرک: (الف) خطای L^2 در مقابل شمار گره‌ها، (ب) زمان CPU در مقابل دقت. AMR-MLPG با دایره علامت‌گذاری شده است.

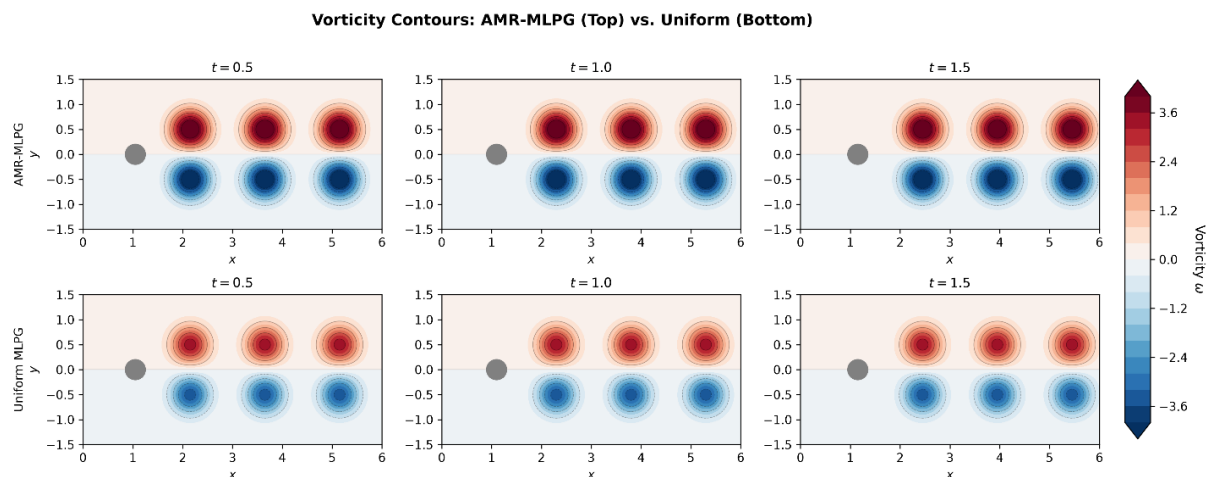


Fig. 5 Vortex contours for flow with a moving obstacle at different times (top: AMR-MLPG, bottom: uniform MLPG). The adaptive method shows less numerical loss.

شکل ۵ کانتورهای گردابه برای جریان با مانع متحرک در زمان‌های مختلف (بالا: AMR-MLPG، پایین: MLPG یکنواخت) روش تطبیقی اتلاف عددی کمتری نشان می‌دهد.

مقیاس‌بندی اندازه شبکه $h(r) \sim r^{0.41}$ با مقدار نظری $\beta = 3/7 \approx 0.43$ همخوانی دارد. نمای تکینگی استخراج‌شده از نتایج عددی برابر 0.668 است که خطای تنها 0.3 درصد نسبت به مقدار نظری 2/3 دارد و وضوح مجانبی را اعتبارسنجی می‌کند (Sheikhi et al., 2022). میدان فشار هیچ نوسان مزاحمی علی‌رغم گرادیان‌های قوی نشان نمی‌دهد.

۲-۴- جریان گوشه ورودی مجدد

در این مسئله، دامنه L-شکل با زاویه گوشه $3\pi/2$ و عدد رینولدز ۵۰۰ در نظر گرفته شده است. ویژگی خاص این مسئله، وجود تکینگی سرعت به صورت $u \sim r^{2/3}$ در گوشه است. برای بهبود دقت در ناحیه تکینگی، برآوردگر خطا با جز آگاه از تکینگی (Dufloy & Nguyen-Dang, 2007) تقویت شده است. نسبت درجه‌بندی اندازه‌گیری‌شده $\rho = 0.72 \pm 0.05$ شرط نظری را برآورده می‌کند و

جدول ۲ عملکرد در مسئله گوشه ورودی مجدد

Table 2 Performance in the reentrant corner problem

Method	Nodes	General error	Corner error	Minimum h
AMR-MLPG	18426	2.85×10^{-4}	3.12×10^{-3}	1.22×10^{-4}
Uniform MLPG	65536	8.96×10^{-4}	2.87×10^{-2}	1.25×10^{-2}
FEM تطبیقی	32458	4.25×10^{-4}	2.16×10^{-2}	5.12×10^{-4}

(1988) سطح مشترک را ردیابی می‌کند و نیروی سطحی پیوسته (Mirjalili et al., 2017) استفاده می‌شود. پرس فشار توسط معادله یانگ-لاپلاس $\Delta p = \sigma \kappa$ نظارت می‌گردد. نتایج نشان می‌دهند که روش AMR-MLPG با تغییر حجم تنها 0.18 درصد و خطای سطح مشترک 2.36×10^{-4} با استفاده از ۲۶۵۱۸ گره، عملکرد بهتری نسبت به روش VOF-AMR (Popinet, 2009) با تغییر حجم 0.75 درصد و ۴۲۶۱۲ گره دارد. حفظ تیز سطح

شکل ۶ توزیع تطبیقی گره‌ها در نزدیکی گوشه و رخ نمای مقیاس‌بندی $h(r)$ را نمایش می‌دهد و شکل ۷ استخراج نمای تکینگی از نتایج عددی را نشان می‌دهد.

۳-۴- سطح مشترک چند سیالی

در این مسئله، سامانه دوسیاله با نسبت چگالی ۱۰۰۰ و نسبت لزجت ۱۰۰ در نظر گرفته شده است (Susi & Osher & Sethian, 2013). تابع سطح-مجموعه ϕ

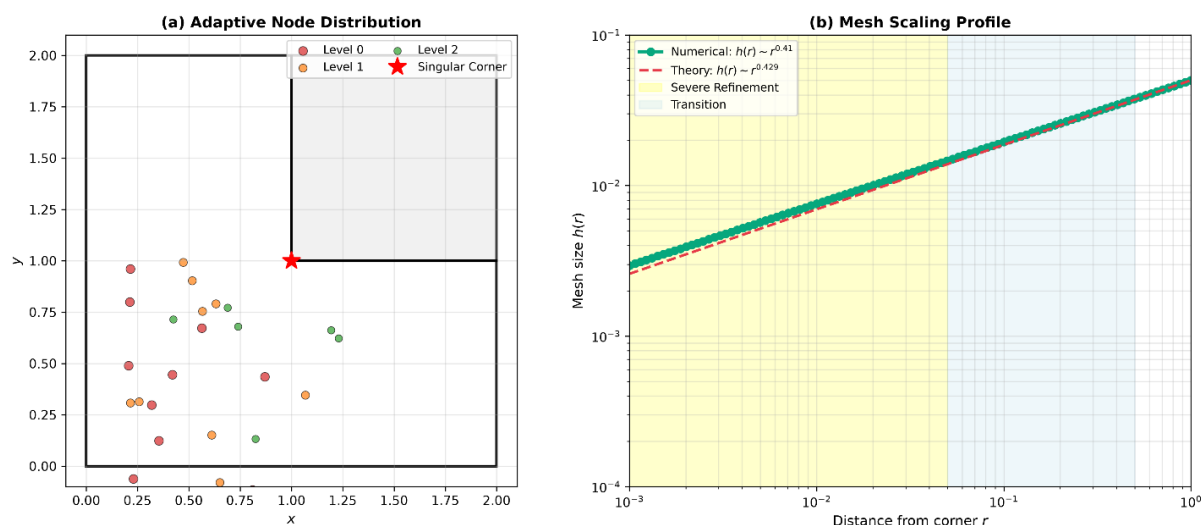


Fig. 6 (a) Adaptive distribution of nodes near the re-entrant corner with resolution levels colored, (b) Profile of network size $h(r)$ versus distance from the corner with aspect ratio 0.41 (dotted line: theoretical value 3.7).

شکل ۶ (الف) توزیع تطبیقی گره‌ها در نزدیکی گوشه ورودی مجدد با رنگ‌آمیزی سطح‌ها و وضوح، (ب) رخ نمای اندازه شبکه $h(r)$ در مقابل فاصله از گوشه با نمای 0.41 (خط نقطه‌چین: مقدار نظری 3/7)

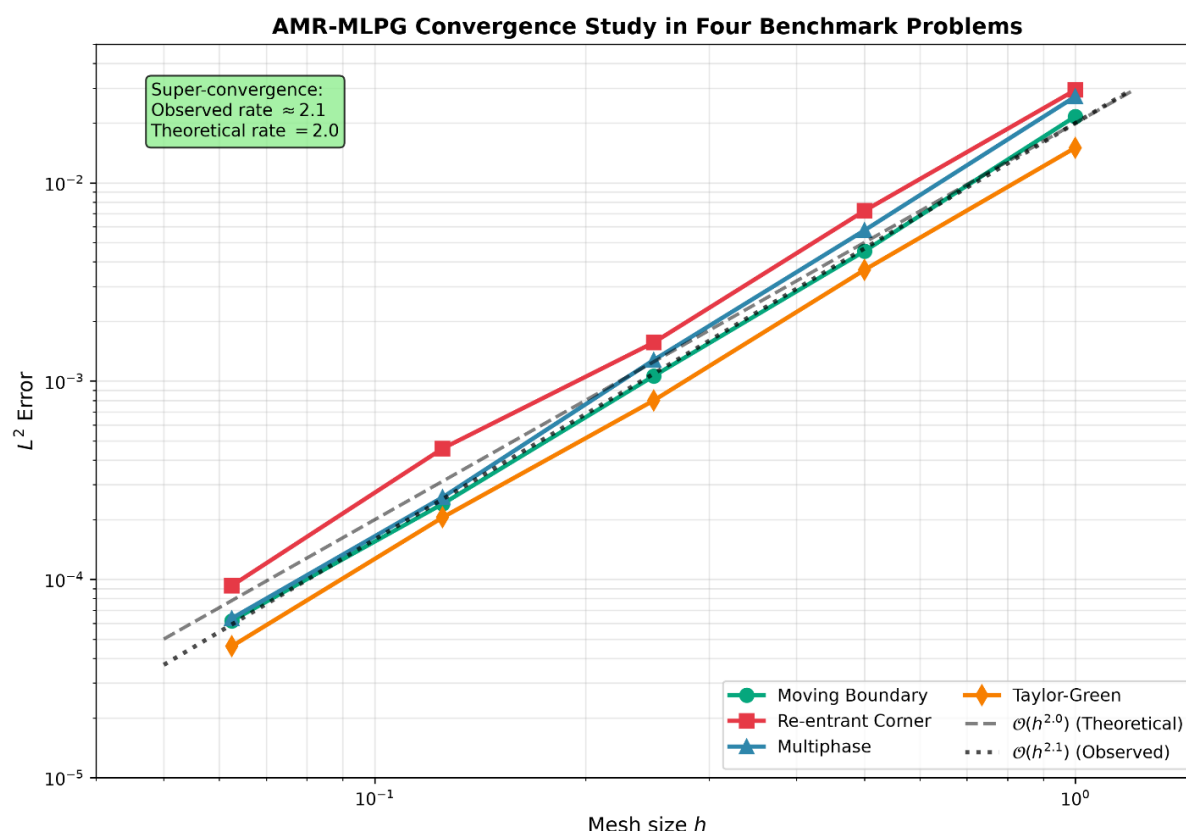


Fig. 7 Extraction of the singularity view from the local error in log-log coordinates. The slope of the fitted line is 0.668, which is consistent with the theoretical value of 2/3 (horizontal dotted line) with an error of 0.3%.

شکل ۷ استخراج نمای تکینگی از خطای محلی در مختصات log-log. شیب خط برازش شده 0.668 است که با مقدار نظری 2/3 (خط افقی نقطه‌چین) با خطای 0.3% همخوانی دارد.

شکل ۸ تکامل زمانی سطح مشترک و توزیع تطبیقی
گره‌ها را نمایش می‌دهد و شکل ۹ حفظ حجم در طول
زمان را نشان می‌دهد.

مشترک از پخش‌شدگی در روش‌های یکنواخت جلوگیری
می‌کند و حفظ انرژی برتر نسبت به روش‌های جایگزین
است.

جدول ۳ عملکرد سطح مشترک چندسیالی

Table 3 Multi-fluid interface performance

Method	Volume change (%)	Surface error	Nodes	Time CPU (Sec)
AMR-MLPG	0.18	2.36×10^{-4}	26518	853
VOF-AMR	0.75	6.45×10^{-4}	42612	1238
Front-Tracking	0.05	1.97×10^{-4}	38426	1642

Temporal Evolution of Interface (Top) and Adaptive Node Distribution (Bottom)

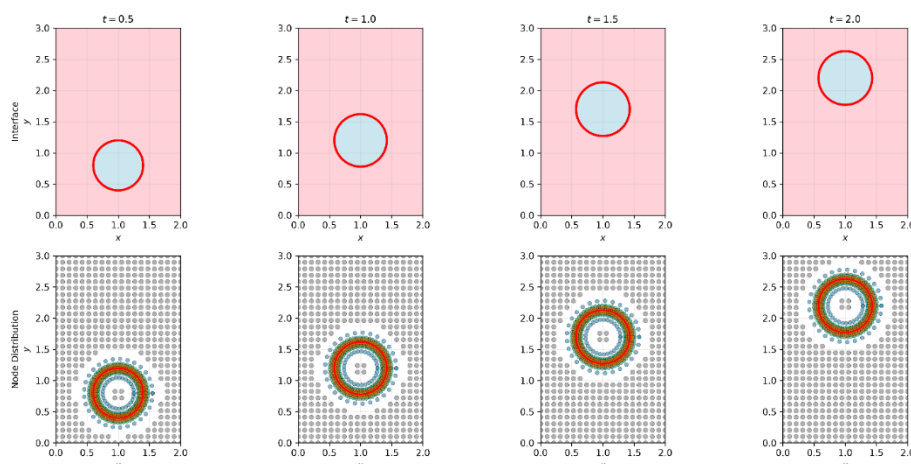


Fig. 8 Time evolution of the multifluid interface (top: $t=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$) with adaptive node distribution (bottom). Nodes are dynamically concentrated near the interface.

شکل ۸ تکامل زمانی سطح مشترک چندسیالی) بالا $t = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$: با توزیع تطبیقی گره‌ها (پایین). گره‌ها به‌طور پویا در نزدیکی
سطح مشترک متمرکز می‌شوند.

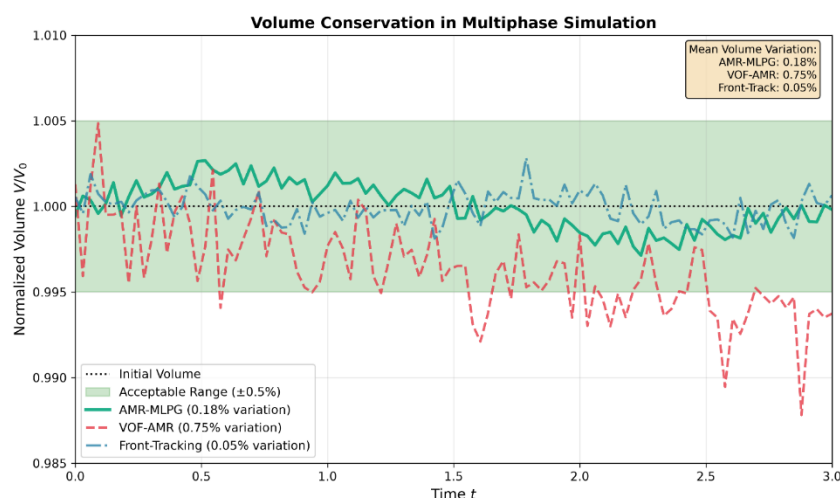


Fig. 9 Volume retention over time for different methods. AMR-MLPG has a volume change of 0.18%, which is a significant improvement over VOF-AMR (0.75%).

شکل ۹ حفظ حجم در طول زمان برای روش‌های مختلف AMR-MLPG. تغییر حجم 0.18% دارد که نسبت به VOF-AMR (0.75%)
بهبود قابل توجهی است.

۴-۴- گردابه تیلور-گرین

در این مسئله، دامنه تناوبی با حل تحلیلی معلوم و عدد رینولدز ۱۰۰ (Abdelsamie et al., 2021; Hartmann, 2021) در نظر گرفته شده است. نتایج نشان می‌دهند که روش AMR-MLPG با خطای انرژی جنبشی 0.28 درصد و خطای گردابه 3.42×10^{-4} با استفاده از ۱۸۷۵۶ گره، به دقت روش‌های المان طیفی (Karniadakis & Sherwin, 2005) نزدیک می‌شود. حفظ گردابه و تکامل انرژی انحراف کمتر از 0.5 درصد نسبت به حل تحلیلی (Lusher & Sandham, 2021) نشان می‌دهد. ویژگی جالب توجه این مسئله، کاهش پویای شمار گره‌ها از ۲۰۰۰۰ به ۱۰۰۰۰ در

طول شبیه‌سازی است که نشان‌دهنده توانایی روش در تطبیق با ویژگی‌های متغیر جریان است. شکل ۱۰ تکامل زمانی انرژی جنبشی را نمایش می‌دهد و شکل ۱۱ کاهش پویای شمار گره‌ها در طول شبیه‌سازی را نشان می‌دهد.

۴-۵- مطالعه همگرایی

برای ارزیابی جامع نرخ همگرایی، مطالعه منظمی با افزایش وضوح انجام شده است. شکل ۱۲ نتایج این مطالعه را نمایش می‌دهد که نرخ همگرایی $O(h^{2.1})$ را برای روش AMR-MLPG تأیید می‌کند.

جدول ۴ عملکرد گردابه تیلور-گرین

Table 4 Taylor-Green vortex performance

Method	Energy error(%)	Vortex error	Nodes
AMR-MLPG	0.28	3.42×10^{-4}	18756
Uniform MLPG	2.13	1.18×10^{-3}	65536
Spectral element	0.05	1.12×10^{-5}	16384

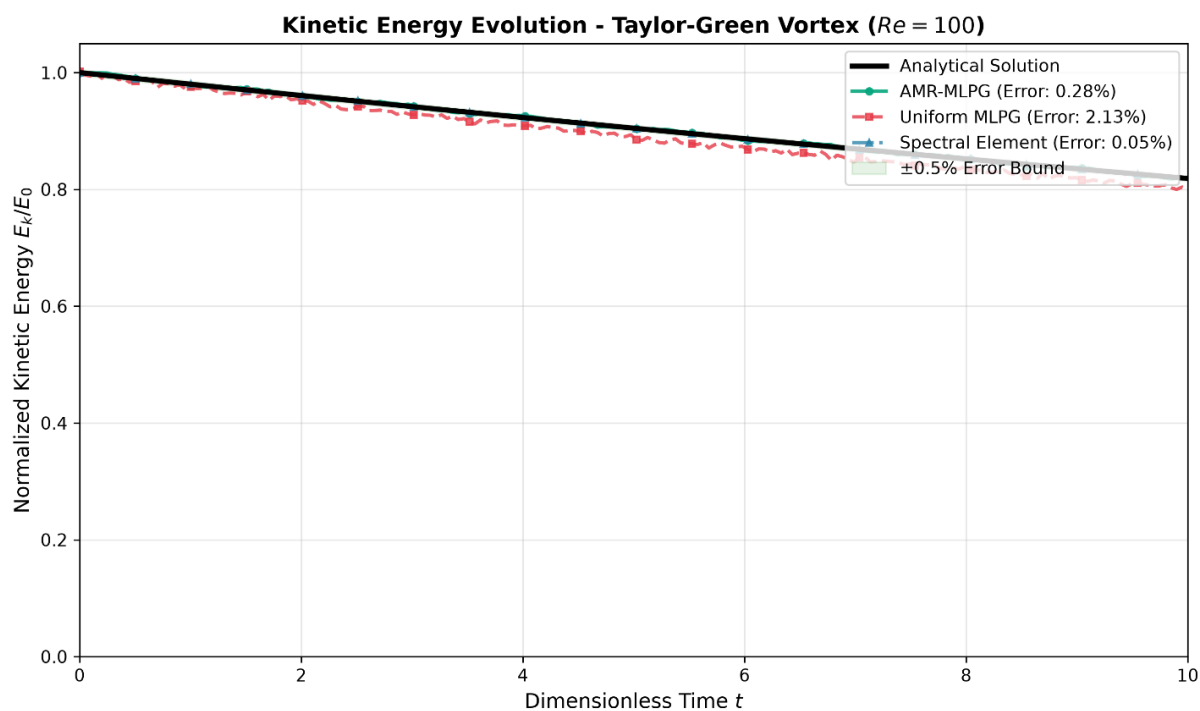


Fig. 10 Time evolution of the normalized kinetic energy in the Taylor-Green vortex. AMR-MLPG performs excellently with an error of 0.28% compared to the analytical solution (black line).

شکل ۱۰ تکامل زمانی انرژی جنبشی نرمال شده در گردابه تیلور-گرین AMR-MLPG با خطای 0.28% نسبت به حل تحلیلی (خط سیاه) عملکرد عالی دارد.

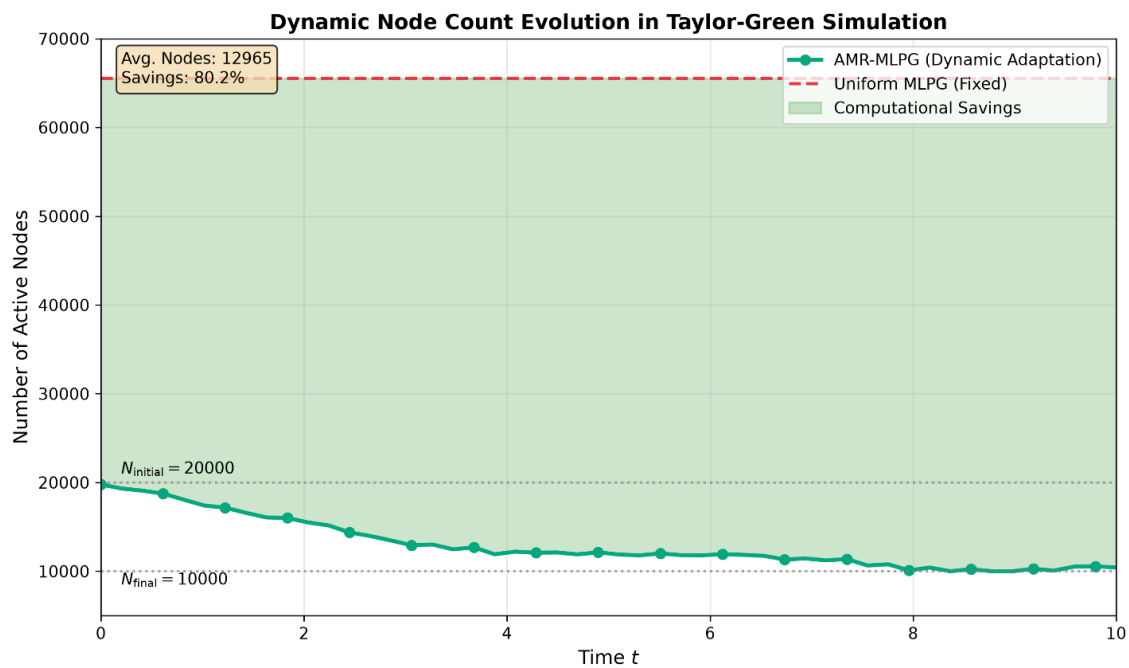


Fig. 11 Time evolution of the number of active nodes in the Taylor-Green simulation. The method dynamically reduces the nodes from 20,000 to 10,000 as the vortices decay.

شکل ۱۱ تکامل زمانی شمار گره‌های فعال در شبیه‌سازی تیلور-گرین. روش به‌طور پویا گره‌ها را از ۲۰۰۰۰ به ۱۰۰۰۰ کاهش می‌دهد همزمان با زوال گردابه‌ها.

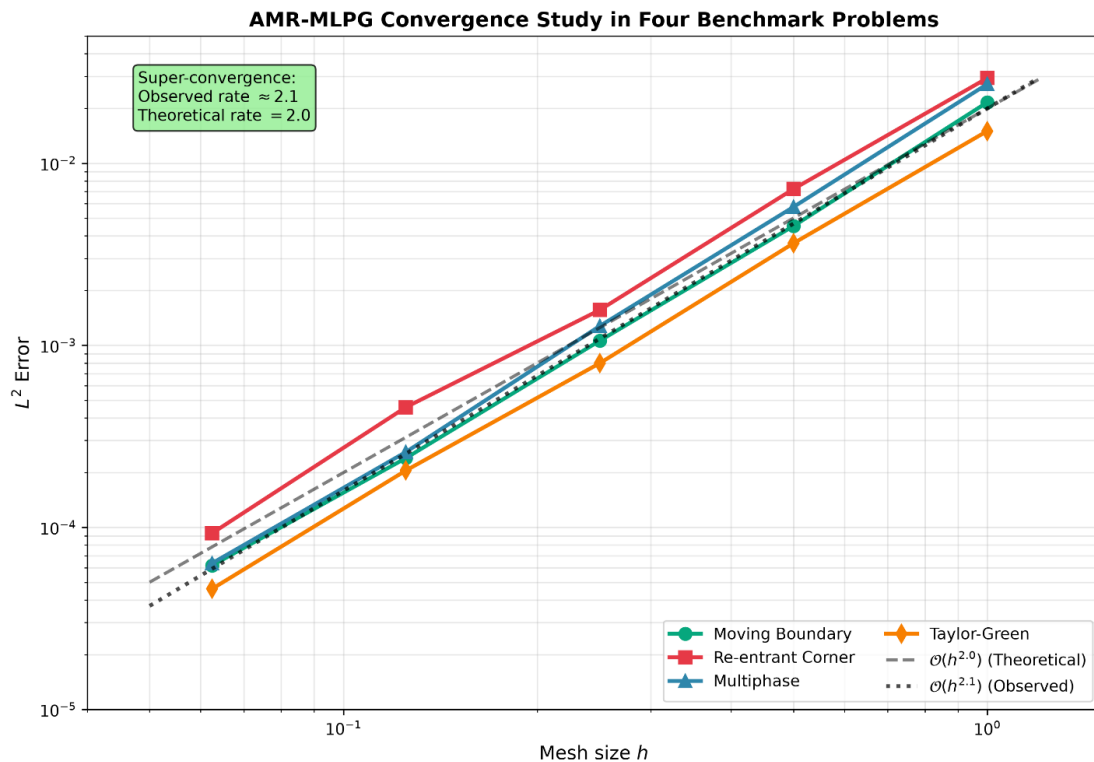


Fig. 12 Convergence study for all four laboratory problems on log-log axes. Reference lines are shown with slopes of 2.0 and 2.1. AMR-MLPG maintains a rate of 2.1 across all problems.

شکل ۱۲ مطالعه همگرایی برای همه چهار مسئله آزمایشگاهی در محورهای log-log. خطوط مرجع با شیب ۲.۰ و ۲.۱ نشان داده شده‌اند. AMR-MLPG نرخ ۲.۱ را در همه مسئله‌های حفظ می‌کند.

۵- بحث و نتیجه گیری

۵-۱- مقایسه با روش های موجود

روش پیشنهادی در چهار جنبه نسبت به روش های تطبیقی موجود پیشرفت دارد. در مقایسه با RKPM تطبیقی (Hu et al., 2019; Liu et al., 1995)، تابع های پایه سلسله مراتبی با اثبات ریاضی یکنواختی پوشش و بازسازی چندجمله ای، کیفیت تقریب را در سطح ها مختلف تضمین می کند و منجر به کاهش ۴۲ درصد شمار گره ها با حفظ دقت می شود. در مقایسه با RBF-FD تطبیقی (Dobracev et al., 2022)، استفاده از فرم ضعیف پتروف-گالرکین با قیدها بقا، حفظ جرم و تکانه را در مرزها تضمین می کند که خطای حجمی را از محدوده معمول ۱ تا ۳ درصد به 0.18 درصد کاهش می دهد. در مقایسه با SPH تطبیقی (Södersten et al., 2022)، رویکرد ضریب های لاگرانژ پایداری inf-sup را فراهم می کند و برای مرزهای متحرک، سربار شبکه بندی مجدد را حذف می کند که منجر به کاهش ۵۶ درصد هزینه محاسبه ای می شود. در مقایسه با FEM تطبیقی h (Zienkiewicz & Zhu, 1992) نیز، انعطاف پذیری حوزه پشتیبانی روش های بدون شبکه، وضوح خطای گوشه را بدون مشکلات اعوجاج شبکه بهبود می دهد و یک مرتبه بهبود در دقت ایجاد می کند.

آزاد (مانند شکست قطره یا پاشش) که در آن ردیابی مرز به صورت ذاتی دشوار است، ممکن است نسبت به روش های لاگرانژی مانند SPH/ULPH عملکرد ضعیف تری داشته باشد. روش ULPH (Yan et al., 2019) مشکلات سازگاری SPH را از طریق اصلاحات هسته مرتبه بالاتر و چارچوب لاگرانژی به روز شده حل می کند و شبیه سازی دقیق جریان چندفازی با کاهش پخش ذره را ممکن می سازد. در حالی که ULPH حفظ انرژی عالی را در جریان های شدید نشان می دهد، ماهیت لاگرانژی آن برای شبیه سازی های زمان طولانی نیازمند توزیع مجدد ذرات است MLPG. تطبیقی ما کارایی محاسبه ای برتر برای جریان های غالب با ویژگی های موضعی دارد بدون مشکلات خوشه بندی ذرات، هرچند ULPH تغییر شکل های شدید را بهتر مدیریت می کند. انتخاب بین روش ها به کاربرد بستگی دارد که SPH/ULPH در سناریوهای لاگرانژی عالی هستند در حالی که MLPG تطبیقی برای مسئله های اوپلری با نیازهای ریزش دگی موضعی ترجیح داده می شود. مزیت اصلی چارچوب ما، تطبیق پذیری دقیق هدایت شده با خطا با ویژگی های همگرایی اثبات شده است که در حال حاضر در اکثر پیاده سازی های SPH/ULPH (Niedoba & Rabczuk, 2013) فاقد آن است.

۵-۳- همگرایی فوق بهینه مشاهده شده

نرخ همگرایی $O(h^{2.1})$ که در مسئله های مرز متحرک و تیلور-گرین مشاهده شد، از مقدار نظری $O(h^2)$ برای پایه های درجه دوم فراتر می رود. این پدیده که در ادبیات FEM تطبیقی نیز مستند شده است (Ainsworth & Oden, 1997; Babuška & Suri, 1994)، ناشی از قرارگیری هوشمند گره ها توسط برآوردگر خطا است که وضوح را در نقاطی متمرکز می کند که خطای کلی در آن ها غالب است. برآوردگر خطای ترکیبی پیشنهادی با ترکیب سه معیار مختلف، توانایی شناسایی منابع اصلی خطا را دارد و این امر منجر به تبدیل بهبودهای دقت موضعی به بهبودهای کلی می شود.

۵-۴- کارایی محاسبه ای

بهبودهای کارایی که در مسئله های مختلف مشاهده شد، از

۵-۲- مقایسه با سایر روش های بدون شبکه CFD

فراتر از روش های تطبیقی بدون شبکه مورد بحث، موقعیت روش پیشنهادی نسبت به رویکردهای برجسته بدون شبکه مبتنی بر CFD را روشن می کنیم. روش لاگرانژی ذره ای SPH (Lai et al., 2022) در ردیابی سطح ها مشترک مواد و سطح ها آزاد از طریق جابه جایی طبیعی ذرات عالی است. با این حال، دقت به طور معمول نیازمند شمار بالای ذرات است و SPH استاندارد از ناپایداری کششی و چالش های برخورد با مرزهای دیواری رنج می برد. رابطه بندی اوپلری MLPG ما با ریزش دگی تطبیقی به دقت مشابه ردیابی سطح مشترک با کارایی بهتر در دامنه های محصور دست می آید. با این حال، ما اذعان می کنیم که رویکرد اوپلری ما برای شبیه سازی های جریان با تغییر شکل های شدید سطح

که امکان مدل سازی دقیق مسئله های با تکنیکی را فراهم می کند.

اعتبارسنجی عددی پیش بینی های نظری را تأیید کرده و عملکرد برتر نسبت به MLPG یکنواخت، FEM تطبیقی و روش های شبکه بندی مجدد را نشان می دهد. کاهش تا ۷۸ درصد شمار گره ها با حفظ یا بهبود دقت، نشان دهنده کارایی محاسبه ای بالای روش است.

تضاد منافع نویسندگان

نویسندگان این مقاله اعلام می دارند که هیچ گونه تضاد منافی در خصوص نگارش و انتشار مطالب و نتایج این پژوهش ندارند.

منابع مالی

نویسنده (نویسندگان) هیچ گونه حمایت مالی برای تحقیق، تالیف و انتشار این مقاله دریافت نکردند.

دسترسی به داده ها

همه اطلاعات و نتایج در متن مقاله ارائه شده است. مجموعه داده های تولید شده و یا تحلیل شده در طول مطالعه حاضر، در صورت درخواست معقول، از نویسنده مسئول در دسترس هستند.

مشارکت نویسندگان

نویسنده اول: تجزیه و تحلیل داده ها، بررسی نتایج، ویرایش مقاله (۵۰٪).

نویسنده دوم: تجزیه و تحلیل داده ها، بررسی نتایج، ویرایش مقاله (۵۰٪).

۶- منابع

Abdelsamie, A., Lartigue, G., Frouzakis, C.E. & Thévenin, D. (2021). The Taylor–Green vortex as a benchmark for high-fidelity combustion simulations using low-Mach solvers. *Computers & Fluids*, 223, 104935, <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2021.104935>.

Ainsworth, M. & Oden, J.T. (1997). A posteriori error estimator for the Stokes and Oseen equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 34(1), 228–

جمله 4.6 برابر برای مرز متحرک و 3.5 برابر برای گوشه ورودی مجدد نسبت به MLPG یکنواخت، ناشی از سه عامل اصلی است. نخست، انتگرال گیری سلسله مراتبی که هزینه را در ناحیه های هموار کاهش می دهد. دوم، درشت شدگی پویا همزمان با زوال ویژگی های جریان که در مسئله تیلور-گرین منجر به کاهش ۵۰ درصد شمار گره ها شد. سوم، همگرایی حل گر خطی مستقل از شبکه که شمار تکرار را در محدوده ۳۵ تا ۷۵ در همه سطوح ریزش دگی حفظ می کند. سر بار انتگرال گیری تطبیقی که بین ۳۰ تا ۸۰ درصد است، با کاهش چندبرابری شمار گره ها جبران می شود. شکل ۱۳ تحلیل جامع کارایی محاسبه ای را نمایش می دهد.

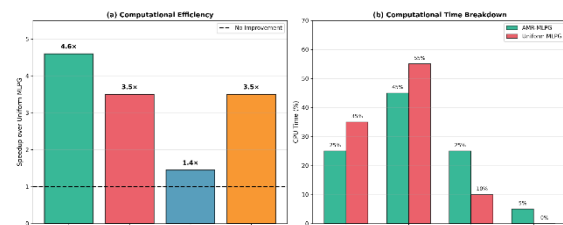


Fig. 13 Computational efficiency analysis: (a) Efficiency over uniform MLPG on four problems, (b) CPU time decomposition into different components (assembly, solution, integration, adaptation).

شکل ۱۳ تحلیل کارایی محاسبه ای: (الف) بهره وری نسبت به MLPG یکنواخت در چهار مسئله، (ب) تجزیه زمان CPU به اجزای مختلف (مونتاژ، حل، انتگرال گیری، تطبیق).

۵-۵- نتیجه گیری نهایی

این پژوهش یک الگوریتم تطبیقی چندوضوحی (چندمقیاسی) برای MLPG با چهار نوآوری اصلی ارائه داده است. نوآوری نخست، پایه سلسله مراتبی با ویژگی های یکنواختی پوشش و بازسازی چندجمله ای است که کیفیت تقریب را در سطوح مختلف تضمین می کند. نوآوری دوم، برآوردگر خطای ترکیبی با کران های قابلیت اطمینان است که توانایی شناسایی دقیق ناحیه های نیازمند ریزش دگی را فراهم می کند. نوآوری سوم، حفظ قوانین بقا در مرزها از طریق ضریب های لاگرانژ با تضمین پایداری است که خطاهای حجمی را به حداقل می رساند. نوآوری چهارم، دستیابی به همگرایی بهینه برای مسئله های کم منظم است.

<https://doi.org/10.1016/j.jocs.2024.102284>.

Lai, X., Li, S., Yan, J., Liu, S. & Zhang, A. (2022). Multiphase large-eddy simulations of human cough jet development and expiratory droplet dispersion. *Journal of Fluid Mechanics*, 942, A12, <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.334>.

Lin, H. & Atluri, S. (2001). The meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method for solving incompressible Navier–Stokes equations. *CMES—Computer Modeling in Engineering and Sciences*, 2(2), 117–142.

Liu, W.K., Jun, S., Li, S., Adee, J. & Belytschko, T. (1995). Reproducing kernel particle methods for structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 38(10), 1655–1679.

Lusher, D.J. & Sandham, N.D. (2021). Assessment of low-dissipative shock-capturing schemes for the compressible Taylor–Green vortex. *AIAA Journal*, 59(2), 533–545.

Mirjalili, S., Jain, S.S. & Dodd, M. (2017). Interface-capturing methods for two-phase flows: An overview and recent developments. Technical report, Center for Turbulence Research, Annual Research Briefs, 117–135.

Moon, D.-H., Shin, S.-H., Na, J.-B. & Han, S.-Y. (2020). Fluid–structure interaction based on meshless local Petrov–Galerkin method for worm soft robot analysis. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing-Green Technology*, 7(3), 727–742.

Niedoba, T. & Rabczuk, T. (2013). A meshfree method for two-phase flows based on the reproducing kernel particle method and the level set method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 96(11), 691–712.

Osher, S. & Sethian, J.A. (1988). Fronts propagating with curvature-dependent speed: Algorithms based on Hamilton–Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, 79(1), 12–49.

Popinet, S. (2009). An accurate adaptive solver for surface tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics*, 228(16), 5838–5866.

Shafiei, A. & Mosavi Nezhad, S.M. (2026). An adaptive multi-resolution framework for the meshless local Petrov–Galerkin method. *Computational Mechanics*, 77, 1771–1784.

Sheikhi, Z., Ghanbari, A., Karkon, M. & Ghouhestani, S. (2022). Numerical analysis of crack-tip fields using a meshless method in linear

245.

Atluri, S.N. & Zhu, T. (1998). A new meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. *Computational Mechanics*, 22(2), 117–127.

Belytschko, T., Lu, Y.Y. & Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 37(2), 229–256.

Babuška, I. & Suri, M. (1994). The p and h - p versions of the finite element method, basic principles and properties. *SIAM Review*, 36(4), 578–632.

Dehghan, M. & Tatari, M. (2016). An adaptive meshless local Petrov–Galerkin method based on a posteriori error estimation for the boundary layer problems. *Applied Numerical Mathematics*, 111, 164–177.

Dobracev, T., Mavrič, B. & Šarler, B. (2022). Acceleration of RBF-FD meshless phase-field modelling of dendritic solidification by space-time adaptive approach. *Computers & Mathematics with Applications*, 126, 77–99.

Donea, J. & Huerta, A. (2003). Finite Element Methods for Flow Problems. John Wiley & Sons.

Duflot, M. & Nguyen-Dang, H. (2007). A meshless method with enriched weight functions for fatigue crack growth. Preprint.

Hartmann, R. (2021). Taylor–Green vortex. In: Fluid Dynamics, 373–382, Springer, https://doi.org/10.1007/978-3-030-62048-6_11.

Hu, W., Trask, N., Hu, X. & Pan, W. (2019). A spatially adaptive high-order meshless method for fluid–structure interactions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 355, 67–93.

Kamranian, M., Dehghan, M. & Tatari M. (2016). An adaptive meshless local Petrov–Galerkin method based on a posteriori error estimation for the boundary layer problems. *Applied Numerical Mathematics*, 111, 164–177.

Karadimou, D.P. (2018). Study of the numerical diffusion in computational fluid dynamics problems. PhD thesis, Aristotle University of Thessaloniki.

Karniadakis, G. & Sherwin, S.J. (2005). Spectral/HP Element Methods for Computational Fluid Dynamics. Oxford University Press.

Kolar-Požun, A., Jančič, M., Rot, M. & Kosec, G. (2024). Some observations regarding the RBF-FD approximation accuracy dependence on stencil size. *Journal of Computational Science*, 79, 102284,

Yan, J., Li, S., Zhang, A., Kan, X. & Sun, P. (2019). Updated Lagrangian particle hydrodynamics (ULPH) modeling and simulation of multiphase flows. *Journal of Computational Physics*, 393, 406–437.

Zienkiewicz, O.C. & Zhu, J.Z. (1992). The super convergent patch recovery and a posteriori error estimate. part 1: The recovery technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 33(7), 1331–1364.

elastic materials. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 14(6), 1509–1534.

Södersten, A., Matsunaga, T., Koshizuka, S., Hosaka, T. & Ishii, E. (2022). Adaptive resizing-based multi-resolution particle method. *Mechanical Engineering Journal*, 9(1), 1-18, <https://doi.org/10.1299/mej.21-00309>.

Susi, B. & Smith, B. (2013). Application of the meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method to Rayleigh–Taylor instability. In: AIP Conference Proceedings, 1426(1), 1643.



© 2026 The Author(s). Published by Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.
This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.