

Investigation of Mathematical and Experimental Models of the Linear Proportional Sharp Weirs

Sohrab Nazari ^{1*}, Mohammad Karimi Chahartaghi ²

1- Department of Civil Engineering, Eqlid Branch, Islamic Azad University, Eqlid, Iran.

2- PhD in Civil Engineering.

* So.Nazari1351@iau.ac.ir

Received: 17 May 2025

Accepted: 29 June 2025

Discussion: 21 March 2026



J. Hydraul.

Iranian Hydraulic Association

Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: Weirs are simple devices used to measure flow in open canals and ducts. Generally, the geometric cross-section of the weirs is rectangular, trapezoidal and triangular. The discharge - height relationship in this type of weirs is non-linear. The geometry of sharp weirs generally follows a mathematical equation. The governing mathematical equation can also be expanded based on the Gamma function and the Abel integral. The first idea to design the shape of the weir was proportionally and linearly completed by Stout, 1897 and later by Sutro, 1908. Sutro weir (proportional) consists of a combination of a rectangular section and a special curve. The discharge-height relationship in the Sutro weir is linear and proportional. Sutro type weirs are used to measure discharge in various industries, including chemical industries, wastewater transmission and treatment, and water transfer channels in irrigation and water supply. The geometric dimensions of the base rectangle affect the shape of the curve and the flow rate.

Methodology: In this study, by analyzing the governing equations and applying expansions of the Gamma and Abel integral functions, the design equations for a sharp-crested overflow body were derived. The amount of flow through this type of overflow is also a function of hydraulic conditions and geometry of the weir shape body. In this regard, the flow rate passing over these types of weirs is of particular importance.

Through dimensional analysis, the dimensionless parameters influencing the discharge coefficient (C_d) were identified and evaluated experimentally by constructing 12 different Sutro weir models with varying dimensions. To make Sutro weir, the coordinates of the overflow profile were first obtained in Excel using the extracted equation and then using the weir body was drawn in AutoCAD software. laser-cut on 2-mm-thick aluminum plates with high precision, suitable for both engraving and cutting...

The experiments were conducted in the hydraulic laboratory of Eghlid Islamic Azad University, using a flume 6 m long, 1.0 m wide, and 0.6 m high, equipped with a recirculating water system. The weirs were installed at the end of the chanal and a level gauge with an accuracy of 0.10 millimeter was used to measure the depth above the weir where the water level was completely horizontal. To measure the flow, a Megap magnetic flow meter with an accuracy of 0.001 liter per second installed in the main transmission pipeline and a standard trapezoidal weir calibrated and installed on a reservoir at the end of the system were used. After establishing steady flow conditions, the discharge and corresponding head over each weir were recorded, and finally, using the governing equations, the experimental

discharge coefficient for each weir configuration was determined

Results and Discussion: This study was conducted to determine the discharge coefficient of the Sutro weir. Dimensional analysis was performed to identify the dimensionless parameters influencing Cd. Flow rate (Q) diagrams were plotted against the parameter $[H-1/3 a]$ for all experiments. In all graphs, a linear relationship with a correlation coefficient of R^2 was observed to be appropriate and near one. The results of dimensional analysis of the parameters affecting the discharge coefficient are as follows equation.

$$C_d = \frac{Q}{2\sqrt{2g}Wa^{\frac{1}{2}}} = f_2 \left(\frac{h}{W}, \frac{h}{P}, \frac{h}{a}, \frac{h}{(2W+a)}, \frac{h}{h+P}, R_e, W_b, F_r \right)$$

The above dimensionless parameters were calculated for all experiments. In order to evaluate the priority of the effect of dimensionless parameters using SPSS-21 software, this was done first. The results showed that the most effect is related to the dimensionless parameter H/w . Of course, the parameters $H/(P+H)$ and Fr are also in the next priority. Therefore, in the next step, regression model analysis was performed between these three parameters and Cd coefficient. Finally, using multivariate regression, the relationship between flow coefficient and dimensionless parameters was extracted. All tests were conducted under turbulent flow conditions. The Weber number, representing the effect of surface tension, was also calculated. The influence of surface tension was negligible for water depths exceeding approximately 2–3 cm. Furthermore, the approach velocity and velocity head were determined, and the results demonstrated that the effect of approach velocity could be neglected.

Conclusion: In this research, the Abel integral function and the expansion of the Gamma function were employed to study and design the body shape of the weirs. The initial concept of overflow body design was proposed by Stout (1897) and further developed by Sutro (1908) in a proportional and linear form. Since then, numerous studies have been conducted by different researchers, each presenting design equations based on the fundamental constraints of weir geometry and flow behavior. The discharge capacity of such weirs can be experimentally determined by constructing the desired weir model and conducting laboratory tests. In this study, a linear proportional overflow type was constructed and tested experimentally. The analysis of experimental data revealed that the average discharge coefficient (Cd) for these conditions was 0.634.

Keywords: Linear Proportional Weir, Discharge Coefficient, Abel Integral Function, Gamma Function.

Conflict of Interest: The authors declared no potential conflicts of interest concerning the research, authorship, and publication of this article.

Funding: The authors received no financial support for the research, authorship, and publication of this article.

Data Availability Statements: All information and results are presented in the text of the article. The datasets generated and/or analysed during the current study are available from the corresponding author on reasonable request.

Authors' contribution:

First Author: Preparing the structure of the article, Analysis of the article.

Second Author: Editing charts, figures, and article text.

بررسی مدل ریاضی و آزمایشگاهی سرریزهای لبه تیز متناسب خطی

سهراب نظری^{۱*}، محمد کریمی چهارطاقی^۲

۱- گروه مهندسی عمران، واحد اقلید، دانشگاه آزاد اسلامی، اقلید، ایران.

۲- دکتری تخصصی مهندسی عمران.

* So.Nazari1351@iau.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۲۷، پذیرش: ۱۴۰۴/۰۴/۰۸، نقد و بررسی: ۱۴۰۵/۰۱/۰۱ ❦ ❦ ❦ وب‌گاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: سرریزهای متناسب خطی (ساترو) دسته ای از سرریزهای لبه تیز هستند که به دلیل حساسیت کم نسبت به تغییر عمق بالادست از دقت نسبتاً بالایی برخوردار می‌باشند و رابطه میان دبی و عمق آب خطی است، در این پژوهش بر اساس مبانی نظری موجود ابتدا معادلات ریاضی حاکم بر سرریزها توسط بسط تابع گاما و \pm انتگرال ایل استخراج گردید. در شرایط کاربردی مقطع تئوری با ترکیب یک مقطع مستطیلی پایه اصلاح گردید. به منظور بررسی تجربی و آزمایشگاهی حساسیت هیدرولیکی مقطع اصلاح شده تعداد ۱۲ مدل با عرض و ارتفاع مستطیل پایه مختلف طراحی و ساخته شد. در آزمایشگاه هیدرولیک برای بررسی تناسب رابطه عمق و جریان عبوری تعداد حدود ۴۵۰ آزمایش با دبی ۲/۵ الی ۳۵ لیتر در ثانیه و اندازه گیری عمق انجام گرفت. نتایج حاصل نشان داد که در تمام مدل‌های مورد مطالعه رابطه دبی - عمق به صورت خطی و ضریب جریان عبوری تابعی از نسبت های بدون بعد عمق آب به ارتفاع تاج سرریز و عدد فرود می باشد. با استفاده از بخش عمده ای از داده های آزمایش و پارامترهای بی بعد رابطه ای جهت ضریب جریان عبوری استخراج گردید. مقایسه نتایج حاصل از رابطه بدست آمده با نتایج آزمایشگاهی نشان داد که میزان خطای نسبی موجود در حد فاصله $\pm 5\%$ می باشد.

کلیدواژگان: سرریز متناسب، ضریب دبی، تابع انتگرال ایل، تابع گاما.

۱- مقدمه

حرکت پرتابی و بدون تماس با صفحه پائین دست ریزش می یابد. سرریزهای لبه تیز در شرایط اندازه گیری با دقت بالا در آبراهه (کانالها) و صنعت کاربرد دارند (Boss, 1989). در زمینه سرریزها تحقیقات زیادی توسط محققان انجام شده است. ضریب دبی در سرریزهای مستطیلی با فشردگی جانبی توسط Kindsvater and Carter (1957) بررسی شد و ایشان نشان دادند که این ضریب تحت تاثیر نسبت های بی بعد طول به عرض سرریز و نسبت عمق آب به ارتفاع تاج سرریز می باشد.

Sohrabi et al (2011) در تحقیقی با عنوان بررسی آزمایشگاهی و عددی سرریزهای ذوزنقه ای متناسب خطی به این نتیجه رسیدند که سرریزهای ساخته شده به صورت ذوزنقه ای در ۷۴ درصد حالت های دارای رابطه خطی

اندازه گیری جریان آب یا آبسنجی (هیدرومتری) از دیر باز مورد توجه مهندسان هیدرولیک بوده است و روشهای پرشماری در این زمینه ابداع شده است. از انواع سازه های اندازه گیری جریان، سرریزهای مثلثی و ذوزنقه ای و ... می باشند. در اغلب سرریزهای معمولی رابطه بین دبی و ارتفاع غیر خطی می باشد. لذا نمودار دبی - عمق به صورت غیر خطی می باشد. در سرریزهایی که رابطه دبی و عمق خطی و متناسب می باشد در شرایط معمول دقت اندازه گیری دبی بیشتر می باشد (Keshava Murthy and Giridhar, 1989).

در سرریزهای لبه تیز طول تاج در جهت جریان کمتر یا مساوی ۲ میلی متر بوده و جریان از روی آن به شکل

دو حالت رابطه های را برای محاسبه ضریب دبی ارائه دادند به طوری اثر رسوبگذاری را نیز در پشت سرریز مد نظر قرار دادند. در همه سرریزها به عنوان یک سازه لندازه گیری جریان رابطه دبی - عمق همیشه به صورت متناسب می باشد. در حالت کلی دبی عبوری از روی هر نوع سرریز می تواند با عبارت $Q \propto h^n$ بیان شود. در سرریزهای نوع مستطیلی، مثلثی و دوزنقه ای توان n اغلب مقادری غیر از یک می باشد. در سرریزهای مستطیلی و دوزنقه مقدار n برابر $\frac{3}{2}$ و در سرریز مثلثی مقدار n برابر $\frac{5}{2}$ می باشد و لذا دبی با ارتفاع آب رابطه غیر خطی دارد. در رابطه بالا با اعمال ضریب تبدیل k به تساوی تبدیل شود $Q = kh^n$ که بسته به نوع سرریز این ضریب متفاوت می باشد. در صورتی که که طراحی سرریز طوری انجام شود که مقدار n بیشتر از یک باشد این نوع سرریز از نوع مرسوم مانند مستطیلی، مثلثی و دوزنقه ای می باشد. در صورتی که مقدار n مقادری کوچکتر یا مساوی یک باشد سرریز از نوع متناسب (proportional) می باشد. در صورتی که مقدار n برابر یک باشد، یعنی بین دبی و ارتفاع آب پشت سرریز رابطه خطی برقرار باشد به این نوع سرریز، ساترو (Sutro) یا متناسب می گویند. سرریزهای متناسب خطی یکی از انواع سرریزهای لبه تیز می باشد که رابطه ی دبی - ارتفاع در آن ها خطی است و به همین دلیل درجه دقت بالاتری نسبت به سرریزهای غیر خطی مشابه دارند. این نوع سرریز که به صورت متقارن و یا نامتقارن می تواند ساخته شود دارای کاربرد فراوان در کارهای آبی و کشاورزی و صنایع شیمیایی می باشد. از آنجا که فناوری (تکنولوژی) برش لیزر با دقت بالا امروزه قابلیت ساخت هر نوع هندسه را بر روی ورق های فلزی دارد، لزوم بررسی هیدرولیک و شناخت رفتار جریان در این نوع سرریزها ضرورت دارد. در این تحقیق در آغاز با شناخت معادله های حاکم و استفاده از تابع انتگرال ابل و تابع های گاما رابطه حاکم بر انواع سرریزها بررسی شد و سپس در مورد سرریزهای ساترو در آزمایشگاه چندین آزمایش انجام شد.

هستند. همچنین در این تحقیق مدل سازی توسط نرم افزار Fluent انجام شد و نتایج نشان داد که این نرم افزار در شبیه سازی جریان برای سرریز های ذکر شده دارای دقت قابل قبولی بوده است. (Kianmehr et al. (2014) به بررسی آزمایشگاهی سرریزهای تناسبی خطی برای مجاری دایره ای پرداختند نتایج آنان نشان داد برای سرریز مثلثی معکوس ۵۰٪ داده ها و برای سرریزهای دودکشی و دو مثلثی معکوس به ترتیب ۶۶٪ و ۷۳٪ داده ها دارای خطای نسبی بین ۱٪± از رابطه خطی برازشی هستند. Ghafari and et al. (2020) به بررسی آزمایشگاهی ضریب جریان سرریزهای تناسبی خطی در آبگیر جانبی پرداختند نتایج آنان نشان داد متوسط خطای معادله های ارائه شده برابر با ۱/۵ درصد است که بیانگر دقت مناسب ارائه شده می باشد همچنین در میان سرریزهای تناسبی خطی، سرریز دو مثلثی معکوس با محدوده رفتار خطی بیشتر دارای عملکرد بهتر و مطلوب تر به عنوان آبگیر جانبی دارا می باشد. (Vatankhah (2012) رابطه بین ضریب دبی سرریزهای لبه تیز و مقطع مرکب را توسط تجزیه و تحلیل (آنالیز) ریاضی بررسی کرد. بررسی های وی با روش فنی (تکنیک) بهینه سازی ابعاد بهینه سرریزهای نامتعارف ارائه شده است. (Baddour (2008) در زمینه هندسه سرریزهای چند وجهی بررسی هایی انجام داد و ضریب دبی این نوع سرریزها را ارائه داد. (Rakhshandehrou and Daneshmand (2001) اثر کشش سطحی بر رفتار جریان بر روی سرریز سهمی شکل را بررسی کردند و نشان دادند که برای ارتفاع آب تا حدود ۷ سانتی متر روی سرریز اثر کشش سطحی معنی دار بوده و دبی واقعی عبوری بایستی با ضرب در یک عامل تصحیح اصلاح شود. (Haszpara (1966) در زمینه سرریزهای با رابطه غیر خطی و توان ۰/۵ بررسی هایی را انجام داد و معادله سرریز یاد شده را نیز ارائه کرده است. (Vatankhah (2009) and Kouchekzadeh رابطه سرریزهای چند وجهی را بررسی کردند. ایشان در این تحقیق با استفاده از تابع گاما (Gamma function) توانستند معادله حاکم را استخراج و در مورد رابطه های خطی سرریزها نیز رابطه ای ارائه کردند. (Balochi and Zeinivand (2011) به مقایسه ضریب دبی عبوری دو مدل ترکیبی سرریز لبه تیز پرداختند و در

۲- مواد و روش‌ها

۱-۲- رابطه‌های ریاضی حاکم بر هندسه

سرریزهای لبه تیز

چنانچه برابر شکل ۱ مقطع هندسی سرریز لبه تیز، سطح هاشور زده شده در نظر گرفته شود، و مقطع به صورت متقارن نسبت به محور x باشد. در این صورت مقدار دبی عبوری از این مقطع از رابطه $Q = C \int_0^h \sqrt{h-x} f(x) dx$ به دست می‌آید.

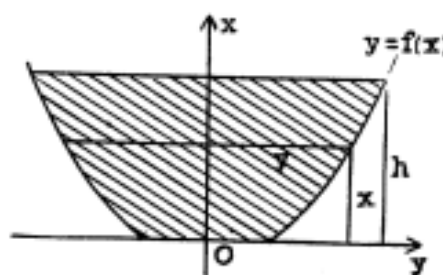


Fig. 1 General Cross section of Sharp weir
شکل ۱ سطح مقطع عمومی یک سرریز لبه تیز

که در این رابطه C مقدار ثابت و Q دبی عبوری از مقطع سرریز که تابع شکل سطح مقطع $f(x)$ می‌باشد. در اینجا هدف تعیین تابع $f(x)$ به طوری که رابطه بین دبی Q و عمق آب روی سرریز h به صورت متناسب و از رابطه $Q = k'h^m, m > 0$ پیروی کند می‌باشد. بنابراین می‌بایست تابع $f(x)$ در انتگرال بالا معلوم باشد. برای این منظور به ترتیب زیر اقدام شود.

$$\int_0^h \sqrt{h-x} f(x) dx = kh^m, k = \frac{C'}{C} \quad (1)$$

اگر از رابطه (۱) نسبت به h مشتق گرفته شود در این صورت داریم:

$$\int_0^h \frac{f(x)}{\sqrt{h-x}} dx = 2kmh^{m-1} \quad (2)$$

حل رابطه (۲) منجر به حل رابطه (۱) نیز می‌شود. اما رابطه (۲) به صورت فرم انتگرال ابل می‌باشد که به صورت (۳) است

$$\int_a^x \frac{f(y) dy}{(x-y)^s} = g(x), 0 < s < 1 \quad (3)$$

و حل این انتگرال به صورت (۴) می‌باشد.

$$f(x) = \frac{\sin s \pi}{\pi} \int_a^x \frac{g'(y) dy}{(x-y)^{1-s}} \quad (4)$$

تابع $g(x)$ تابع پیوسته و مشتق آن نیز پیوسته، مگر در بعضی نقطه‌ها، به طوری که $g(a)=0$ در صورتی که $m \geq 2$ باشد در این صورت

$$f(x) = \frac{2km(m-1)}{\pi} \int_0^x \frac{y^{m-2} dy}{\sqrt{x-y}}, m \geq 2 \quad (5)$$

چنانچه تغییر متغیر $y = xt$ در بخش انتگرال معادله بالا انجام شود در این صورت داریم:

$$\int_0^x \frac{y^{m-2} dy}{\sqrt{x-y}} = x^{m-3/2} \int_0^1 \frac{t^{m-2} dt}{\sqrt{1-t}} \quad (6)$$

با استفاده از نظریه (تئوری) تابع گاما که به صورت (۷) می‌باشد.

$$\int_0^1 \frac{t^{p-1} dt}{(1-t)^{1-q}} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (7)$$

و با کاربرد آن در معادله (۵) تابع $f(x)$ به صورت (۸) به دست می‌آید.

$$f(x) = \frac{2km(m-1)}{\pi} \cdot \frac{\Gamma(m-1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m-\frac{1}{2})} x^{m-\frac{3}{2}} \quad (8)$$

با توجه به اینکه $k\Gamma(k) = \Gamma(k+1)$ و همچنین $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ لذا معادله بالا به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$f(x) = \frac{2k\Gamma(m+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(m-\frac{1}{2})} x^{m-\frac{3}{2}}; m \geq 2 \quad (9)$$

در صورتی که $m=n$ به طوری که n عدد صحیح و مثبت و $n \geq 2$ بنابراین داریم:

$$f(x) = \frac{k}{\pi} \cdot \frac{2^n n!}{1 \times 3 \times 5 \dots \times (2n-3)} x^{n-\frac{3}{2}} \quad (10)$$

در صورتی که $m = n + \frac{1}{2}$ باشد، در این صورت داریم:

$$f(x) = k \frac{1 \times 3 \times 5 \dots \times (2n+1)}{2^n (n-1)!} x^{n-1} \quad (11)$$

و در صورتی که $n=2$ باشد، بنابر رابطه (۵) تابع $f(x)$ به صورت یک سهمی می‌باشد و رابطه دبی با جذر عمق متناسب می‌گردد. و در این حالت ($n=2$) در رابطه (۱۱) تابع $f(x)$ به صورت خطی و شکل سرریز به صورت مثلثی می‌باشد و دبی با توان $\frac{5}{2}$ عمق آب متناسب می‌باشد $(Q \propto h^{\frac{5}{2}})$. به راحتی می‌توان نشان داد که رابطه (۴) در شرایط کلی قابل کاربرد می‌باشد. بدین منظور اگر تغییر

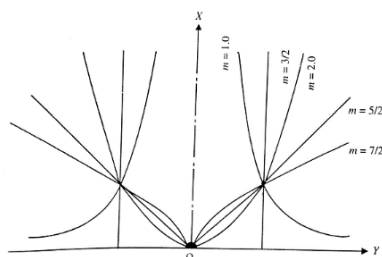


Fig. 2 Types of weir profiles for different values of m
شکل ۲ انواع نیمرخ سرریزها برای مقادیر مختلف m

در شکل بالا مشخص است که برای $m < \frac{3}{2}$ هندسه بدنه سرریز به صورت هموگرافیک و در جهت محور y به سمت بینهایت و با محور y مجانب می گردد، در این شرایط سرریز به شکل یک منحنی با عرض پایه بینهایت بایستی ساخته شود که از نظر اجرایی به مشکل برخورد می کند. لذا در عمل برای رفع این مشکل روشهایی توسط محققان مختلف از جمله ساترو، کشوا مورتی و دیگران ارائه شده است. اندیشه و نظر (ایده) اصلی سرریزهای خطی توسط استوات مطرح شد. در این صورت سرریز طوری طراحی شد که عرض تاج آن به صورت نامحدود و به سمت بینهایت نمایان می شد، که این وضعیت از نظر عملی غیر قابل کاربرد بود. ساترو با اضافه کردن یک قسمت پایه مستطیلی این مشکل را برطرف کرد و یک شکل سرریز متناسب خطی و اجرایی بوجود آورد که در اصطلاح به آن Proportional weir یا به اختصار P-Weir گویند. بنابر شکل ۳ سرریز ساترو دارای یک قسمت مستطیلی پایه که با منحنی بالایی و تکمیل کننده هماهنگ می باشد تشکیل شده است.

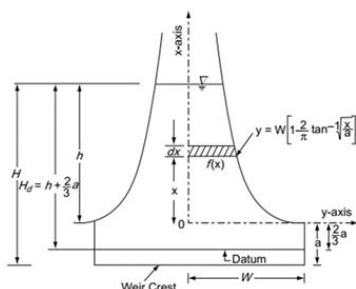


Fig. 3 Definition sketch of Sutro weir (linear proportional)

شکل ۳ جزئیات سرریز ساترو (متناسب خطی)

بنابر شکل ۳ در این نوع سرریزها یک صفحه مرجع که به اندازه $\frac{1}{3}$ بالای تاج می باشد در نظر گرفته می شود، به ازای

متغیر $x=ht$ را در نظر گرفته و در رابطه (۱) قرار داده شد.

$$\int_0^h \sqrt{1-t} f(ht) dt = kh^{m-\frac{3}{2}} \quad (12)$$

چنانچه مقدار $f(ht) = ch^n t^n$ در انتگرال بالا قرار داده شود.

$$c \int_0^1 \sqrt{1-t} t^n dt = kh^{m-n-\frac{3}{2}} \quad (13)$$

سمت چپ انتگرال بالا مستقل از h می باشد، لذا سمت راست توان h بایستی صفر باشد، در نتیجه $n = m - \frac{3}{2}$ و

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = c \int_0^1 \sqrt{1-t} t^n dt = k \quad \text{لذا} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{لذا داریم:}$$

$$c = \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\frac{1}{2})}, \quad m > \frac{1}{2} \quad (14)$$

بنابراین برابر رابطه (۴) معادله کلی سرریزها در شرایط $m > \frac{1}{2}$ به صورت کلی زیر ارائه می شود.

$$f(x) = \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\frac{1}{2})} x^{m-\frac{3}{2}}; \quad m > \frac{1}{2} \quad (15)$$

در صورتی که $m = \frac{3}{2}$ باشد سرریز به شکل هندسی مستطیل و رابطه دبی عمق به صورت $Q = k'h^{\frac{3}{2}}$ و در صورتی که $m=1$ باشد، منحنی سرریز به صورت $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ و رابطه دبی عمق به صورت $Q = k'h$ متناسب خطی (سرریز ساترو) می باشد. معادله کلی سرریزها توسط (Cowgill (1944) و Banks (1954) با در نظر گرفتن رابطه دبی عمق به صورت $Q = bh^m$ در شرایط $m > \frac{1}{2}$ به صورت رابطه (۷) که مشابه رابطه (۴-۱) می باشد ارائه شده است.

$$y = f(x) = \frac{b}{2c_d \sqrt{2g\pi}} \cdot \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\frac{3}{2})} x^{m-\frac{3}{2}} \quad (16)$$

دبی عبوری از سرریز لبه تیز با شکل بدنه رابطه (۱۶) از رابطه (۱۷) به دست می آید.

$$Q = \int_0^h 2c_d f(x) \sqrt{2g(h-x)} dx \quad (17)$$

که در رابطه های (۱۶) و (۱۷) : b ثابت تناسب و Γ تابع گاما و c_d ضریب تجربی دبی سرریز می باشد. با توجه به رابطه های بالا و قرار دادن مقادیر تابع گاما به ازای m های مختلف شکل نیمرخ (پروفیل) سرریزها بر حسب مقدار m می تواند متفاوت و به صورت نمودار شکل ۲ باشد.

Excel و w و a مختلف مطابق جدول ۱ با استفاده از نرم افزار AutoCAD آن به محیط AutoCAD منحنی های مربوطه ترسیم و در نهایت توسط دستگاه لیزر برش بر روی صفحه ها به ضخامت BOS (1989) 2mm به منظور لبه تیز شدن سرریز، برش و حکاکی شد.

در جدول ۱ ابعاد سرریزهای مورد آزمایش نشان داده شده است. برای انجام آزمایش ها برابر شکل ۵، از یک مخزن به طول ۲، عرض ۱ و ارتفاع ۱/۲ متر در ابتدای فلوم به طول ۶، عرض ۱ و ارتفاع ۰/۶ متر که روی پایه به ارتفاع ۱/۵ متر از زمین نصب شده است استفاده شد. سازه اصلی فلوم، فلزی و دیواره ها و کف، شیشه به ضخامت یک سانتی متر می باشد. سامانه گردش آب به صورت چرخشی می باشد. جریان از منبع زیرزمینی به ابعاد ۲×۳×۴ متر از طریق لوله ای به قطر ۶ اینچ توسط پمپ وارد مخزن روباز در بالا دست شده تا به همراه شبکه های توری از تلاطم و آشفتگی آن کاسته شده و پس از آن از عبور از آبراهه اصلی از روی سرریز که در انتهای آبراهه اصلی بود عبور کند. سامانه اندازه گیری دبی توسط یک دبی سنج مغناطیسی از نوع مگاب (با دقت ۰/۲± تا ۰/۵± کنترل شده و به منظور کنترل مضاعف دبی در هر آزمایش، از سرریز دوزنقه ای شکل واسنجی شده در خروجی فلوم استفاده شد. سرریز دوزنقه ای استاندارد (Cipoltti Weir) با عرض کف ۲۰ سانتی متر و شیب های کناری ۱۴ درجه استاندارد با ورق گالوانیزه به ضخامت ۲ میلی متر ساخته شده است به گونه ای که جریان از روی سرریز به صورت لبه تیز صورت می گیرد. با برقراری جریان، دبی و عمق آب روی سرریز اندازه گیری و در همه در تمام

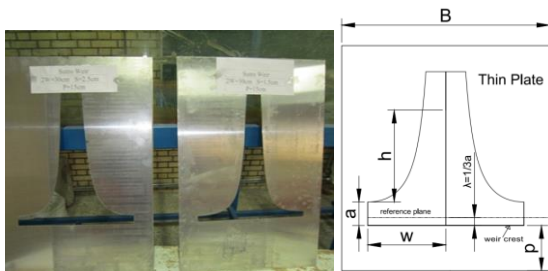


Fig. 4 Geometry of Sutro Weir Perforated on the Al-Plate with 2mm thickness

شکل ۴ سرریز برش شده ساترو و فرانسجه هندسی، حکاکی شده روی صفحه آلومینیومی به ضخامت ۲ میلی متر

همه عمق های بالای صفحه مرجع رابطه دبی و عمق به صورت متناسب خطی عمل می کند.

۲-۲- بررسی آزمایشگاهی

۲-۲-۱- تحلیل ابعادی

کاربرد تحلیل ابعادی در یک پدیده فیزیکی در واقع تعیین رابطه بین متغیرهای مستقل و متغیرهای وابسته پدیده است. در این قسمت تحقیق، هدف بررسی ضریب دبی در سرریزهای ساترو و ارتباط آن با شرایط هیدرولیکی و هندسی می باشد، لذا بنابر نتایج بررسی های پیشین و هیدرولیک جریان در این نوع سرریز ها، دبی عبوری از سرریز ها طبق شکل ۳ و بررسی های از رابطه ۹ پیروی می کند.

$$Q = C \int_0^h \sqrt{h-x} f(x) dx \quad (18)$$

$$f_1(h, W, a, B, P, V, \mu, \rho, g, \sigma)$$

که در رابطه فوق :

B: عرض آبراهه اصلی، p: ارتفاع تاج سرریز تا کف آبراهه، V: سرعت متوسط جریان (سرعت نزدیک شدن approach) (velocity) a: ارتفاع سرریز پایه مستطیلی، h: عمق آب، μ : لزجت پویایی (دینامیکی) سیال، σ : کشش سطحی سیال، q: دبی جریان، γ : وزن مخصوص سیال، W: نصف عرض تاج سرریز و $f(x)$ تابع شکل هندسه سرریز می باشد. با استفاده از قضیه باکینگهام و استفاده از نظریه π رابطه بی بعد زیر استخراج شد.

$$C_d = \frac{Q}{2\sqrt{2g}Wa^2} = f_2\left(\frac{h}{W}, \frac{h}{P}, \frac{h}{a}, \frac{h}{(2W+a)}, \frac{h}{h+P}, R_e, W_b, F_r\right) \quad (19)$$

که در این رابطه $R_e = \frac{\rho V h}{\mu}$ عدد بی بعد رینولدز، $W_b = \frac{\rho h V^2}{\sigma}$ عدد بی بعد وبر و $F_r = \frac{V}{\sqrt{gh}}$ عدد بی بعد فرود می باشد. رابطه بین فرانسجه (پارامتر) های بی بعد و ضریب دبی C_d را می توان در آزمایشگاه با ساخت مدل فیزیکی به دست آورد. با توجه به اینکه سرریز انتخابی ساترو با پایه مستطیلی می باشد، و بنابر توصیه های $a > 0.005m$ ، $\frac{2w}{p} \geq 1$ و $2w > 0.15m$ لذا مطابق شکل ۴ در آغاز با توجه به معادله بدنه سرریز ساترو و در نظر گرفتن

جدول ۱ ابعاد و اندازه سرریزهای ساترو ساخته شده بر مبنای شکل ۴

Table. 1 Dimension of Sutro Weir on base Fig. 4

2W(cm)	15		22.5		30		45					
P(cm)	10		10		15		15					
a(cm)	2.5	5	7.5	2	3.5	5	1.5	2.5	4.5	1.5	2.5	4.5

شرایط با استفاده از رابطه های حاکم ضریب تجربی دبی سرریزها استخراج شد. به منظور اندازه گیری عمق آب پیش از سرریز ساترو از عمق سنج های نقطه ای و اشلهای اندازه گیری با دقت ۰/۱ میلی متر استفاده شد (مطابق شکل ۶). محل نصب این عمق سنج ها مطابق دستور کار BOS (1989) جائیکه انحنای سطح آب کم باشد که حدود ۳ الی ۴ برابر ارتفاع پیشینه آب پیش از سرریز در نظر گرفته شد. شکل ۵

شرایط با استفاده از رابطه های حاکم ضریب تجربی دبی سرریزها استخراج شد. به منظور اندازه گیری عمق آب پیش از سرریز ساترو از عمق سنج های نقطه ای و اشلهای اندازه گیری با دقت ۰/۱ میلی متر استفاده شد (مطابق شکل ۶). محل نصب این عمق سنج ها مطابق دستور کار BOS (1989) جائیکه انحنای سطح آب کم باشد که حدود ۳ الی ۴ برابر ارتفاع پیشینه آب پیش از سرریز در نظر گرفته شد. شکل ۵

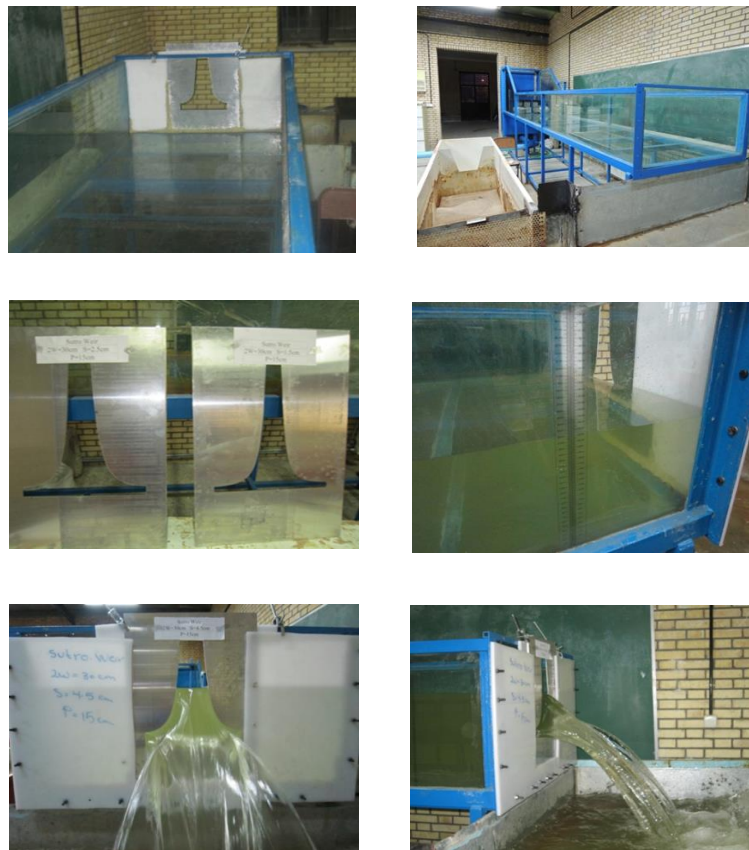


Fig. 5 Experimental Flume with Sutro Weir in Operation

شکل ۵ آبراهه آزمایشگاهی و سرریزهای نصب شده هنگام آزمایش



Fig. 6 Flowmeter (Megap 3000) and cipolletti Weir

شکل ۶ دبی سنج مگاپ ۳۰۰۰ و سرریز دوزنقه ای سیپولتی

مگاپ و سرریز دوزنقه ای به عرض ۲۰ سانتی متر واسنجی و (کالیبره) شده توسط دی سنج فراصوتی (آلتراسونیک) که از رابطه عمومی سرریزها پیشتر تعیین شده بود و به صورت $Q = 0.0178 \times 20 \times H_z^{\frac{3}{2}}$ به دست آمد و عمق Hz توسط اشل مدرج شده با دقت ۱/ میلی متر در بالا دست سرریز دوزنقه ای استاندارد به دست آمده است. نتایج حاصل به صورت جدول ۲ به طور نمونه نشان داده شده است. جهت تجزیه و تحلیل همه عمق های بیشتر از مقدار a عرض مستطیل پایه مورد استفاده قرار گرفته است (H>a). در جدول ۲ مقادیرهای b و k با استفاده از رابطه های ۱۱ به صورت $b = \frac{Q}{(H - \frac{1}{3}a)}$ و $K = \frac{b}{W\sqrt{a}}$ محاسبه شده است. همه آزمایش ها در محدوده دی تا حدودی نزدیک به یک مشاهده شد.

نمایی از آزمایش ها بر روی سرریز ساترو را نشان می دهد. همچنین همه آزمایش ها در شرایط هیدرولیکی آزاد انجام و عمق پایین دست هیچ تاثیری بر دی تخلیه سرریزها نداشت.

۳- بحث و نتایج

برای تجزیه و تحلیل جریان عبوری از سرریزهای مورد آزمایش از رابطه های ارایه شده در بخش های پیش استفاده شد. ضرایب و دی عبوری از سرریزهای مورد آزمایش از رابطه های ۱۱ به دست آمد.

$$Q = b \left(h + \frac{2}{3}a \right) = b \left(H - \frac{1}{3}a \right) = bH_d \quad (20)$$

$$b = WKa^{\frac{1}{2}}$$

$$K = 2C_d\sqrt{2g}$$

$$C_d = \frac{K}{2\sqrt{2g}}$$

فراسنجه های h و H و Hd روی شکل ۳ نشان داده شده است. در رابطه های بالا دی از طریق دی سنج مغناطیسی

جدول ۲ نمونه ای از نتایج به دست آمده از آزمایش های سرریز ساترو با مستطیل پایه به ابعاد ۲۲/۵ در ۳/۵ سانتی متر

Table. 2 Sample test in Sutro weir with 2w=22.5 \$ a=3.5cm

2w=22.5 cm	a=3.5 cm	H0=10.8 cm	p=10 cm				
Hz cm	Q L/s	Hs cm	H cm	$\left[H - \frac{1}{3}a \right]$ cm	b	K	Cd
5.900	5.102	16.200	5.400	4.233	0.121	5.726	0.646
9.000	9.612	19.300	8.500	7.333	0.131	6.228	0.703
9.800	10.922	21.500	10.700	9.533	0.115	5.443	0.614
11.300	13.523	24.200	13.400	12.233	0.111	5.252	0.593
13.700	18.052	28.000	17.200	16.033	0.113	5.350	0.604
14.000	18.648	29.000	18.200	17.033	0.109	5.202	0.587
15.300	21.305	31.000	20.200	19.033	0.112	5.318	0.600
15.600	21.935	32.200	21.400	20.233	0.108	5.151	0.581
16.600	24.078	34.000	23.200	22.033	0.109	5.192	0.586
17.000	24.953	34.500	23.700	22.533	0.111	5.262	0.594

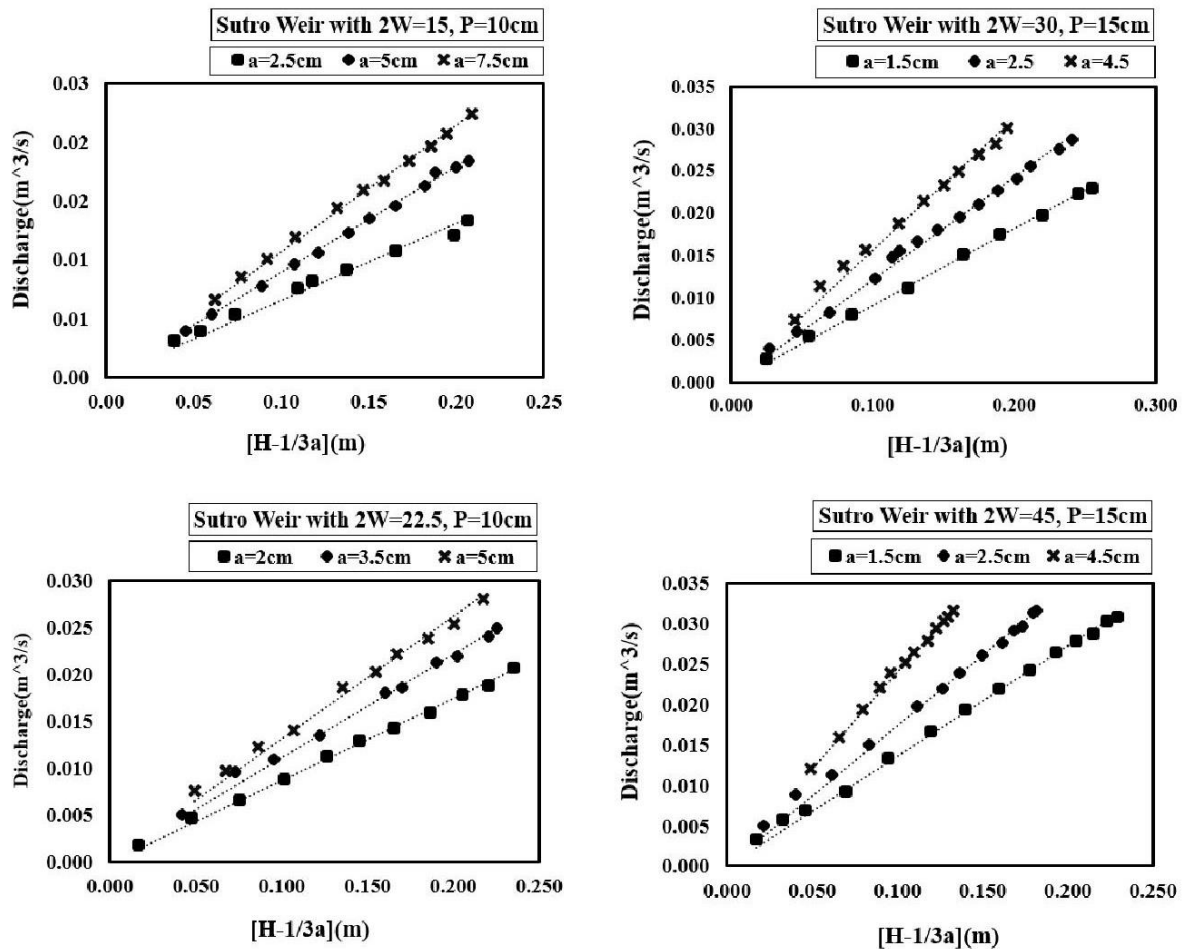


Fig. 7 Discharge – Head curve in Sutro weir

شکل ۷ نمودار دبی - عمق در سرریز ساترو

اولویت تاثیر فراسنجه های بی بعد با استفاده از نرم افزار SPSS-21 در آغاز این کار صورت گرفت که نتایج نشان داد بیشترین تاثیر بر روی ضریب دبی مربوط به فراسنجه های بی بعد $\frac{H}{W}$ ، $\frac{H}{P+H}$ و Fr می باشد. نتایج نشان داد که رابطه (۶) که به صورت غیر خطی برای ضریب دبی برازش شده است مناسب می باشد. و مقدار ضریب همبستگی این رابطه $R^2 = 0.9348$ به دست آمد.

$$C_d = 0.625 + 0.118 \left(\frac{H}{H+P}\right)^{2.980} + 0.086 \left(\frac{H}{W}\right)^{-0.589} - 0.296(F_r)^{0.31} \quad R^2 = 0.9348 \quad (21)$$

به منظور ارزیابی رابطه (۱۹) مقادیر ضریب دبی محاسبه شدنی از رابطه بالا و همچنین ضریب دبی به دست آمده از برخی از نتایج آزمایشگاه مقایسه شد که نتایج آن در شکل ۸ نشان داده شده است.

بنابر نتایج به دست آمده از تحلیل ابعادی که فراسنجه های تاثیر گذار بر ضریب دبی مطابق رابطه ۱۰ می باشد. فراسنجه های بی بعد بالا برای همه آزمایش ها محاسبه شد، همچنین همه آزمایش ها در شرایط جریان آشفته صورت گرفته است یعنی عدد رینولدز Rn از عدد ۵۰۰۰ که معیار آبراهه روباز برای جریان آشفته می باشد بیشتر است. همچنین عدد وبر نیز محاسبه شده است، این عدد معیار اثر کشش سطحی می باشد البته در شرایطی که عمق آب از حدود ۲ الی ۳ سانتی متر بیشتر باشد می توان از تاثیر این فراسنجه هم صرف نظر کرد (Nikpiek and Kashefipour, 2016) همچنین مقدار سرعت نزدیک شدن (Approach Velocity) محاسبه و مقدار ارتفاع همانند آن محاسبه شده است. $(Ha = \frac{V^2}{2g})$ نتایج نشان می دهد که تاثیر سرعت نزدیک شدن را نیز می توان نادیده گرفت به طوری که در اغلب موارد مقدار $(Ha = \frac{V^2}{2g})$ صفر می باشد. به منظور بررسی

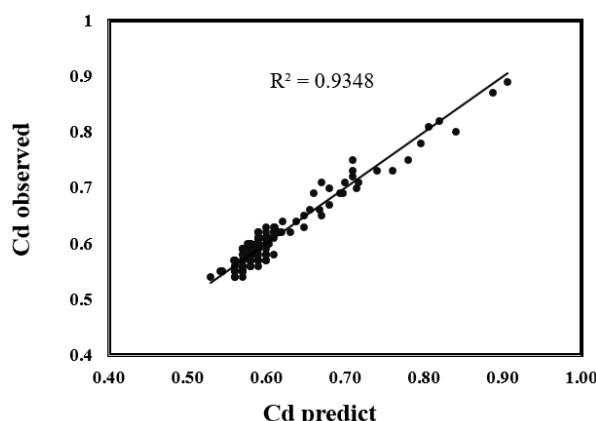


Fig. 8 Relation of Coefficient Discharge Experimental & Predict with Equation 19

شکل ۸ رابطه ضریب دبی آزمایشگاهی و پیش بینی شده توسط رابطه ۲۱

به منظور مقایسه دبی به دست آمده از انجام آزمایش‌ها و ناشی از محاسبه ی رابطه ی ۱۹ میزان خطای نسبی (e%) در برابر فراسنجه بی بعد $H/(H+P)$ به صورت رابطه زیر محاسبه و از روی داده های خطای نسبی شکل ۹ ترسیم شد.

در این رابطه Q_{obs} دبی مشاهده شدنی در آزمایش‌ها و Q_{pre} دبی محاسبه شدنی از رابطه (۲۲) می‌باشد.

$$e(\%) = \left(\frac{Q_{obs} - Q_{pre}}{Q_{obs}} \right) \times 100 \quad (22)$$

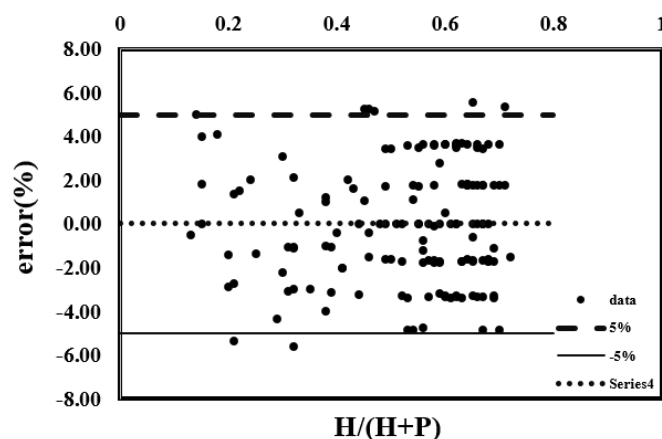


Fig. 9 Relative error against $H/(H+P)$ of the tested overflows

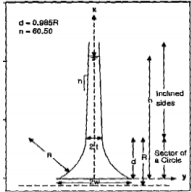
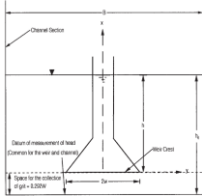
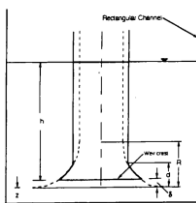
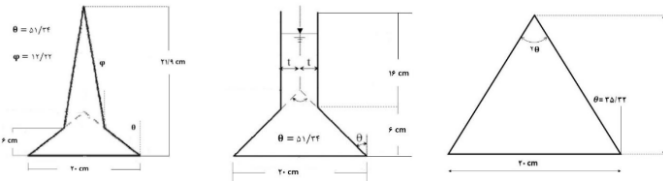
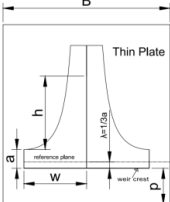
شکل ۹ خطای نسبی در برابر $H/(H+P)$ از سرریزهای آزمون شده

قسمت طراحی بدنه سرریز ساترو مطرح شده این سرریز دارای یک بخش مستطیلی با عرض $2w$ و ارتفاع a می باشد که اندازه های این مستطیل بر روی ضریب Cd اثرگذار می باشد. لذا برای بررسی تاثیر این ابعاد با توجه به داده های آزمایش نمودار ۱۰ ترسیم شد. در این نمودار محور افقی ارتفاع سرریز مستطیلی a و محور عمودی تغییرپذیری Cd در چهار شرایط عرض سرریز مستطیلی $2w$ نشان داده شده است. با افزایش مقدار a ضریب Cd برای هر چهار اندازه $2w$ کاهش پیدا می کند، همچنین با افزایش مقدار $2w$ نیز مقدار ضریب Cd افزایش می‌یابد.

همان طور که در شکل ۹ مشاهده می شود با توجه به رفتار خطی سرریزهای ساترو در همه آزمایش‌ها رابطه پیشنهادی با توجه به خطای نسبی در محدودی $\pm 5\%$ قابل قبول می باشد. به منظور مقایسه نتایج بررسی‌های محققان دیگر در مورد انواع مقطع‌ها هندسی بر روی ضریب دبی جریان عبوری Cd که رفتار خطی دارند با نتیجه این تحقیق جدول (۳) تشکیل شد. همان طور که از این جدول مشخص شده محدوده تغییر پذیری Cd 0.06 الی 0.18 می باشد که نتیجه این تحقیق هم در این محدوده می باشد. همان طور که در

جدول ۳ مقایسه ضریب دبی جریان عبوری (Cd) از برخی سرریزهای متناسب توسط دیگر محققان با تحقیق حاضر

Table. 3 Comparison of flow rate coefficient (Cd) of some proportional overflows by other researchers with the current research

Flow coefficient Cd	Flow depth (cm)	Spillway Cross-Section Geometry	Reference
0.61-0.62	10-60	Inverted V-Notch 	K. Keshava Murthy and D. P. Giridhar (1989)
0.612-0.625	10-20	Symmetrical sharp-crested weir 	K. Keshava Murthy, and M. N. Shesha Prakash (1994)
0.633-0.634	10-80	Chimney weirs 	K. Keshava Murthy and C. Rangaraj (1997)
0.645-0.665	10-50	A Practical (Sector Based) Linear Weir 	K. Keshava Murthy M.ISH N. V. C. Swamy I C. Rangara (1998)
0.660-0.880	2-14	Two Reverse Triangles Reverse, chimney and Triangular Reverse Linear Weir 	Kianmehr, H., kuchakzadeh, S., Vatankeh (2014)
0.624-0.642	5-25	Geometry of Sutro Weir 	Current research (2025)

۴- جمع بندی

برخورد می کند لذا محققان مختلف برای رفع این مشکل نظر (ایده‌های) متفاوت ارائه کرده اند. اولین نظر (ایده) طراحی عملی بدنه سرریزهای متناسب و به صورت خطی توسط استوات و بعدها توسط ساترو کامل شد. بررسی‌های گوناگونی توسط محققان مختلف در این زمینه انجام شد از

در این تحقیق در آغاز با استفاده از تابع انتگرال ایل و بسط تابع گاما شکل و هندسه بدنه سرریزها طراحی شد. با توجه به اینکه منحنی‌های بدنه سرریز از نظر تئوری به سمت بینهایت میل می کنند لذا از نظر اجرای ساخت به مشکل

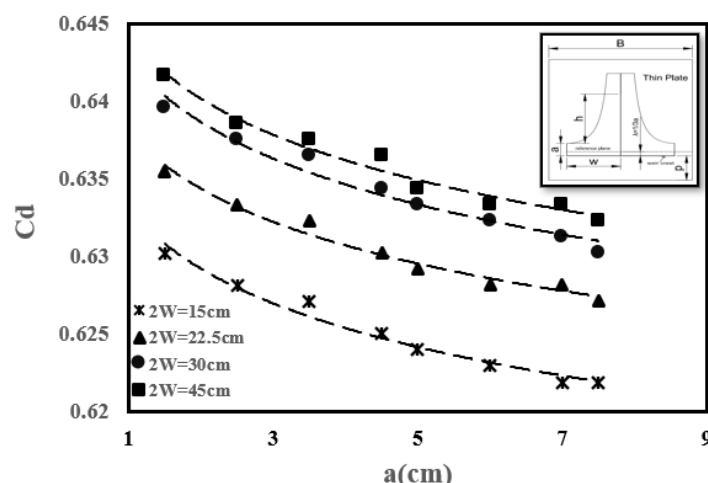


Fig. 10 The relationship between the dimensions of the base rectangle and the discharge coefficient in the Sator spillway

شکل ۱۰ رابطه بین ابعاد مستطیل پایه و ضریب دبی در سرریز ساترو

متوسط برابر ۰/۶۳۴ می‌تواند در نظر گرفته شود. همچنین در شکل ۱۰ اثر اندازه طول $2w$ و ارتفاع a قسمت سرریز مستطیلی پایه بر ضریب Cd ترسیم شد که نتایج نشان داد با افزایش a ضریب دبی کاهش و با افزایش $2w$ این ضریب افزایش می‌یابد. البته لازم به یادآوری است اندازه مستطیل پایه $a > 1\text{cm}$ و $2w > 15\text{cm}$ به توصیه Bos(1976) در نظر گرفته شود.

۵- سپاسگزاری

بدینوسیله از مسئولان حوزه معاونت پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی اقلید به جهت فراهم آوردن امکانات لازم برای انجام این تحقیق تشکر و قدردانی می‌شود.

تضاد منافع نویسندگان

نویسندگان این مقاله اعلام می‌دارند که هیچ گونه تضاد منافی در خصوص نگارش و انتشار مطالب و نتایج این پژوهش ندارند.

منابع مالی

نویسنده (نویسندگان) هیچ گونه حمایت مالی برای تحقیق، تالیف و انتشار این مقاله دریافت نکردند.

دسترسی به داده‌ها

همه اطلاعات و نتایج در متن مقاله ارائه شده است.

جمله Keshava Murthy & Giridhar (1989) که هر کدام با توجه به محدودیت‌های پایه سرریز، معادله‌هایی را ارائه کردند. در همه بررسی‌های صورت گرفته سعی شده که با انجام تحقیقات آزمایشگاهی رابطه بین دبی- عمق و ضریب دبی عبوری Cd به عنوان تابعی از عامل‌ها و شرایط هیدرولیکی و هندسه بدنه سرریز ارزیابی و رابطه‌هایی هم ارائه شد. در این تحقیق نیز به منظور ارزیابی هندسه سرریز طراحی شده و بررسی تغییرپذیری‌هایی ضریب دبی Cd در مقابل فراسنجه‌های هندسی و هیدرولیکی اقدام به ساخت تعداد ۱۲ مدل سرریز با شرایط $m=1$ (شکل ۲) و با ابعاد مستطیل پایه مختلف شد. در آزمایشگاه هیدرولیک مدل‌ها نصب و آزمایش قرار شد. نتایج به دست آمده از ترسیم دبی - عمق آب روی همه سرریزها شکل ۷ نشان داده که در همه سرریزها رابطه به شکل خطی می‌باشد. آن گاه نتایج بین فراسنجه‌های بی بعد مورد تجزیه و تحلیل شد و در نهایت توسط نرم افزار SPSS-21 و استفاده از رگرسیون غیر خطی رابطه ۱۹ برای پیش بینی ضریب دبی استخراج شد، نتایج نشان داد که میزان خطای نسبی (e%) بین ضریب دبی به دست آمده از نتایج آزمایشگاهی و ضریب دبی به دست آمده از رابطه ۱۹ در محدوده ۵٪ ± است که قابل قبول می‌باشد. با استفاده از نتایج بررسی‌های محققان دیگر نیز جدول ۳ تشکیل و معلوم شد که ضریب دبی این تحقیق نیز مانند دیگر بررسی‌ها در محدوده ۶۴۲/۱ الی ۶۲۴/۱ می‌باشد. در نهایت مقدار ضریب دبی سرریز ساترو به طور

Inverted V-notch practical proportional weir. *J. Irrig. Drain Eng.*, 115(6), 1035-1050.

Keshava Murthy, K. & Rangaraj, C. (1997). *Canadian Journal of Civil Engineering*, 24(4), 586-592.

Keshava Murthy, K. & Shesha Prakash, M.N. (1994). Practical constant-accuracy linear weir. *J. Irrig. Drain Eng.*, 120(3), 550-562.

Kianmehr, H., kuchakzadeh, S., Vatankhah, A. (2014). Laboratory study of linear proportional overflows for circular ducts, *Iranian Water Research Journal*, 8(15), 93-101. (In Persian)

Murthy, K.K., Swamy, N.V.C. & Rangaraj, C. (1998). A Practical (sector Based) Linear Weir. *ISH Journal of Hydraulic Engineering*, 4(2), 19-29.

Kindsvater, C.E. & Carter, R.W.C. (1957) Discharge characteristics of rectangular thin-plate weirs, *J. Hyd. Div. ASCE*, 83(6), <https://doi.org/10.1061/JYCEAJ.0000142>.

Nikpiek, P. & Kashefipour, S.M. (2016). Effect of the hydraulic conditions and structure geometry on mathematical modelling of discharge coefficient for duckbill and oblique weirs, *Journal of Irrigation Sciences and Engineering*, 39(1), 1-10. (In Persian)

Rakhshandehrou, G.R. & Daneshmand, H. (2001). Experimental investigation of the effects of viscosity and surface tension in the equation of a sharp-edged parabolic weir, Third Iranian Hydraulic Conference, November 6-8, Shiraz.

Sohrabi, F., Parvin, R. & Teymouri, A.A. (2011). Experimental and Numerical Investigation of a Linear Proportional Trapezoidal Spillway. Issue 56, Mahab Ghods Consulting Engineering Company, Quarterly, p. 31. (In Persian)

Vatankhah, A.R. & Kouchekezadeh, S. (2009). Discussion of "head-discharge equation for sharp-crested polynomial weir" by R.E. Baddour. *J. Irrig. Drain Eng.*, 135(3), 393-395.

Vatankhah, A.R. (2012). Head-Discharge Equation for sharp-crested weir with Piecewise- Linear side. *J. Irrig. Drain Eng.*, 138(11), 1011-1018.

مجموعه داده‌های تولید شده و یا تحلیل شده در طول مطالعه حاضر، در صورت درخواست معقول، از نویسنده مسئول در دسترس هستند.

مشارکت نویسندگان

نویسنده اول: تهیه ساختار مقاله، تجزیه و تحلیل مقاله.

نویسنده دوم: ویرایش نمودارها، اشکال و متن مقاله.

۶- منابع

Baddour, R.E. (2008). Head-Discharge equation for sharp-Crested polynomial weir. *J. Irrig. Drain Eng.*, 134(2), 260-262.

Balochi, B. & Zeinivand, M. (2011). Comparison of the flow rate coefficient of two combined models of sharp-edged spillway, First International Conference and Third National Conference on Dams and Hydroelectric Power Plants.

Banks, R.B. (1954). A Note on Generalized Weir Equation. Dept., of Civil Engg., North Western University, Paper HP 0654. Illinois.

Bos, M.G. (1989). Discharge measurement structures. 3rd edn. Publisher: International institute for land reclamation and improvement. 401p.

Bos, G. (1976) Discharge measurement structures. International Institute for Land Reclamation and improvement, Ed., Wageningen, The Netherlands.

Cowgill, A.P. (1944). Mathematics of Weir Forms. *Quarterly of Applied Mathematics*, 2(2), 142-147.

Ghaffari Gousheh, J., Fattahi Nafchi, R. & Samadi Borojeni, H. (2020), Experimental Study Discharge Coefficient of Proportional Weirs on Lateral Intake, *Ferdowsi Civil Engineering*, 33(4), 1-14. (In Persian)

Haszpara, O. (1966). The problem of quadratic weir. *Acta Tech. (Budapest, Hungary)*, 4(1), 121-132.

Keshava Murthy, K. & Giridhar, D.P. (1989).

© 2026 The Author(s). Published by Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.

This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.

