

# Experimental Study of the Equivalent Coefficients of the Forschheimer Equation in Vertical non-homogeneous Media of non-Darcy Flow in Gravel Materials

H. Azizkhani<sup>1</sup>, J. Bazargan<sup>2</sup>, A. Sadri<sup>3</sup>

1- Post Graduate of Hydraulic Structures, Department of Civil Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

2- Associate Professor, Department of Civil Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

3- M.Sc. student in Architectural Engineering, Faculty of Architecture and Art, Islamic Azad University Abhar, Zanjan, Iran.

\*Hamidazizkhani@znu.ac.ir

Received: 19 May 2025

Revised: 22 September 2025

Accepted: 9 October 2025

Discussion: 22 June 2026



J. Hydraul.

Iranian Hydraulic Association

Homepage: [www.jhyd.iha.ir](http://www.jhyd.iha.ir)

## Abstract

**Introduction:** The behavior of non-Darcy flow in gravel materials depends on the physical properties of the aggregate, the fluid properties, and the flow characteristics. Non-Darcy flow in inhomogeneous media also depends on the physical properties of each of the components of the said media, and the coefficients of the Forschheimer equation equivalent to the entire inhomogeneous media are a function of the aforementioned coefficients of each of the components of the media.

Due to the large use of aggregate materials in the construction of hydraulic structures, the study of the flow conditions occurring in such structures is one of the most important hydraulic topics at present.

**Methodology:** The present research was conducted in the Hydraulic Laboratory of Zanjan University in a channel with a length of 5 meters, a width of 30 centimeters, and a height of 30 centimeters for three aggregates: fine, medium, and coarse. For this purpose, 30 tests were conducted at different discharge rates for homogeneous conditions and 60 tests at different discharge rates for vertical inhomogeneous conditions.

The Forschheimer equivalent coefficient relationships of the vertical inhomogeneous environment were determined by three different methods. In the first method, the sum of the losses of each of the components of the environment was equal to the total loss of the inhomogeneous environment, in the second method, the friction force values of each of the components were equal to the total friction force, and the third method was estimated as an empirical relationship and developed into different relationships.

**Results and Discussion:** After collecting the laboratory data and comparing the calculated and observed values, the results show that the average error of the coefficient  $a$  in the first, second and third methods respectively was 87.32, 87.91 and 48.41 percent, and the average error of the coefficient  $b$  in the first, second and third methods respectively was 34.78, 32.31 and 33.24 percent. The average relative error of the hydraulic gradient estimated by the first, second and third methods will be 8, 8.77 and 5.7 percent, respectively.

**Conclusion:** The mean relative error (MRE) between the observed and calculated hydraulic gradient values in the vertical inhomogeneous environment for the three methods mentioned respectively are 8 and 8.77 percent for the first and second methods, and 5.70 percent when the relationship presented in this study is used, which results in a 29 and 35 percent improvement in MRE compared to the other two methods, respectively. Also, the studies conducted show that the average errors of the coefficient a in the first and second methods respectively are 87.32 and 87.91, and 48.41 percent when the relationship presented in this study is used, which results in a 38 and 39.5 percent improvement in MRE compared to the other two methods, respectively. Similarly, the average errors of the coefficient b in the first and second methods respectively were 34.78 and 32.31, and in the case of using the relationship presented in this study, it was 33.24 percent, which resulted in an improvement of 1.5 percent compared to the first method, and for the second method, we achieved a desirable result with a difference of 0.9 percent.

**Keywords:** Steady flow, non-Darcy flow, Binomial Equations, hydraulic gradient, inhomogeneous porous media.

**Conflict of Interest:** The authors declared no potential conflicts of interest concerning the research, authorship, and publication of this article.

**Funding:** The authors received no financial support for the research, authorship, and publication of this article.

**Data Availability Statements:** All information and results are presented in the text of the article.

**Authors' contribution:**

**First Author:** Data Analysis, Results Analysis, Paper Writing.

**Second Author:** Results Analysis.

**Third Author:** Paper Writing.

# بررسی آزمایشگاهی ضرایب معادل رابطه فورشهایمر در محیط غیرهمگن عمودی جریان غیرداری در مصالح سنگریزه‌ای

حمید عزیزخانی<sup>۱\*</sup>، جلال بازرگان<sup>۲</sup>، عاطفه صدی<sup>۳</sup>

۱- کارشناسی ارشد مهندسی آب و سازه های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران.

۲- استاد گروه مهندسی عمران، دانشگاه زنجان، زنجان، ایران.

۳- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی معماری، دانشکده معماری و هنر، دانشگاه آزاد اسلامی اهر، زنجان، ایران.

\*Hamidazizkhani@znu.ac.ir

نشریه هیدرولیک

انجمن هیدرولیک ایران

وبگاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir



دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۲۹

بازنگری: ۱۴۰۴/۰۶/۳۱

پذیرش: ۱۴۰۴/۰۷/۱۷

نقد و بررسی: ۱۴۰۵/۰۴/۰۱

**چکیده:** رفتار جریان غیرداری درون مصالح سنگریزه‌ای به مشخصات فیزیکی سنگدانه، خواص سیال و ویژگی‌های جریان بستگی دارد. جریان غیرداری درون محیط‌های غیرهمگن نیز به مشخصات فیزیکی هر یک از اجزاء تشکیل دهنده محیط مذکور وابسته بوده و ضرایب رابطه فورشهایمر معادل کل محیط غیرهمگن، تابعی از ضرایب مذکور هر یک از اجزاء محیط می‌باشد. پژوهش حاضر در آزمایشگاه هیدرولیک دانشگاه زنجان در کانالی به طول ۵ متر و عرض ۳۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر برای سه دانه بندی ریز، متوسط و درشت سنگدانه‌ها انجام شده است. برای این منظور آزمایشات به تعداد ۹۰ مورد در دبی‌های مختلف و شرایط همگن و غیرهمگن عمودی انجام شده است. روابط ضرایب معادل فورشهایمر محیط غیرهمگن عمودی از سه روش مختلف بر پایه رابطه بین سرعت و گرادیان هیدرولیکی تعیین شده است. در روش اول با مساوی قرار دادن مجموع افت‌های هر یک از اجزای محیط با کل افت محیط غیرهمگن، در روش دوم با مساوی قرار دادن مقادیر نیروی اصطکاک هر یک از اجزا با کل نیروی اصطکاک و روش سوم که به صورت رابطه تجربی برآورد گردید و به روابط متفاوتی توسعه داده شده است. از آنجا که رابطه داری فقط در جریان آرام اعتبار دارد، در نتیجه طبق آزمایشات انجام شده در پژوهش حاضر و عدم اعتبار رابطه داری و باتوجه به اینکه محیط درشت دانه می‌باشد، سرعت جریان و عدد رینولدز افزایش یافته و جریان همواره آشفته می‌باشد. بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که میانگین خطای ضریب a در روش‌های اول، دوم و سوم به ترتیب ۸۷/۳۲، ۸۷/۹۱ و ۴۸/۴۱ درصد و میانگین خطای ضریب b در روش‌های اول، دوم و سوم به ترتیب ۳۴/۷۸، ۳۲/۳۱ و ۳۳/۲۴ درصد بوده است. میانگین خطای نسبی گرادیان هیدرولیکی برآورد شده با روش‌های اول، دوم و سوم به ترتیب ۸، ۸/۷۷ و ۵/۷ درصد خواهد بود.

**کلیدواژگان:** جریان ماندگار، جریان غیرداری، رابطه دوجمله‌ای، گرادیان هیدرولیکی، محیط متخلخل غیرهمگن.

## ۱- مقدمه

تحلیل این نوع جریان‌ها و به دست آوردن ویژگی‌های آن‌ها مانند سرعت، دبی، تراز انرژی و سطح آزاد آب؛ از رابطه داری (رابطه ۱) استفاده می‌شود (McWhorter & Sunada, 1977). در محیط متخلخل درشت‌دانه به دلیل وجود منفذهای درشت، سرعت جریان بالا بوده و جریان

در حالت کلی، جریان آب در محیط‌های متخلخل، می‌تواند به دو صورت تشکیل شود. در محیط‌های متخلخل با مصالح ریزدانه مانند خاک رس و سیلت، با توجه به کم بودن سرعت، جریان به طور آرام و لایه‌ای بوده و برای

غیرخطی مانند رابطه (۲) و معادله پیوستگی به شکل رابطه (۴) به دست می‌آید (Bazargan & Bayat, 2003).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

این معادله دیفرانسیلی که به شکل یک معادله دیفرانسیلی جزئی است، جانشین معادله لاپلاس برای تحلیل غیرخطی جریان‌های غیرداریسی به شمار می‌رود. برای تحلیل جریان آشفته، وجود رابطه‌های غیرخطی بسیار ضروری است. در همین راستا پژوهشگرانی از جمله (Stephenson, 1979)، (Ergun, 1952)، (Wilkins, 1956) مدل‌های کاربردی بر پایه ویژگی‌های ظاهری مصالح مانند دانه‌بندی، تخلخل و همچنین ویژگی‌های سیال ارائه داده‌اند. از مدل‌های دقیق می‌توان به مدل (Ward, 1964)، (Ahmed and Sunada, 1969)، (Bazargan, 2002) و (Ghazi-Moradi, 2006) اشاره نمود. بدین صورت که برای برآورد ضریب‌های یادشده شده، همواره نیاز به یک زوج مرتبی از مقدارهای گرادیان هیدرولیکی (i) و سرعت (v) خواهیم داشت و در صورت نبود این مقادرها، ملزم به انجام آزمایش‌های کاربردی در این زمینه خواهیم بود. ضریب‌های رابطه‌های غیرخطی در این روش در حقیقت با برازش منحنی  $i-v$  به دست می‌آیند. همچنین رابطه‌های چندی از جمله رابطه‌های ارائه شده توسط (Sedghi and Rahimi, 2011; Sidiropoulou et al., 2007; Leps 1973; Stephenson, 1979)، برای محاسبه ضریب‌های رابطه دوجمله‌ای a و b در شرایط جریان ماندگار ارائه شده است. (Norouzi et al., 2021) با استفاده از رابطه‌های داریسی ویسباخ، رابطه‌های دوجمله‌ای در حالت جریان ماندگار، رابطه‌های تحلیلی ارائه شده توسط احمد سونادا برای محاسبه ضریب‌های a و b رابطه بین ضریب اصطکاک (f) و عدد رینولدز (Re) در محیط متخلخل، رابطه برای محاسبه ضریب اصطکاک بر مبنای عدد رینولدز ارائه کردند. (Norouzi et al., 2022) با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی در شرایط مختلف و تجزیه و تحلیل ابعادی، رابطه‌ای برای محاسبه عمق جریان خروجی از محیط سنگریزه ارائه کردند. (Hosseini., 1997) با بررسی محیط متخلخل درشت‌دانه همگن افقی در حالت جریان ماندگار و غیرماندگار، رابطه‌هایی را با فرض آرام بودن جریان برای

تمایل به آشفتگی دارد (Hansen et al., 1995) و در این حالت رابطه بین گرادیان هیدرولیکی و سرعت جریان غیرخطی بوده و از قانون غیرداریسی به دو صورت رابطه توانی (رابطه ۲) و رابطه دوجمله‌ای (رابطه ۳) پیروی می‌کند (Forchheimer, 1901; Leps, 1973; Stephenson, 1979).

$$i = \left(\frac{1}{k}\right)^v \quad (1)$$

$$i = mV^n \quad (2)$$

$$i = aV + bV^n \quad (3)$$

که در رابطه‌های بالا V: سرعت جریان (m/s)، k: قابلیت هدایت هیدرولیکی (m/s)، i: گرادیان هیدرولیکی (بدون بعد)، a و b ضریب‌هایی هستند که وابسته به ویژگی‌های محیط متخلخل و سیال بوده و m و n مقدارهایی که افزون بر وابستگی به ویژگی‌های محیط متخلخل و سیال تابعی از ویژگی‌های جریان نیز می‌باشند. در محیط متخلخل درشت‌دانه مانند شن و قلوه سنگ، سرعت جریان و عدد رینولدز افزایش یافته و جریان آرام نخواهد بود. در این نوع جریان‌ها، رابطه داریسی کارایی خود را از دست می‌دهد (Forchheimer, P.1901; Hansen et al., 1995). رابطه دوجمله‌ای در محیط متخلخل درشت‌دانه از آنجایی که با استفاده از تجزیه و تحلیل ابعادی (Ward, 1964) و معادله ناویه استوکس (Ahmed and Sunada, 1969) قابل اثبات است نسبت به رابطه توانی (نمایی) دقت بالا و کارایی بهتری دارد. از سوی دیگر تک جمله‌ای بودن رابطه نمایی سبب می‌شود که این رابطه تنها در دامنه محدودی از تغییرپذیری‌های عدد رینولدز (یا سرعت) قابل استفاده باشد (Bazargan & Shoaie, 2006). همچنین از دیگر برتری‌های رابطه دوجمله‌ای نسبت به رابطه نمایی می‌توان به این اشاره کرد که، رابطه دوجمله‌ای به شکل رابطه داریسی ویسباخ و با استفاده از عدد رینولدز و ضریب اصطکاک جریان قابل تعریف است؛ درحالی‌که رابطه نمایی چنین نیست (Stephenson, 1979; Leps 1973). تحلیل جریان در محیط‌های درشت‌دانه به طور معمول با حل معادله دیفرانسیلی امکان‌پذیر است، که از ترکیب یکی از رابطه‌های

برابر برآوردها و نتایج علمی بحث شده است.

## ۲-۱- تجهیزات آزمایشگاهی

به طور کلی، این پژوهش از مرحله‌های زیر تشکیل شده است:

- ۱) آماده‌سازی محیط آزمایشگاهی برای برداشت داده‌ها در محیط سنگریزه‌ای برای سه دانه بندی مختلف
  - ۲) برداشت مقدارهای بار (هد) پیزومتریک و عمق آب در نقطه‌های مشخص شده در طول محیط سنگریزه‌ای برای دبی های مختلف
  - ۳) مقایسه مقدارهای ضریب‌های  $a$  و  $b$  و همچنین گرادیان هیدرولیکی و سرعت میانگین ثبت شده در آزمایشگاه با مقدارهای محاسبه شدنی
- این آزمایش‌ها در فلوم آزمایشگاهی در دانشکده عمران دانشگاه زنجان که به صورت شیب‌پذیر (شیب برابر ۰/۰۰۰۱۹) طراحی شده که با عرض و ارتفاع ۳۰ سانتی متر و طول ۵ متر انجام شده است (شکل ۱). اندازه‌گیری دبی جریان با استفاده از سرریز مثلثی انجام می‌گیرد. دیواره فلوم از جنس پلکسی گلس است که امکان مشاهده جریان را فراهم می‌کند. دو متر از طول فلوم برای محیط سنگریزه‌ای در نظر گرفته شده و در طول آن پیزومتر قرار داده شده است. چگونگی قرارگیری پیزومترها در کف، در (شکل ۲) نشان داده شده است.

ضریب  $a$  و  $b$  با فرض آشفته بودن جریان برای ضریب  $b$  ارائه کرده است. (Norouzi & Bazargan, 2021) نتایج آزمایش‌های موجود از تحقیق حسینی، با ارائه راهکاری برای محاسبه گرادیان هیدرولیکی درون مصالح زهکشی شده ناهمگن افقی با استفاده از الگوریتم بهینه سازی ازدحام ذرات (PSO) بر روی جریان ماندگار در محیط همگن، رابطه‌ای برای محاسبه ضریب‌های  $a$  و  $b$  در محیط سنگریزه‌ای ناهمگن افقی ارائه کردند، که با توجه به میانگین خطای نسبی برابر با ۵۲/۱۷ در مقایسه با میانگین خطای نسبی آزمایش‌های حسینی، برابر ۵۰/۷۹ اختلاف ۱/۳۸ درصدی مشاهده شده نشان دهنده دقت بالای راهکار ارائه شده می‌باشد.

در این پژوهش با قراردادن پیزومترهایی با فاصله‌های معین در کف آبراهه آزمایشگاهی، مقدارهای گرادیان هیدرولیکی و سرعت میانگین در محیط‌های مختلف سنگریزه‌ای ریز، متوسط و درشت اندازه‌گیری و ثبت شد و با مقدارهای محاسبه شدنی مقایسه شد.

## ۲- مواد و روش‌ها

از آنجاکه مبنای اصلی این تحقیق آزمایشگاهی بوده، در آغاز به معرفی تجهیزات آزمایشگاهی مصالح مورد استفاده و روند انجام آزمایش‌های پرداخته و با استفاده از داده‌های برداشت شده و تجزیه و تحلیل آنها، نتایج به‌دست آمده

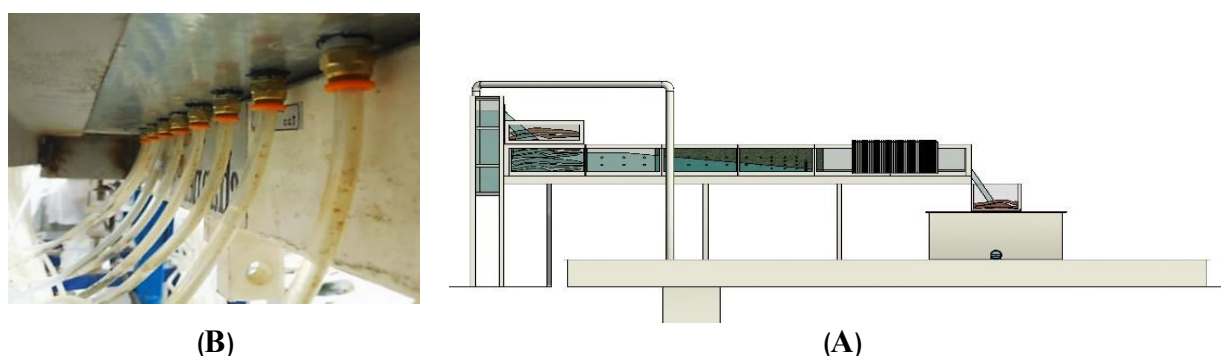


Fig. 1 schematic view of the experimental flume: A) Side view of the experimental flume B) Piezometers installed on the flume bed

شکل ۱ نمای کلی فلوم آزمایشگاهی، (A) نمای کلی جانبی از فلوم آزمایشگاهی (B) پیزومترهای نصب شده کف آبراهه

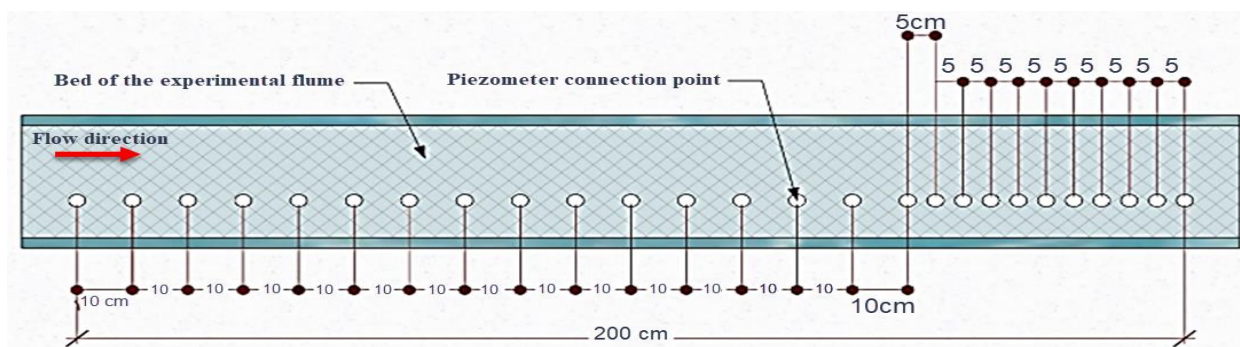


Fig. 2 Schematic view of the arrangement of flume bed piezometers

شکل ۲ نمای کلی از چگونگی چیدمان پیزومتر های کف آبراه

### ۲-۲- مصالح مورد استفاده

در این پژوهش از سه نوع مصالح (ریز، متوسط و درشت) با دانه بندی ارائه شده در جدول (۱) و شکل (۳) برای ایجاد محیط سنگریزه‌ای استفاده شده است. محیط سنگریز همگن با طول ۱ متر و محیط سنگریز ناهمگن عمودی با طول ۲ متر، هر دو به ارتفاع ۳۰ سانتی متر درون فلوم آزمایشگاه ایجاد شده است (شکل ۴).

در جدول ۱، ضریب یکنواختی ( $C_u$ ) برابر با  $\frac{D_{60}}{D_{10}}$  و ضریب انحنای ( $C_c$ ) برابر با  $\frac{(D_{60})^2}{D_{10} \times D_{60}}$  است.

### ۳-۲- معادله‌های حاکم

شایان یادآوری است که در محیط ناهمگن عمودی با سه روش مختلف، مقدارهای ضریب‌های  $a$  و  $b$  محاسبه شده؛ که برای روش اول، مبنای کار بر مبنای مساوی قرار دادن مجموع افت‌های هر یک از اجزاء محیط با تاثیر طول محیط، با کل افت محیط ناهمگن می باشد؛ با در نظر گرفتن افت کل برابر مجموع افت‌های محیط برابر رابطه (۵) و همچنین برابر رابطه (۶) برابر بودن گرادیان هیدرولیکی کل در طول هر محیط با مقدار افت کل و با جایگذاری رابطه فورشهایمر (رابطه ۳) در  $h_f$  هر محیط رابطه (۷) به دست می‌آید.

جدول ۱ ویژگی‌های مصالح آزمایشگاهی

Table 1 Characteristics of experimental materials

Materials	$d_0(mm)$	$d_{10}(mm)$	$d_{30}(mm)$	$d_{50}(mm)$	$d_{60}(mm)$	$d_{100}(mm)$	$C_u$	$C_c$	Porosity
Small	2.36	6.06	7.77	9.26	10.19	25.4	1.68	0.97	0.42
Medium	4	8.43	11.44	15.23	17.46	50.8	2.07	0.89	0.455
Large	4.75	7.66	13.51	21.48	26.88	63	3.51	0.88	0.485

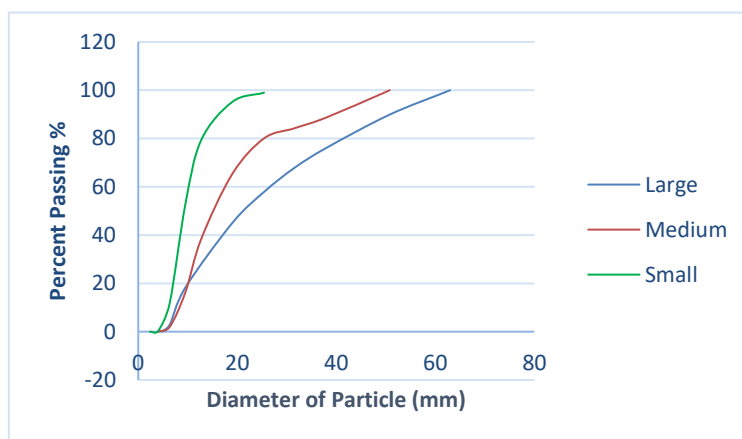
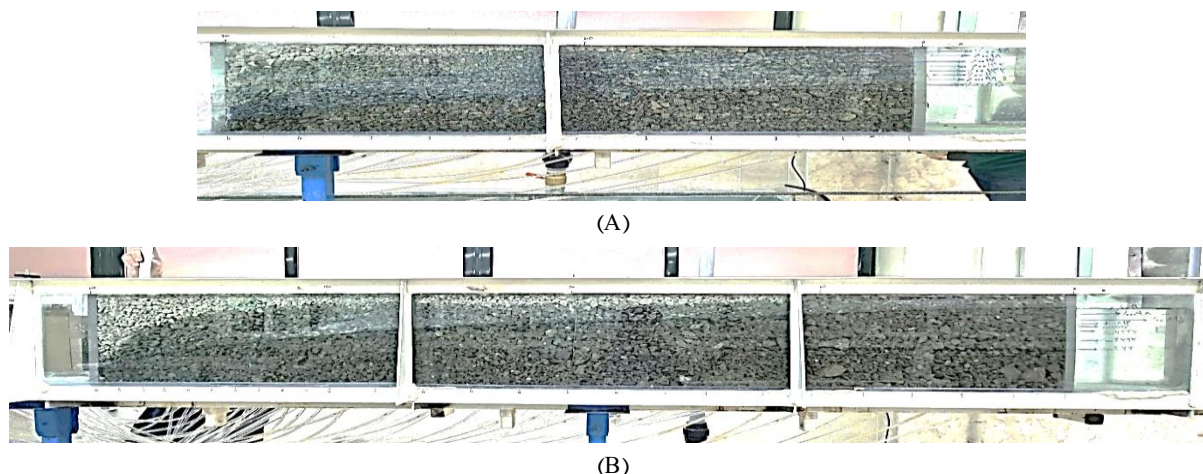


Fig. 3 Gradation curve of the materials used

شکل ۳ منحنی دانه‌بندی مصالح مورد استفاده



**Fig. 4** Gravel media inside the experimental flume: A) Gravel media of 1 m length, B) Gravel media of 2 m length  
**شکل ۴** محیط سنگریزه درون آبراهه آزمایشگاهی برای طول های ۱ و ۲ متری: (A) محیط سنگریزه ۱ متری (B) محیط سنگریزه ۲ متری

$$F_{f_t} = F_{f_1} + F_{f_2} \quad (10)$$

$$h_{f_t} = h_{f_1} + h_{f_2} \quad (5)$$

$$F_{f_t} = \tau_f PL \quad (11)$$

$$h_{f_t} = i_t(l_1 + l_2) = (a_e \bar{V}_e + b_e \bar{V}_e^2) \cdot (l_1 + l_2) \quad (6)$$

حال با جایگذاری مقدار تنش برشی ( $\tau_f = \gamma R S_0$ ) و همچنین از آنجا که جریان یکنواخت می باشد ( $S_0 = S_f$ ) و با جایگذاری مقدار شعاع هیدرولیکی ( $R = \frac{A}{P}$ ) رابطه (۱۲) به دست می آید.

$$F_{f_t} = \gamma \bar{A} S_f L \quad (12)$$

با توجه به اینکه در رابطه شیب خط انرژی مقدار تغییرپذیری بلندای سرعت  $\frac{V^2}{2gn^2}$ ، به علت ناچیز بودن، قابل چشم پوشی می باشد؛ پس می توان شیب خط انرژی را معادل گرادیان هیدرولیکی دانست ( $i = S_f$ ).

$$F_{f_t} = \gamma \bar{A} i_t (L_1 + L_2) \quad (13)$$

از آنجا که مقدار  $L$  کل برابر است با حاصل جمع طول هر یک از محیط ها و همچنین با توجه به اینکه مقدار  $i$  برابر است با مجموع مقدارهای ضریب های  $a$  و  $b$  معادل، پس رابطه های (۱۴) و (۱۵) به دست خواهد آمد.

$$a_e \bar{V}_e = \frac{(a_1 l_1 V_1 A_1 + a_2 l_2 V_2 A_2) \gamma}{\bar{A} \gamma (l_1 + l_2)} \quad (14)$$

$$h_{f_t} = (a_1 V_1 + b_1 V_1^2) l_1 + (a_2 V_2 + b_2 V_2^2) l_2 \quad (7)$$

با تساوی قرار دادن رابطه (۶) و (۷) به ضریب های  $a$  و  $b$  معادل برابر رابطه های (۸) و (۹) به دست می آید.

$$a_e \bar{V}_e = \frac{a_1 l_1 V_1 + a_2 l_2 V_2}{l_1 + l_2} \quad (8)$$

$$b_e \bar{V}_e^2 = \frac{b_1 l_1 V_1^2 + b_2 l_2 V_2^2}{l_1 + l_2} \quad (9)$$

مبنای کار روش دوم نیز بر مبنای مساوی قرار دادن مقدارهای نیروی اصطکاک هر یک از اجزاء محیط با کل نیروی اصطکاک می باشد. همان طور که مشخص است، مقدار نیروی کل اصطکاک برابر است با مجموع نیروهای اصطکاک محیط (برابر رابطه ۱۰) از سوی دیگر با علم بر اینکه مقدار نیروی اصطکاک ( $F_f$ ) برابر است با حاصل ضرب تنش برشی در مساحت محیط ( $\tau_f \bar{A}$ ) و با دانش بر اینکه مساحت محیط همان پیرامون مرطوب در طول محیط می باشد ( $\bar{A} = PL$ )، رابطه (۱۱) به دست می آید.

$$a \cdot b = f(L \cdot n \cdot C_u) \quad (18)$$

لازم به یادآوری است که برای بهینه یابی ضریب‌های رابطه ۱۶ و ۱۷ از کمینه کردن مقدار میانگین خطای نسبی (MRE) به عنوان تابع هدف استفاده شده است. به عبارت دیگر، ضریب‌های یادشده به گونه ای بهینه یابی شده‌اند که مقدارهای محاسبه شدنی و مشاهده شدنی کمترین مقدار میانگین خطای نسبی ممکن را داشته باشند.

### ۳- آزمایش‌های انجام شده

در این پژوهش در مجموع ۹۰ مدل آزمایشگاهی با ۳ نوع دانه بندی ریز، متوسط و درشت دانه بررسی و ثبت نتیجه شده است. طرح ریزی آزمایشی این پژوهش در دو بخش همگن و ناهمگن صورت گرفت. در هر یک از محیط‌ها با عبور دادن دبی‌های مختلف آغاز به برداشت داده‌ها و ثبت نتایج شد. در قسمت همگن مصالح با دانه بندی مشخص شده به طول یک متر درون آبراهه قرار گرفته و در مجموع آب با ۳۰ دبی مختلف (از ۰/۴ تا ۲/۷۶ لیتر بر ثانیه) از محیط همگن عبور داده شد. برای محیط ناهمگن عمودی نیز در مجموع به شمار ۶۰ دبی مختلف (از ۰/۴ تا ۱/۷۶ لیتر بر ثانیه) از محیط متخلخل عبور داده شد. دبی‌های ماندگار، برای محیط همگن برابر جدول (۲) و برای محیط ناهمگن عمودی در جدول (۳) آورده شده است.

$$b_e \bar{V}_e^2 = \frac{(b_1 l_1 V_1^2 A_1 + b_2 l_2 V_2^2 A_2) \gamma}{\bar{A} \gamma (l_1 + l_2)} \quad (15)$$

افزون بر دو روش ارائه شده بالا، پس از بررسی‌های آزمایشگاهی و عددی، رابطه‌هایی (رابطه ۱۶ و ۱۷) به صورت تجربی برای محیط ناهمگن عمودی برای محاسبه ضریب‌های  $a$  و  $b$  ارائه شد. که در ادامه پژوهش به عنوان رابطه  $\alpha$  عنوان خواهد شد.

$$a_{eq} V_{eq} = \frac{0.83 ((a_1 V_1^2 A_1 C_{u1} (1 - n_1)^2 L_1) + (a_2 V_2^2 A_2 C_{u2} (1 - n_2)^2 L_2)) \gamma}{\gamma \bar{A} (L_1 + L_2)} \quad (16)$$

$$b_{eq} V_{eq}^2 = \frac{1.45 ((b_1 V_1^2 A_1 (1 - n_1)^2 C_{u1} L_1) + (b_2 V_2^2 A_2 (1 - n_2)^2 C_{u2} L_2)) \gamma}{\gamma \bar{A} (L_1 + L_2)} \quad (17)$$

که در این رابطه‌ها  $n$ ، تخلخل،  $C_{u1}$ ، ضریب یکنواختی  $L_1$ ، طول محیط سنگریزه‌های  $A$ ، سطح مقطع و  $\gamma$ ، وزن مخصوص آب می باشد. بررسی‌های انجام شده در این پژوهش، بیانگر آن است که ضریب‌های یادشده تابعی از طول محیط سنگریز ( $L$ )، تخلخل ( $n$ ) و ضریب یکنواختی ( $C_u$ ) هر محیط می باشند. به عبارت دیگر ضریب‌های یادشده تابعی به صورت رابطه (۱۸) می‌باشد.

جدول ۲ مقدارهای دبی جریان ماندگار در محیط همگن در مصالح مختلف و طول یک متری

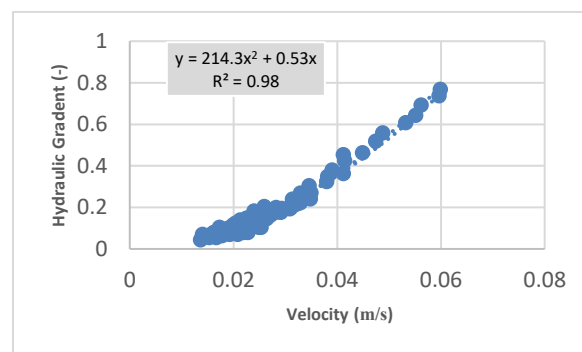
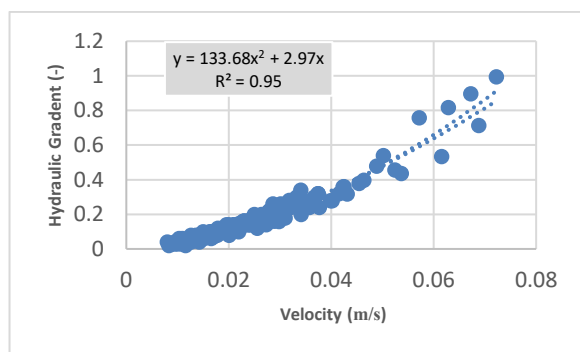
Table 2 Steady flow discharges considering a homogeneous medium with different materials and a length of 1 m

Length (m)	Discharge (L/s)		
	Small	Medium	Large
1	0.46	0.51	0.69
	0.58	0.73	0.86
	0.76	0.83	1.04
	0.88	1.01	1.23
	1.11	1.22	1.45
	1.26	1.38	1.71
	1.55	1.63	1.94
	1.77	1.84	2.12
	1.89	2.09	2.5
	2.26	2.54	2.76

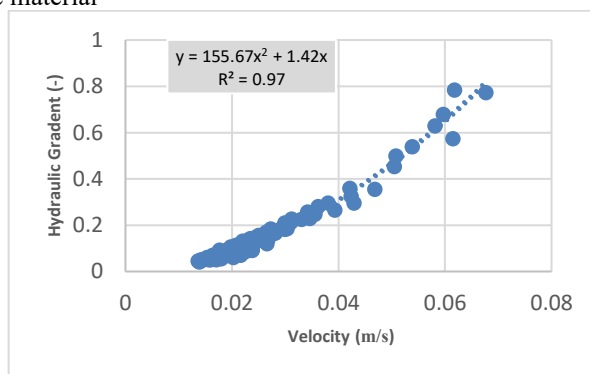
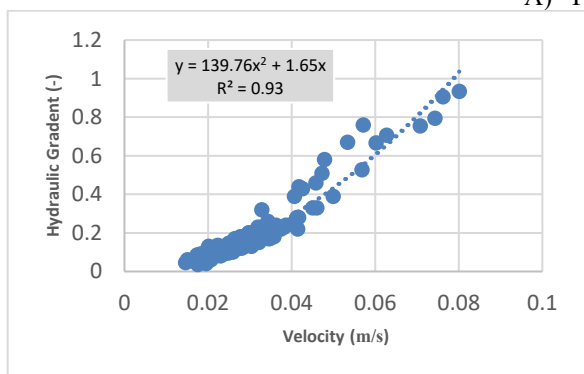
جدول ۳ مقادارهای دبی جریان ماندگار در محیط ناهمگن عمودی

Table 3 Steady flow discharges considering a vertical non-homogeneous medium

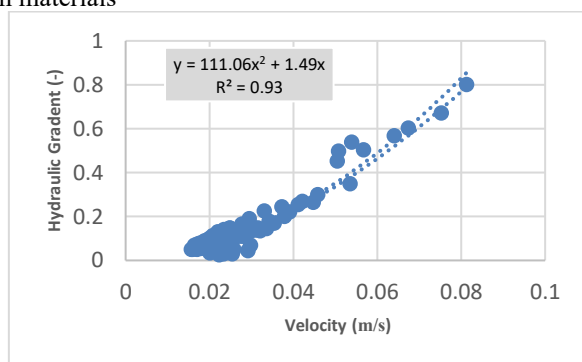
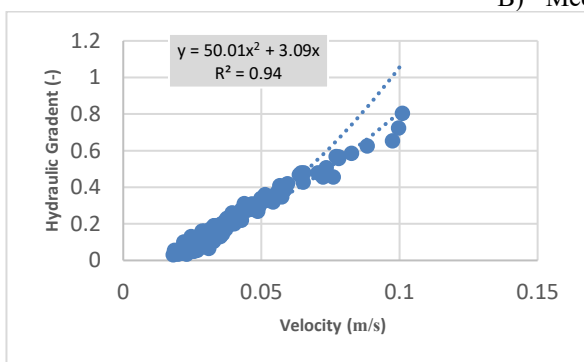
Length (m)	Discharge (L/s)					
	Small-Medium	Medium-Small	Small-Large	Large-Small	Medium-Large	Large-Medium
2	0.40	0.36	0.66	0.65	0.45	0.43
	0.48	0.46	0.79	0.71	0.59	0.51
	0.61	0.62	0.85	0.81	0.68	0.63
	0.76	0.74	0.92	0.85	0.80	0.77
	0.82	0.81	0.96	0.91	0.86	0.83
	0.90	0.86	1.01	1.01	0.98	0.98
	0.99	0.98	1.10	1.12	1.18	1.12
	1.14	1.12	1.29	1.13	1.25	1.23
	1.29	1.28	1.46	1.46	1.45	1.35
	1.44	1.40	1.76	1.61	1.65	1.48



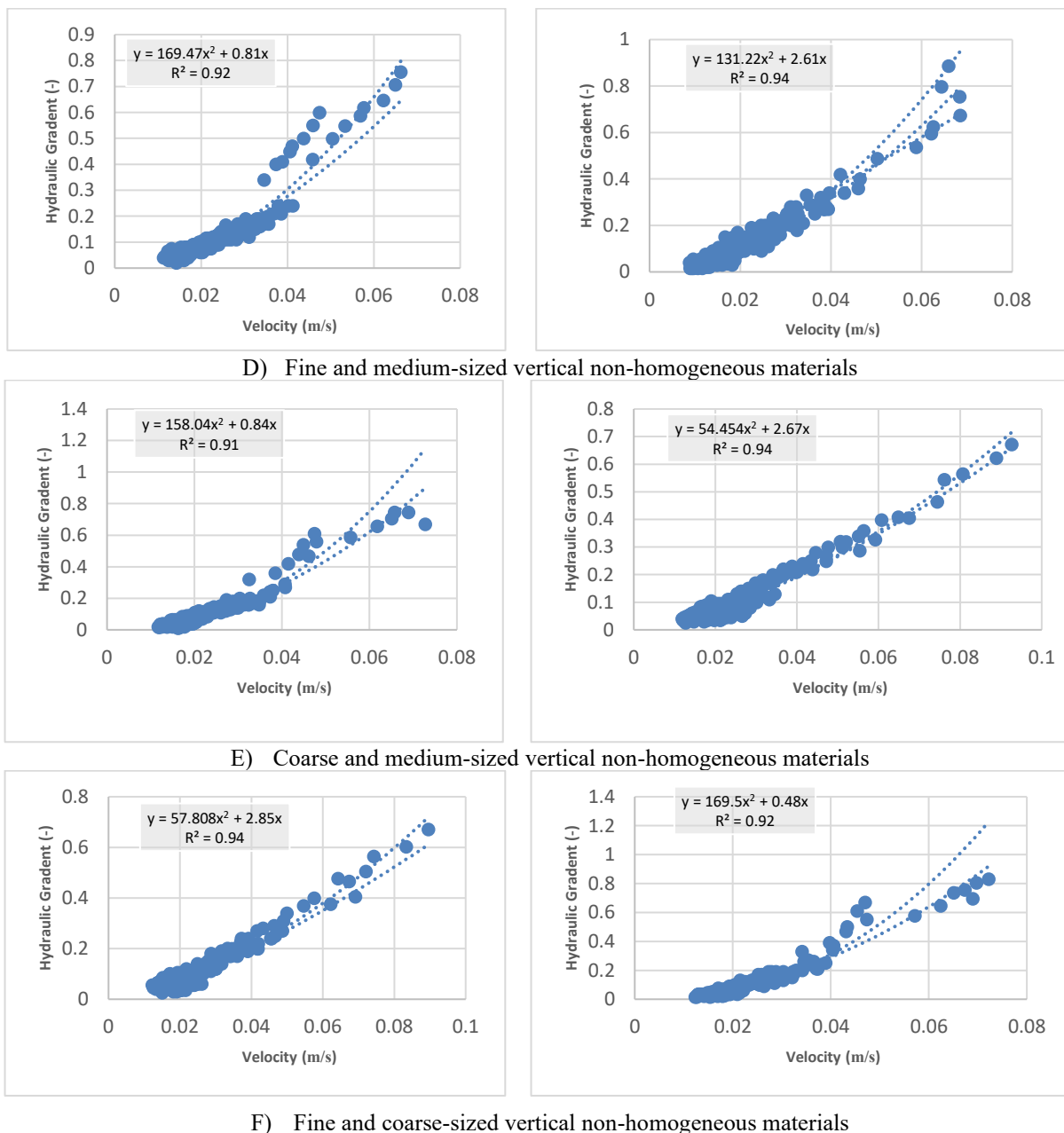
A) Fine material



B) Medium materials



C) Coarse-grained materials



**Fig. 5** Changes in hydraulic gradient in terms of steady flow velocity measured in the laboratory in a vertically non-homogeneous medium

شکل ۵ تغییرپذیری‌های گرادیان هیدرولیکی برحسب سرعت جریان ماندگار برداشت شده در آزمایشگاه در محیط ناهمگن عمودی

جدول ۴ مقادیرهای a و b به‌دست آمده از آزمایشگاه برای محیط متخلخل همگن سنگدانه‌های آزمایشگاهی

**Table 4** Experimental values of coefficients a and b for homogeneous porous medium of tested aggregates

material	Location in the flume	<b>b</b> (S/m) <sup>2</sup>	<b>a</b> (S/m)	Forschheimer Equation ( $i = av + bv^2$ )
Small	1m upstream	214.3	0.53	$y = 0.53v + 214.3v^2$
	1 m downstream	133.68	2.97	$y = 2.97v + 133.68v^2$
medium	1m upstream	155.67	1.42	$y = 1.42v + 155.67v^2$
	1 m downstream	139.76	1.65	$y = 1.65v + 139.76v^2$
Large	1m upstream	111.06	1.49	$y = 1.49v + 111.06v^2$
	1 m downstream	50.01	3.09	$y = 3.09v + 50.01v^2$

(۶) الی (۹) می باشد. همان طور که پیشتر نیز اشاره شد رابطه‌های ۱۶ و ۱۷ که به صورت تجربی برای محیط ناهمگن عمودی و نیز محاسبه ضریب‌های a و b ارائه شده است؛ در جدول (۵) و (۶) به عنوان رابطه  $\alpha$  یاد خواهد شد.

مقدارهای ضریب‌های a و b برداشت شده از آزمایشگاه برای محیط همگن برابر جدول (۵) و مقدارهای ضریب‌های یاد شده مشاهده شدنی و محاسبه شدنی نیز برای محیط ناهمگن عمودی، برابر روش‌های ارائه شده به ترتیب برابر جدول‌های

جدول ۵ مقدارهای ضریب a مشاهده شدنی و محاسبه شدنی به دست آمده برای محیط متخلخل ناهمگن عمودی

Table 5 Observational and computational values of coefficient a obtained for vertical non-homogeneous porous media

Hydraulic model	Obs	Method 1		Method 2		Method 3	
		( $h_f$ )	Error (%)	( $F_f$ )	Error (%)	( $\alpha$ )	Error (%)
Large-Small	0.48	2.14	342.28	2.16	346.66	1.26	160.45
Large-medium	0.84	1.57	85.51	1.59	87.43	0.98	16.46
Medium-Small	2.61	2.14	17.96	2.16	17.29	2.17	16.83
Medium-Large	2.67	2.40	10.31	2.53	5.34	1.79	32.98
Small-medium	0.81	1.13	39.40	1.21	49.26	0.64	21.04
Small-Large	2.85	2.04	28.44	2.24	21.38	1.63	42.66

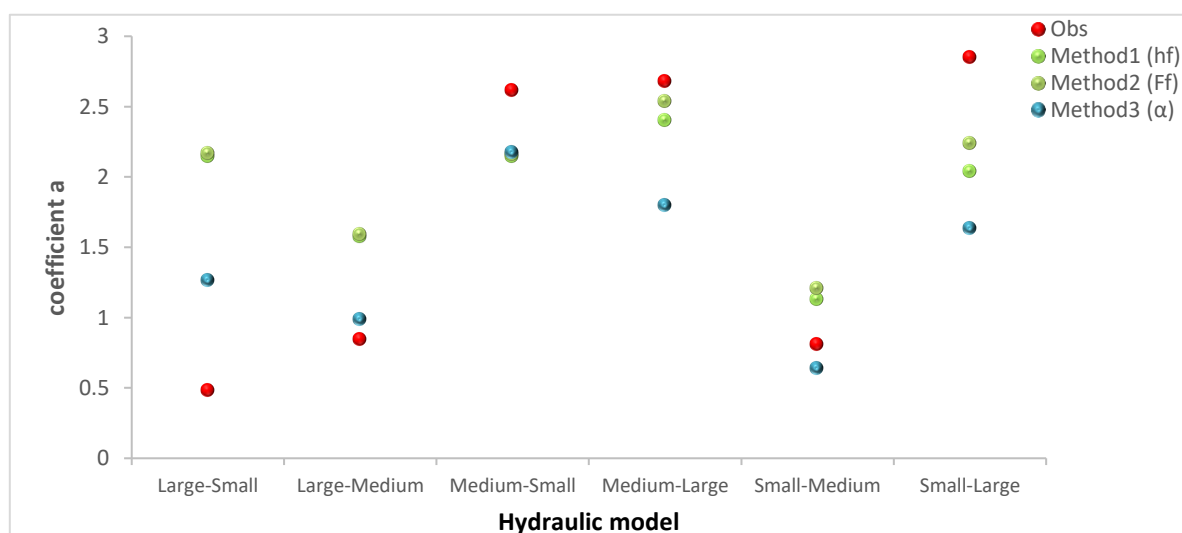


Fig. 6 Comparison of the observational and computational values of coefficient a with each of the presented methods

شکل ۶ مقایسه مقدارهای مربوط به ضریب a مشاهده شدنی و محاسبه شدنی با هر یک از روش‌های ارائه شده

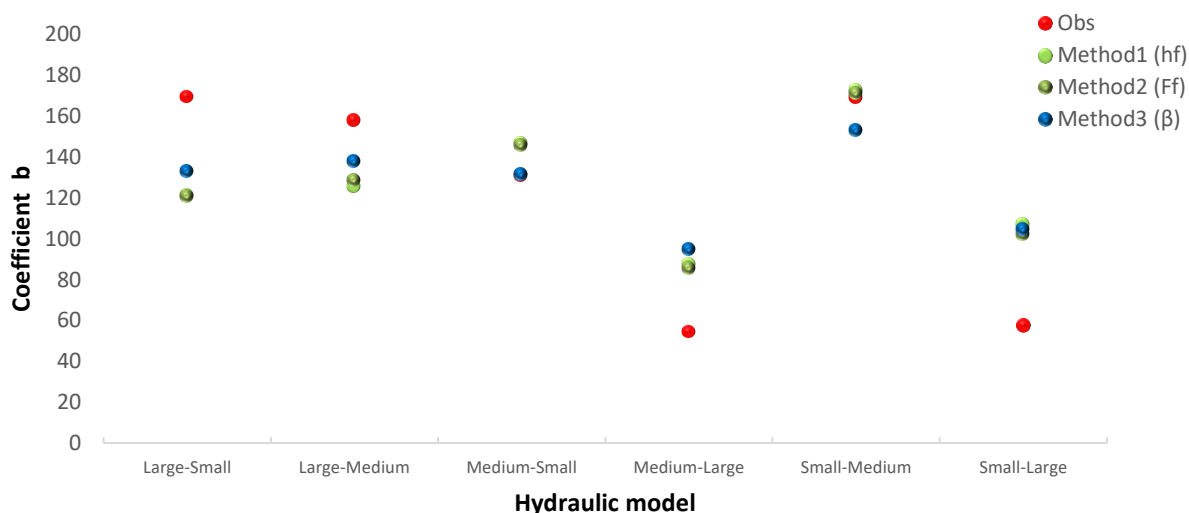
ضریب b معادل رابطه فورشه‌ایمر نیز با محاسبه این ضریب از طریق رابطه‌های بحث شده و تعیین درصد خطای هر یک از روش‌ها (جدول ۷) و مقایسه آن‌ها با مقدارهای مشاهده شدنی ثبت شده در آزمایشگاه (شکل ۹)، همچنان به دقت بالای رابطه ارائه شده در این پژوهش اشاره خواهد شد.

همان‌طور که از جدول (۶) و همچنین نمودار شکل (۸) مشخص است برای ضریب a معادل رابطه فورشه‌ایمر از بین رابطه‌های بررسی شده، مقدارهای محاسبه شده از طریق رابطه ارائه شده در این پژوهش بسیار نزدیک به مقدارهای مشاهده شدنی ثبت شده در آزمایشگاه می باشد. که این نشان دهنده دقت بالای این رابطه می باشد. همچنین برای

جدول ۶ مقادارهای ضریب b مشاهده شدنی و محاسبه شدنی به‌دست آمده برای محیط متخلخل ناهمگن عمودی

**Table 6** Observational and computational values of the coefficient b obtained for the vertical non-homogeneous porous medium

Hydraulic model	Obs	Method 1		Method 2		Method 3	
		( $h_f$ )	Error (%)	( $F_f$ )	Error (%)	( $\alpha$ )	Error (%)
Large-Small	169.50	121.41	28.36	120.61	28.84	133.15	21.44
Large-medium	158.04	125.83	20.38	128.77	18.51	138.01	12.67
Medium-Small	131.22	146.84	11.91	145.98	11.25	131.71	0.36
Medium-Large	54.454	87.63	60.93	85.59	57.18	94.77	74.04
Small-medium	169.47	172.61	1.85	171.08	0.95	153.31	9.54
Small-Large	57.81	107.06	85.21	102.34	77.04	104.86	81.39



**Fig. 7** Comparison of the observational and calculational b coefficient values with each of the presented methods

شکل ۷ مقایسه مقادارهای مربوط به ضریب b مشاهده شدنی و محاسبه شدنی با هر یک از روش های ارائه شده

پس از آن با به‌دست آوردن گرادیان هیدرولیکی محاسبه شده با هر یک از روش ها، برابر جدول (۸) و مقایسه آن با مقادارهای گرادیان هیدرولیکی مشاهده شدنی (شکل ۱۰)، و همچنین نگاهی اجمالی به میانگین خطای نسبی، بار دیگر به دقت بالای رابطه ارائه شده پی برده خواهد شد.

پس از بررسی هر یک از ضریب‌های a و b معادل رابطه فورشه‌ایمر برابر جدول‌های (۶) و (۷) و محاسبه میانگین خطای هر یک از روش های محاسبه شدنی به این نتیجه رسیدیم که دقت رابطه ارائه شده بیشتر از رابطه‌های دیگر می باشد. از سوی دیگر با محاسبه ضریب‌های یادشده و

جدول ۷ مقادارهای گرادیان هیدرولیکی مشاهده شدنی و محاسبه شدنی

**Table 7** Observational and calculational hydraulic gradient values

Hydraulic model	V	i obs	i Method 1 ( $h_f$ )	i Method 2 ( $F_f$ )	i Method 3 ( $\alpha$ )
Large-Small	0.024	0.11	0.12	0.12	0.12
Large-medium	0.023	0.11	0.11	0.10	0.10
Medium-Small	0.020	0.10	0.10	0.10	0.10
Medium-Large	0.026	0.11	0.12	0.12	0.13
Small-medium	0.023	0.10	0.11	0.11	0.11
Small-Large	0.025	0.11	0.12	0.12	0.13

جدول ۸ درصد خطای مقدارهای گرادیان هیدرولیکی با هر یک از روش های محاسبه شدنی در محیط ناهمگن عمودی

Table 8 Error percent of hydraulic gradient values using each of the calculation methods considering the vertical non-homogeneous medium

Hydraulic model	RE1 (%)	RE2 (%)	RE 3 (%)
Large-Small	10.53	10.49	8.23
Large-medium	0.89	0.98	1.20
Medium-Small	2.84	2.84	4.20
Medium-Large	16.70	14.80	19.65
Small-medium	9.24	8.30	9.16
Small-Large	12.41	10.57	17.01

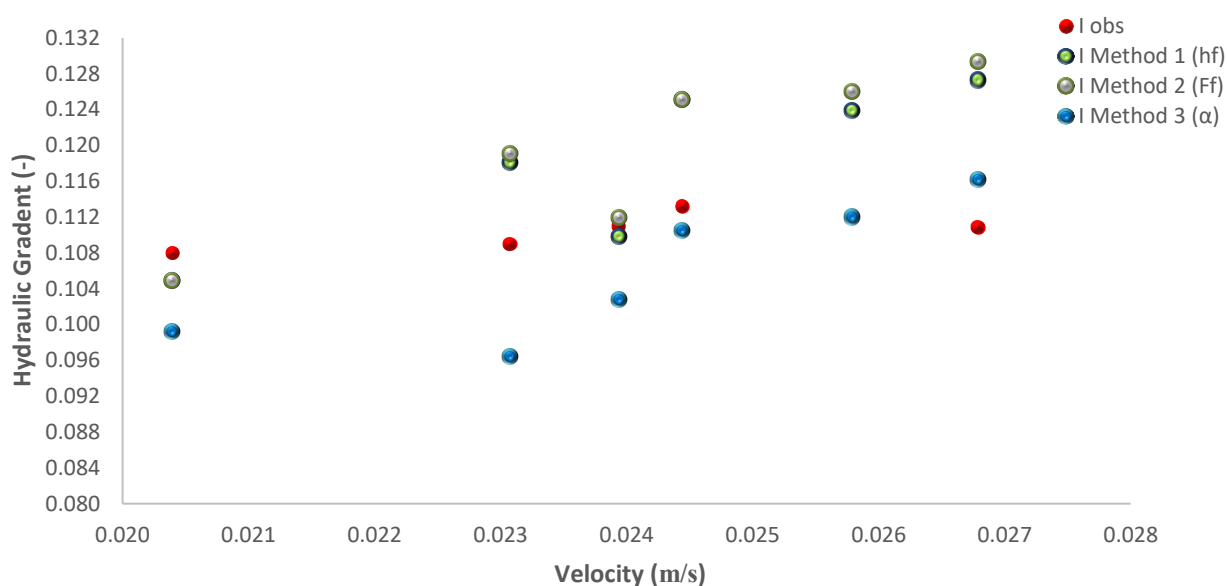


Fig. 8 Changes in hydraulic gradient versus flow velocity in the vertical non-homogeneous medium

شکل ۸ نمودار تغییرپذیری های گرادیان هیدرولیکی به سرعت جریان در محیط ناهمگن عمودی

استفاده می باشند. به عبارتی این رابطه های ارائه شده به صورت فراسنج های ثلثت بوده و محدود به نمونه های آزمایشگاهی خود می باشند. افزون بر این، همه پژوهش ها و تحقیقات انجام شده اغلب در محیط همگن صورت گرفته است. همان طور که برابر نتایج به دست آمده اشاره شد؛ به دلیل استفاده از مصالح سنگی درشت دانه و بالا بودن سرعت، جریان در حالت آشفته قرار گرفته و رابطه داری از اعتبار خارج می شود. در این پژوهش با در نظر گرفتن رابطه های ارائه شده گذشته و برداشت داده ها از آزمایش های انجام شده در فلوم آزمایشگاهی و به دست آوردن مقدارهای محاسبه شدنی بر مبنای تساوی قراردادان مقدارهای افت ها ( $h_f$ )، مقدارهای نیروی اصطکاک ( $f_f$ ) و رابطه تجربی ارائه شده در محیط ناهمگن عمودی، به مقایسه مقدارهای مشاهده شدنی و محاسبه شدنی

همان طور که از شکل ۱۰ پیداست با مقایسه مقدارهای گرادیان هیدرولیکی محاسبه شدنی با مقدارهای مشاهده شدنی در محیط ناهمگن عمودی، با بررسی درصد خطای هر یک از روش ها، میانگین خطای نسبی به ترتیب برای روش اول تا سوم برابر ۸، ۸/۷۷ و ۵/۷ درصد به دست آمده است.

### ۵- نتیجه گیری

برابر نتایج بدست آمده و توضیح های ارائه شده، در جریان غیرداری برای محاسبه ضریب های  $a$  و  $b$  رابطه فورشه ایمر، پژوهشگران مختلفی رابطه های چندی را به صورت آزمایشگاهی و همچنین عددی ارائه کرده اند. مسئله ای که در پژوهش های پیشین وجود دارد این است که این رابطه ها دارای محدودیت محیطی خاصی برای

## ۶- فهرست نشانه‌ها

a	ضریب رابطه دو جمله ای ( $s/m$ )
b	ضریب رابطه دو جمله ای ( $s^2/m^2$ )
$\alpha$	ضریب رابطه ارائه شده در این پژوهش
i	گرادیان هیدرولیکی (-)
K	ضریب نفوذپذیری مصالح ( $m/s$ )
m	ضریب رابطه نمایی ( $s/m$ )
V	سرعت میانگین جریان ( $m/s$ )
Re	عدد رینولدز
$C_u$	ضریب انحنای $(\frac{D_{60}^2}{D_{10} \times D_{60}})$
$C_u$	ضریب یکنواختی ( $D_{60}/D_{10}$ )
n	ضریب رابطه نمایی (-)
$S_f$	شیب خط انرژی
$\tau_f$	تنش برشی ( $N/m^2$ )
$\gamma$	وزن مخصوص آب ( $N/m^3$ )
R	شعاع هیدرولیکی (m)
L	طول محیط (m)
P	محیط خیس شده (m)
A	سطح مقطع جریان ( $m^2$ )
Q	دبی جریان ( $m^3/s$ )
g	شتاب ثقل ( $m/s^2$ )
$f_f$	ضریب مقدارهای نیروی اصطکاک (N)
$h_f$	ضریب مقدارهای افت (m)
MRE	میانگین خطای نسبی (%)

## تضاد منافع نویسندگان

نویسندگان این مقاله اعلام می‌دارند که هیچ گونه تضاد منافی در خصوص نگارش و انتشار مطالب و نتایج این پژوهش ندارند.

## منابع مالی

نویسنده (نویسندگان) هیچ گونه حمایت مالی برای تحقیق، تالیف و انتشار این مقاله دریافت نکردند.

## دسترسی به داده‌ها

همه اطلاعات و نتایج در متن مقاله ارائه شده است.

پرداخته شد. میانگین خطای نسبی (MRE) بین مقدارهای گرادیان هیدرولیکی مشاهده شدنی و محاسبه شدنی در محیط ناهمگن عمودی برای سه روش یادشده شده به ترتیب برای روش‌های اول و دوم برابر است با ۸ و ۸/۷۷ درصد و در شرایطی که از رابطه ارائه شده در این پژوهش استفاده شود برابر با ۵/۷ درصد خواهد بود؛ که به ترتیب باعث بهبود ۲۹ و ۳۵ درصدی MRE نسبت به دو روش دیگر می‌شود. همچنین بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که میانگین خطای ضریب a در روش‌های اول و دوم به ترتیب ۸۷/۳۲ و ۸۷/۹۱ و در شرایط استفاده از رابطه ارائه شده در این پژوهش ۴۸/۴۱ درصد که به ترتیب باعث بهبود ۳۸ و ۳۹/۵ درصدی MRE نسبت به دو روش دیگر شده است. به همین ترتیب میانگین خطای ضریب b در روش‌های اول و دوم به ترتیب ۳۴/۷۸ و ۳۲/۳۱ و در شرایط استفاده از رابطه ارائه شده در این پژوهش ۳۳/۲۴ درصد بوده که در مقایسه با روش اول باعث بهبود ۱/۵ درصدی و برای روش دوم نیز با اختلاف ۰/۹ درصدی به نتیجه مطلوبی دست خواهد داد. با توجه به تحقیقات بسیار محدودی که در این زمینه انجام شده است، اگر نتایج به دست آمده از نتایج ارزیابی‌های حسینی و نتایج به دست آمده در این تحقیق را در کنار یکدیگر قرار داده و مقایسه‌ای کنیم، صرف نظر از محیط و مصالح و حالت انجام آزمایش‌های، داده‌های برداشت شده در این پژوهش در محیط عمودی بوده اما آزمایش‌های حسینی در محیط افقی صورت گرفته است. با این حال نتایج به دست آمده در این پژوهش بیشتر با ضریب  $R^2$  بالای ۹۰ درصد به دست آمده است. لازم به یادآوری است همان‌طور که در مقدمه نیز اشاره شد؛ اصل رابطه فورشه‌ایمر به شکل تجربی بوده در حالی که این رابطه توسط وارد در ۱۹۶۴ با تجزیه و تحلیل ابعادی اثبات شده است، افزون بر این در سال ۱۹۶۹ احمد و سونادا با استفاده از معادله‌های ناویر استوکس به شکل تحلیلی و ریاضی اثبات کرده اند؛ لذا لزومی به اثبات دوباره به روش تجزیه و تحلیل ابعادی نمی‌باشد.

uncertainty in determining the parameters of the linear Muskingum method using the particle swarm optimization (PSO) algorithm. *Journal of Water and Climate Change*, 12(5), 2055-2067.

Norouzi, H., Bazargan, J., Azhang, F. & Nasiri, R. (2021). Experimental study of drag coefficient in non-darcy steady and unsteady flow conditions in rockfill. *Stochastic Environ Res Risk Assess*, 36, 543–562.

Norouzi, H. & Bazargan, J. (2020). Calculation of hydraulic gradient in horizontal non-homogeneous drained materials using particle swarm optimization (PSO) algorithm. *Iranian Journal of Irrigation and Drainage*, 14(4), 1152-1163. (In Persian)

Norouzi, H., Hasani, M.H., Bazargan, J. & Shoaie, SM. (2022). Estimating output flow depth from Rockfill Porous media. *Water Supply*, 22(2), 1796-1809.

Nujic', M. (1995). Efficient implementation of non-oscillatory schemes for the computation of free-surface flows. *J Hydraul Res*, 33(1), 101–111.

Safarian, M., Norouzi, H., & Bazargan, J. (2021). Study of hydraulic gradient and velocity changes of unsteady flow through coarse porous media. *Int J River Basin Manag*, 20(4), 461–474.

Sedghi-Asl, M. & Rahimi, H. (2011). Adoption of Manning's equation to 1D non-Darcy flow problems. *J Hydraul Res*, 49(6), 814–817.

Sidiropoulou, M.G., Moutsopoulos, K.N. & Tsihrintzis, V.A. (2007). Determination of Forchheimer equation coefficients a and b. *Hydrol Proces: An Int J*, 21(4), 534–554

Stephenson, D.J. (1979). Rockfill in hydraulic engineering. Elsevier scientific publishing company, Distributors for the United States and Canada.

Subramanya, K. (2009). Flow in open channels. Third Edition, Tata McGraw-Hill Education.

Ward, J.C. (1964). Turbulent flow in porous media. *J Hydraul Div*, 90(5), <https://doi.org/10.1061/JYCEAJ.0001096>.

Zhang, T., Du, Y., Huang, T., Yang, J., Lu, F. & Li, X. (2016). Reconstruction of porous media using ISOMAP-based MPS. *Stoch Env Res Risk Assess*, 30(1), 395–412

## مشارکت نویسندگان

نویسنده اول: تجزیه و تحلیل داده‌ها، بررسی نتایج و نگارش مقاله.

نویسنده دوم: بررسی نتایج.

نویسنده سوم: نگارش مقاله.

## ۷- منابع

Ahmed, N. & Sunada, D.K. (1969). Nonlinear flow in porous media. *J Hydraul Div*, 95(6), 1847–1858.

Bari, R. & Hansen, D. (2002). Application of gradually-varied flow algorithms to simulate buried streams. *J Hydraul Res*, 40(6), 673–683.

Bazargan, J. & Shoaie, SM. (2006). Discussion of “Application of gradually varied flow algorithms to simulate buried streams.” *IAHR J Hydraulic Res*, 44(1), 138–141.

Chau, K.W. (2007). A split-step particle swarm optimization algorithm in river stage forecasting. *J Hydrol*, 34, 131–135

Chaudhry, M.H. (2007). Open-channel flow. Second Edition, Springer Science & Business Media.

Chow, V. (1959). Open channel hydraulics. McGraw-Hill Book Company, New York.

Forchheimer, P.H. (1901). Wasserbewegung Durch Boden. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 49, 1736-1749, 50, 1781-1788.

Hansen, D., Garga, V.K. & Townsend, D.R. (1995). Selection and application of a one-dimensional non-Darcy flow equation for two-dimensional flow through rockfill embankments. *Can Geotech J*, 32(2), 223–232.

Hosseini, S.M. (1997). Development of an unsteady non-linear model for flow through coarse porous media. Ph.D. Thesis. Dissertation University of Guelph. Canada.

Hosseini, S.M. & Joy, D.M. (2007). Development of an unsteady model for flow through coarse heterogeneous porous media applicable to valley fills. *Int J River Basin Manag*, 5(4), 253–265.

Leps, T.M. (1973). Flow through rockfill, Embankment-dam engineering: Casagrande volume, Hirschfeld, R.C. and Poulos, S.J. (Eds.), John Wiley & Sons.

Norouzi, H. & Bazargan, J. (2021). Effects of



© 2026 The Author(s). Published by Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.  
This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.