

Lateral Velocity Distribution in Circular Open Channels

Abdolreza Zahiri^{1*}, Soroosh Sharifi²

1- Associate Professor in Water Engineering Department, Gorgan University of Agricultural Sciences and Natural Resources, Gorgan, Iran.

2- Associate Professor in Civil and Environment Engineering Department, Civil Engineering Faculty, University of Birmingham, UK.

* azahiri@gau.ac.ir

Received: 26 September 2024

Accepted: 21 December 2024

Discussion: 22 December 2025



J. Hydraul.

Iranian Hydraulic Association

Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: Pipes that are only partially filled with water exhibit similarities to canals and rivers but are more complex due to the specific geometries of their beds and walls. These structures are prevalent in sewers and under road culverts. Managing sedimentation is crucial for maintaining the optimal operation of sewer systems. Accordingly, it is essential to define specific flow patterns and minimum velocity thresholds to prevent sedimentation. Additionally, these pipes are instrumental in road culverts that facilitate fish passage, requiring that flow velocities be maintained within certain limits to ensure safe passage. Previous studies have focused primarily on applying the Manning equation or developing empirical equations to compute average cross-sectional velocity. More sophisticated methods, such as computational fluid dynamics, have been employed to map out detailed flow patterns and identify critical velocity points. However, these methods are often limited by their complexity and the extensive time required to run the models. This research introduces a novel application of quasi-two-dimensional mathematical models to address the flow in partially-filled pipes.

Methodology: The methodology of this study involves applying the Shiono and Knight quasi-two-dimensional model (SKM) to predict flow velocities within partially filled pipes. This model calculates the lateral distribution of depth-averaged velocities and boundary shear stresses. It incorporates three key coefficients: the Darcy-Weisbach friction factor, turbulent eddy viscosity, and secondary flow coefficient (denoted as f , λ , and θ) which are calibrated using data from controlled laboratory experiments. The flow within the pipe is segmented into multiple panels or slices, which serve as computational nodes. Known parameters such as flow depth, lateral slope, and longitudinal slope, along with the three calibrated coefficients, are input for each node to compute the velocity. The finite difference method is employed to discretize the governing differential equation, with the resulting matrix solved analytically to obtain the velocity distribution.

Results and Discussion: Application of the SKM to a laboratory-scale partially-filled pipe (Knight and Sterling, 2000) demonstrated that the model accurately predicts lateral velocity profiles at various flow depths, closely aligning with empirical data. This model effectively estimated the minimum, maximum, and average velocities, with calibration constants of 0.07 for eddy viscosity and -0.2 for secondary flow coefficients proving effective. Comparisons of the model's flow discharge predictions with actual measurements showed a maximum error of 5.7% at the lowest flow depth, with an overall average error of 3.6%. These findings underscore the model's robustness and accuracy in simulating real-world

conditions.

Conclusion: This research has developed a novel analytical approach based on the Shiono and Knight model to perform hydraulic analyses of circular sections with a free surface flow. The results confirm the model's capacity to replicate measured data on velocity distributions and flow discharges accurately. Moreover, this approach enables the calculation of shear stress distribution based on velocity profiles, suggesting its potential for broader applications, including the analysis of specialized sewer pipe sections like egg-shaped pipes.

Keywords: Partially-filled pipes, Quasi-two-dimensional mathematical model, Finite difference method, Sewer pipes, Stage-discharge curve.

توزیع عرضی سرعت جریان در مجاری روباز دایره‌ای

عبدالرضا ظهیری^{۱*}، سروش شریفی^۲

۱- دانشیار گروه مهندسی آب، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی گرگان.

۲- دانشیار گروه مهندسی آب و محیط زیست، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه بیرمنگام، انگلستان.

* azahiri@gau.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۳/۰۷/۰۵، پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۰۱، نقد و بررسی: ۱۴۰۴/۱۰/۰۱، وب‌گاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: لوله‌های نیمه‌پر اگرچه مشابه کانال‌ها و رودخانه‌ها دارای سطح آزاد آب هستند اما به دلیل هندسه کف، پیچیدگی‌های بیشتری دارند. این مقاطع در مجاری فاضلاب و نیز کالورت‌های زیرگذر جاده‌ای به فراوانی مشاهده می‌شوند. در مجاری فاضلاب، برای اطمینان از عدم وقوع پدیده رسوبگذاری، باید الگوی جریان و یا مقادیر حداقل سرعت بر اساس قطر ذرات رسوب ورودی مشخص باشند. در کالورت‌های لوله‌ای هم که ماهی از درون آنها عبور می‌کند، برای راحتی تردد ماهی‌ها، باید سرعت‌های جریان در حدمشخصی کم باشد. بنابراین لازم است محدوده سرعت‌های کم جریان در مجاری فاضلاب و کالورت‌ها تعیین شود. برای شبیه‌سازی توزیع سرعت در مجاری دایره‌ای، تاکنون از نرم‌افزارهای سه‌بعدی دینامیک سیالات محاسباتی استفاده شده است. این مدل‌ها با محدودیت‌های مهمی مثل پیچیدگی روش حل و زمان طولانی اجرای مدل مواجه هستند. در این تحقیق از ایده جدید کاربرد مدل ریاضی شبه‌دو بعدی Shiono and Knight برای حل جریان در لوله‌های نیمه‌پر استفاده شده است. ابتدا به کمک داده‌های آزمایشگاهی Knight and Sterling (2000)، ضرایب این مدل (ضریب اصطکاک داریسی-ویسباخ، ضریب لزجت گردابه‌ای و ضریب جریان‌های ثانویه) واسنجی شده و سپس برای شبیه‌سازی توزیع عرضی سرعت مورد استفاده قرار گرفت. نتایج کاربرد این مدل به ازاء عمق‌های مختلف جریان نشان داد که پروفیل‌های عرضی سرعت محاسباتی با پروفیل‌های اندازه‌گیری شده در لوله مطابقت مناسبی داشته و مقادیر سرعت‌های حداقل، حداکثر و متوسط را به خوبی برآورد نموده است. حداکثر خطای مطلق دبی جریان محاسباتی حدود ۵/۷ درصد و متوسط خطای مطلق نیز حدود ۳/۶ درصد می‌باشد.

کلیدواژه‌گان: لوله‌های نیمه‌پر، مدل ریاضی شبه دو بعدی، روش تفاضل‌های محدود، مجاری فاضلاب، رابطه دبی-اشل.

نیمه‌پر بودن لوله‌ها، میزان نشت از لوله فاضلاب به کمترین

میزان رسیده و تهویه مناسب نیز انجام خواهد گرفت.

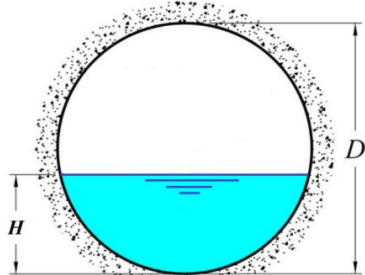


Fig. 1 Flow in partially filled
شکل ۱ جریان در لوله‌های نیمه‌پر

۱- مقدمه

با وجود اینکه در لوله‌ها، به‌طور معمول جریان تحت فشار رخ می‌دهد اما در مواردی، جریان در این مجاری با سطح آزاد و به صورت نیمه‌پر^۱ نیز مشاهده می‌شود. از مهمترین موارد در این زمینه، لوله‌های فاضلاب (فاضلاب‌روها) و نیز آبگذرهای لوله‌ای قابل اشاره می‌باشند. لوله‌های فاضلاب (شکل ۱) به دلیل افزایش ضریب اطمینان و نیز دلایل هیدرولیکی و بهداشتی به صورت نیمه‌پر طراحی و اجرا شده و تنها در شرایط اضطراری و جریان بیشینه‌ای به صورت کاملاً پر عمل می‌کنند (Akgiray, 2004). در حالت

1. Partially filled pipes

افزون بر محدودیت‌های بالا، فرمول‌های یک‌بعدی مقادیر پارامترهای هیدرولیکی را تنها به صورت یک مقدار میانگین در تمام مقطع عرضی ارائه می‌کنند. در بعضی از شرایط، تعیین مقادیر بیشینه و کمینه سرعت جریان و تنش برشی بستر و یا تعیین موقعیت آنها مورد نیاز است. در این حالت، باید توزیع دوبعدی سرعت‌های نقطه‌ای جریان یا به طور کلی میدان جریان در لوله تعیین شود.

از جمله موارد مهم در این زمینه، بررسی وضعیت رسوبگذاری در مجاری فاضلاب و نیز بررسی شرایط حرکت ماهی‌ها در کالورت‌های دایره‌ای است (Guo et al., 2015).

به‌طور مثال برای تضمین عبور راحت ماهیان از آبگذرهای لوله‌ای با سطح آزاد، مقادیر سرعت‌های جریان باید مناسب باشد. سرعت‌های جریان خارج از محدوده مناسب با ایجاد آشفتگی بیش از حد و یا رسوبگذاری در این مقاطع باعث تاثیر منفی در زاد و ولد ماهی‌ها می‌شوند (Mohebbi, 2014). بنابراین باید با شناسایی محل‌هایی که سرعت

جریان در آنها از محدوده سرعت مجاز جریان برای ماهی‌ها، بالاتر یا پایین‌تر باشد، مسیر بهینه حرکت ماهی‌ها از درون آبگذر لوله‌ای مشخص شود. آبگذرها ضمن دارا بودن ضوابط هیدرولیکی و هیدرولوژیکی معمول در طراحی سازه‌ها، باید اصول مبتنی بر قابلیت‌های زیستی ماهی‌ها را نیز ارضا کنند.

برای مثال اثبات شده است که ایجاد نشدن ناحیه‌های با جریان کم‌سرعت در این سازه‌ها باعث انقراض دسته‌جمعی موجودهای آبی خواهد شد. با توجه به اینکه فرمول مانینگ قادر به تعیین سرعت‌های نقطه‌ای و نیز بیشینه سرعت جریان نیست، به همین دلیل در کشورهای امریکا و کانادا پیش از اجرای این گونه سازه‌ها، باید مدل‌سازی فیزیکی و آزمایشگاهی انجام شده و یا اینکه از نرم‌افزارهای سه‌بعدی دینامیک سیالات محاسباتی استفاده شود (Mohebbi, 2014). انجام هر دو مورد بالا پرهزینه و زمان‌بر است زیرا به دلیل هندسه پیچیده کف لوله، شبکه‌بندی میدان حل پیچیده‌تر بوده و شبیه‌سازی دو و سه‌بعدی جریان در این مقطع‌ها به زمان اجرای طولانی نیاز دارد (Mohebbi et al., 2015). در این زمینه اداره بزرگراه‌های امریکا ضوابطی را برای ایجاد شرایط ایمن مهاجرت ماهی‌ها از بالادست به پایین‌دست ارائه کرده است که به دلیل استفاده از مدل‌های

هیدرولیک جریان در مجاری روباز دایره‌ای از چندین جنبه دارای اهمیت است. تاکنون و در عمل برای طراحی فاضلاب‌روها و آبگذرهای لوله‌ای (برای مثال محاسبه دبی و سرعت جریان و نیز تعیین شیب طولی) از فرمول‌های مانینگ و یا شزی استفاده شده است. فرمول مانینگ برای کاربرد در لوله‌های نیمه‌پر دارای دو محدودیت است (Zeghadnia et al., 2019). محدودیت اول، تصحیح اثر عمق جریان بر ضریب زبری است که توسط Camp (1946) مطرح شد. با تلفیق فرمول مانینگ با رابطه‌های افت انرژی داری-ویسباخ و ضریب اصطکاک (برای مثال کالبروک-ولیت) برای لوله‌های پر و نیمه‌پر، تغییر ضریب زبری مانینگ بر مبنای عمق جریان به کمک رابطه زیر قابل استخراج است (Akgiray, 2004):

$$\frac{n}{n_f} = \frac{(\theta - \sin \theta)^{1/6}}{\theta^{1/6}} \frac{\log(3.7D/e)}{\log\left(\frac{3.7D(\theta - \sin \theta)}{e\theta}\right)} \quad (1)$$

که n ضریب زبری مانینگ در هر عمق جریان، n_f ضریب زبری برای لوله کاملاً پر، D قطر لوله، θ زاویه سطح آب (بر حسب رادیان و تابعی از H عمق جریان) و e ارتفاع زبری جداره لوله است (شکل ۲).

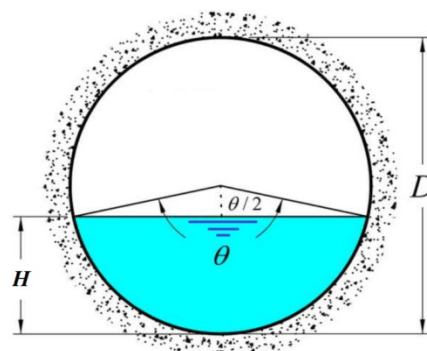


Fig. 2 Showing variables given in Eq. 1 for a partially filled pipe

شکل ۲ نمایش متغیرهای معادله (۱) برای یک لوله نیمه‌پر

محدودیت دوم، لزوم تصحیح شعاع هیدرولیکی است که توسط Escriitt (1984) بیان شده است. او به دلیل افت انرژی بیشتر در لوله‌های نیمه‌پر نسبت به لوله‌های تحت فشار ناشی از موج‌ها و نوسان‌های سطح آب، شعاع هیدرولیکی را به صورت تقسیم مساحت جریان به مجموع محیط مرطوب و نصف عرض فوقانی سطح آب معرفی کرد.

مدل‌های دوبعدی از سوی دیگر، اندیشه کاربرد مدل‌های شبه‌دوبعدی^۱ توسط محققینی چون (Wark et al. (1990) و (Shiono and Knight (1991) مطرح شد. این مدل‌ها حدوسط مدل‌های یک و دوبعدی می‌باشند. این مدل‌ها برتری‌های مدل‌های یک‌بعدی و دوبعدی را با هم دارند به صورتی که همانند مدل‌های یک‌بعدی از تئوری و کاربرد ساده‌ای برخوردار است و برخلاف مدل‌های دوبعدی و سه‌بعدی، پیچیدگی بسیار کمی دارند. خروجی این مدل‌ها، توزیع سرعت جریان و تنش برشی بستر در عرض یا عمق مجرا است. اگر شرایط جریان به گونه‌ای است که تغییرات پارامترهای هیدرولیکی در عرض مجرا مهم‌تر از تغییرات آنها در عمق جریان باشد، از مفهوم متوسط در عمق^۲ یا میانگین عمقی استفاده می‌شود. نمونه این وضعیت در آبراه‌ها و رودخانه‌ها در شرایط عمق کم و جریان آشفته و نیز در مجاری فاضلاب قابل مشاهده است. نخستین پژوهش مرتبط با جریان آزاد در لوله‌ها به (Straub and Morris (1950 اختصاص دارد که در آزمایشگاه هیدرولیک دانشگاه مینه‌سوتا^۳، ضریب اصطکاک لوله‌های بتنی و فلزی شیاردار را بررسی کردند. (Replogle and Chow (1966 اولین محققانی بودند که توزیع عرضی سرعت طولی در آبگذرهای لوله‌ای را اندازه‌گیری کردند. (Funamizo et al. (1991 فرمول جدیدی را برای تحلیل جریان یکنواخت در لوله‌های نیمه‌پراکنه نمودند. فرمول پیشنهادی آنان نسبت به فرمول مانینگ از نظر محدوده زبری لوله برتری دارد. (Knight and Sterling (2000 توزیع سرعت در عرض لوله‌ها با جریان آزاد را اندازه‌گیری و رابطه‌ای را برای برآورد تنش برشی بستر به کمک سرعت‌های نقطه‌ای پیشنهاد دادند. (Berlamont et al. (2003 و (Azevedo et al. (2008 جریان آشفته در لوله‌های نیمه‌پر را به کمک نرم‌افزارهای دینامیک سیالات محاسباتی شبیه‌سازی و نشان دادند که نتایج مدل آشفتگی $k-\epsilon$ همخوانی خوبی با داده‌های آزمایشگاهی دارند. (Abs et al. (2007) به کمک سرعت‌سنج ADV، توزیع سرعت جریان در چندین مقطع از طول یک آبگذر فولادی شیاردار نیمه‌پر را اندازه‌گیری نموده و اثبات

یک‌بعدی در این ضوابط و لزوم تامین نواحی کم‌سرعت، مقاطع طراحی شده همگی بیش از حد بزرگ بوده و منجر به افزایش هزینه‌های طراحی می‌شوند (Mohebbi, 2014). شکل ۳ نمونه‌ای از آبگذرهای لوله‌ای همراه با عبور ماهی‌ها را نشان می‌دهد.



Fig. 3 Flow and fish movement inside partially filled circular culverts (Mohebbi, 2014)

شکل ۳ جریان آب و حرکت ماهی‌ها در کالورت‌های لوله‌ای نیمه‌پر (Mohebbi, 2014)

در شکل ۴ نمونه‌ای از نیم‌رخ عرضی سرعت جریان در یک لوله نیمه‌پر نشان داده است (Knight and Sterling, 2000). مشاهده می‌شود که این تغییرات قابل ملاحظه است به طوری که سرعت میانگین تفاوت زیادی با مقادیر سرعت‌های نقطه‌ای دارد.

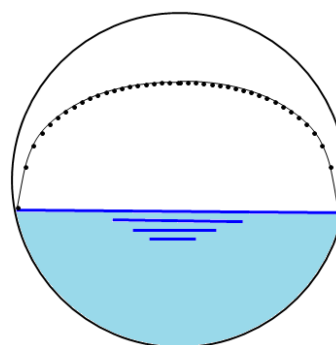


Fig. 4 Lateral profile of flow velocity in a partially filled pipe (Knight and Sterling, 2000)

شکل ۴ نیم‌رخ عرضی سرعت جریان در یک لوله نیمه‌پر (Knight and Sterling, 2000)

کافی نبودن نتایج مدل‌های یک‌بعدی (مانند فرمول مانینگ) از یک طرف، و نیز پیچیدگی حل ریاضی

3. University of Minnesota

1. Quasi two-dimensional models
2. Depth-averaged

سطح آب قرار گرفته و موقعیت آن تابع عمق جریان است. نتایج محاسباتی این مدل همخوانی به نسبت خوبی با داده‌های آزمایشگاهی داشته است. Regueiro-Picallo et al. (2016) چندین آزمایش را در یک فاضلاب روی تخم‌مرغی انجام داده و داده‌ها را با نتایج مدل‌سازی سه‌بعدی ANSYS CFX مقایسه کردند. نتایج مقایسه نشان داد که همخوانی توزیع عمقی سرعت محاسباتی و آزمایشگاهی قابل قبول است. Rincon et al. (2016) نتایج پژوهش خود نشان دادند که برای انتقال حدود ۹۰ درصد از ذرات رسوب ماسه از لوله‌های فاضلاب، تنش برشی بحرانی در دبی کمینه جریان باید حدود $1/4$ پاسکال باشد. بررسی‌های مرتبط با لوله‌های نیمه‌پر نشان می‌دهد که از یک زمانی به بعد، بیشترین حجم بررسی‌ها در خصوص آبگذرهای لوله‌ای بوده است. این امر به دلیل استفاده از آبگذرها به عنوان مجرای عبور ماهی‌ها در دهه ۱۹۷۰ می‌باشد. البته متأسفانه بعدها مشخص شد که بسیاری از این آبگذرهای عبور ماهی به دلیل سرعت جریان بالا و نیز آشفتگی زیاد جریان مشابه بازدارنده‌ای در مقابل حرکت ماهی عمل کرده‌اند. محققان زیادی برای اصلاح این شرایط و کاهش سرعت و شدت آشفتگی جریان، نصب تیغه‌ها^۱ یا صفحه‌هایی در مسیر این آبگذرها را پیشنهاد کردند. در این صورت، به صورت طبیعی به ماهی‌ها فرصت داده می‌شود که در محدوده جریان بین صفحه‌ها استراحت کرده و برای تردد از سرعت انفجاری خود استفاده کنند. طراحی تیغه‌ها، اثرگذاری‌ها بر سرعت جریان، الگوی جریان، و شدت آشفتگی بیشترین حجم بررسی‌ها را تشکیل می‌دهند (Katopodis et al., 1978; Katopodis et al., 1992; Morrison et al., 2009; Schall et al., 2012). افزون بر این پژوهش‌ها، مدل‌های تجربی نیز تا حدودی مورد توجه بوده‌اند. این مدل‌ها به دلیل دارا بودن ماهیت تجربی، پاسخ تحلیلی و قطعی ندارند. در ضمن محدودیت دیگر معادله‌های تجربی این است که تابع شرایط محل بوده و به تقریب برای اغلب منطقه‌ها، نیازمند داده‌های آزمایشگاهی به منظور واسنجی پارامترهای معادله می‌باشند (Mohebbi, 2014).

کردند که به تقریب یک‌سوم از مساحت جریان دارای سرعتی کمتر از سرعت میانگین است. McEnroe and Malone (2008) با انجام چندین بررسی آزمایشگاهی روی لوله‌های فلزی شیاردار در حالت تحت فشار و نیمه‌پر، مقادیر ضریب زبری مانینگ لوله و ارتباط آن با عمق جریان را بررسی کردند. این آزمایش‌ها در محدوده عمق نسبی $0/3$ تا $0/9$ بوده و نشان داد که مقدار ضریب زبری مانینگ در جریان آزاد به‌طور معمول از حالت جریان تحت فشار بزرگتر است. (Kehler (2009) نیز با اندازه‌گیری سرعت جریان در لوله‌های فلزی شیاردار در حالت نیمه‌پر به کمک دستگاه سرعت‌سنج ADV، ناحیه‌های کم‌سرعت جریان در مجاورت بستر لوله را بررسی کرد. او نشان داد که بخش قابل ملاحظه‌ای از مساحت جریان در لوله دارای سرعت‌هایی پایین‌تر از سرعت میانگین جریان است و افزایش زبری لوله باعث افزایش وسعت ناحیه‌های کم‌سرعت خواهد شد. (Clark and Kehler (2011) و نیز Yoon et al. (2012) جنبه‌های دیگری از سازوکار جریان در لوله‌های نیمه‌پر را آشکار کردند. آنان به ترتیب یک معادله تجربی برای توزیع سرعت در آبگذرهای لوله‌ای شیاردار در حالت شیب‌های ملایم و یک معادله تجربی برای توزیع ضریب اصطکاک و تنش برشی در لوله‌های نیمه‌پر ارائه دادند. (Azamathula et al. (2011) با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی، سرعت مناسب جریان برای عدم رسوبگذاری مواد جامد در مجاری فاضلاب را با استفاده از روش برنامه‌ریزی ژنتیک مدل‌سازی کردند. در این مدل، پارامترهای زیادی مانند قطر لوله، شعاع هیدرولیکی، قطر ذرات، غلظت رسوب‌ها و ضریب اصطکاک بستر رسوبی استفاده شده است. (Ebtehaj et al. (2014) با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی محققان مختلف، مدل‌های رگرسیونی مختلفی را برای محاسبه سرعت جریان خودسستشو و نیز آستانه رسوب‌گذاری در دو حالت لوله‌های تمیز و با بستر رسوبی ارائه کردند. Jiang et al. (2016) با استفاده از تئوری بیشینه آنتروپی، مدلی برای محاسبه توزیع دوبعدی سرعت جریان در لوله‌ها ارائه و نشان دادند که محل رخداد سرعت بیشینه جریان در زیر

مدل‌ها، مدل شیونو و نایت با استقبال بیشتری در کاربرد روبه‌رو بوده است. خروجی این مدل ریاضی، توزیع سرعت‌های متوسط در عمق جریان و نیز تنش برشی بستر در عرض مجرا است که در این پژوهش، تنها توزیع عرضی سرعت به فرم معادله (۲) مدنظر بوده است:

$$\rho g H S_0 - \rho \frac{f}{8} U_d^2 \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho \lambda H^2 \left(\frac{f}{8} \right)^{1/2} \frac{\partial U_d^2}{\partial y} \right\} = \Gamma \quad (2)$$

که ρ جرم حجمی آب، g شتاب ثقل، S_0 شیب کف، f ضریب اصطکاک دارسی- ویسباخ، U_d سرعت متوسط در عمق، s شیب جانبی مجرا، λ ضریب بدون بعد لزجت گردابه‌ای جریان، Γ جمله جریان ثانویه ($\Gamma = \beta \rho g S_0 H$) که β ضریب بیانگر شدت جریان‌های ثانویه است) و y موقعیتی از عرض لوله می‌باشد که سرعت در آن نقطه باید به‌دست آید. ضریب β بیانگر شدت جریان‌های ثانویه است و مقدار تقریبی آن برای رودخانه‌ها و آبراهه‌های روباز حدود ۰/۰۵ گزارش شده است، اما تاکنون برای مقاطع مدور بررسی و ارزیابی لازم انجام نشده است.

معادله دیفرانسیل بالا را می‌توان با روش عددی تفاضل‌های محدود حل کرد. برای انجام این کار، در آغاز باید جریان در مجرای دایره‌ای به چند زیربازه یا گره محاسباتی به فاصله‌های Δy تقسیم شود. تقسیم‌بندی جریان در دو حالت عمق جریان کوچکتر و بزرگتر از شعاع لوله متفاوت است. در حالت $H < R$ (شکل ۵-ا که R شعاع لوله است)، تقسیم‌بندی از وسط سطح آب تا لبه آب انجام می‌شود اما در حالت $H > R$ (شکل ۵-ب)، تقسیم‌بندی از وسط سطح آب تا انتهای شعاع لوله امتداد می‌یابد. در این صورت، عمق جریان در هر گره محاسباتی باید مطابق شکل ۵-ب در نظر گرفته شود. در شکل ۵ به دلیل تقارن جریان، تنها یک نیمه از مقطع لوله در نظر گرفته شده است. گره‌های مشخص شده در سطح آزاد آب و یا جداره لوله، نقطه‌هایی است که سرعت جریان در آنها محاسبه می‌شود. برای انجام محاسبات حل عددی معادله ۲، عمق جریان در هر گره محاسباتی و نیز مساحت و محیط مرطوب هر بازه به کمک رابطه‌های (۳) برای

مرور نتایج اشاره شده در بالا نشان می‌دهد که اغلب تحقیقات بر روش‌های یک‌بعدی (مانند فرمول مانینگ) و تا حدودی مدل‌های سه‌بعدی متمرکز می‌باشند. اگرچه نتایج مدل‌سازی‌های سه‌بعدی برای آگاهی از شرایط جریان، مقادیر سرعت‌های نقطه‌ای و تنش‌های برشی و نیز شدت آشفتنگی سودمند است، اما اکنون توسعه و کاربردی نمودن این مدل‌ها در صنعت آب کشور با محدودیت‌های زیادی روبه‌رو است. به این دلیل، در این پژوهش برای نخستین بار با هدف ارائه یک راه‌حل میانبر با حجم محاسبات و پیچیدگی بسیار کمتر (در مقایسه با مدل‌های ریاضی سه‌بعدی) و دقت بیشتر (در مقایسه با مدل‌های تجربی)، از ایده کاربرد یک مدل ریاضی شبه‌دو‌بعدی متوسط در عمق برای حل نیم‌رخ عرضی سرعت جریان در لوله‌های فاضلاب-رو در حالت غیررسوب‌گذار استفاده شده است. به این منظور، با بررسی مدل‌های شبه‌دو‌بعدی موجود، مدل Shiono and Knight (1991) انتخاب شده و با حل عددی آن، توزیع عرضی سرعت در لوله‌های نیمه‌پر محاسبه شد. سپس به کمک انتگرال‌گیری از این توزیع سرعت، دبی جریان به ازاء هر عمق دلخواه محاسبه شد. در ادامه این بخش، مبانی مدل ریاضی شیونو و نایت و روش حل آن برای یک لوله نیمه‌پر در دو حالت عمق‌های کوچکتر و بزرگتر از شعاع لوله ارائه شده است. در پایان به کمک داده‌های آزمایشگاهی، پارامترهای مدل ریاضی یاد شده بهینه‌سازی شده است.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- مدل شبه دو‌بعدی Shiono and Knight

تاکنون یک مدل ساده و کاربردی برای محاسبه توزیع سرعت و دبی جریان در لوله‌های نیمه‌پر وجود ندارد. این در حالی است که برای رودخانه‌ها و آبراهه‌ها، مدل‌های ریاضی فراوانی برای حل توزیع عرضی سرعت جریان و تنش برشی بستر توسعه داده شده است. از جمله مدل‌های مهم در این زمینه می‌توان به (Wark et al. (1990، Shiono and Knight (1991، Lambert and Sellin (1996)، Ervine et al. (2000) و Hu et al. (2010) اشاره کرد. پایه و رکن این مدل‌ها را متوسط‌گیری عمقی از معادله اساسی ناویر-استوکس تشکیل می‌دهد. از بین این

آزمایش‌ها ارائه شده است. اندازه‌گیری سرعت‌های نقطه‌ای در ۴ عمق مختلف جریان و در دو حالت کوچکتر و بزرگتر از شعاع لوله انجام شده است.

PVC به قطر ۲۴۴ میلی‌متر، ضخامت جداره ۳ میلی‌متر و طول ۲۱ متر و در شرایط جریان آشفته، یکنواخت و زیربحرانی انجام شد. شیب کف نیز ۰/۰۰۱ در نظر گرفته شد. در جدول ۱ خلاصه‌ای از ویژگی‌های هیدرولیکی این

جدول ۱ خلاصه مقدارهای آزمایشگاهی پارامترهای هیدرولیکی (Knight and Sterling, 2000)

Table 1 Summary of hydraulic parameters in experimental data (Knight and Sterling, 2000)

Run	Flow depth H (mm)	Flow rate Q (ls ⁻¹)	Flow velocity V (ms ⁻¹)	Shear stress τ (Pa)	Froude Number (Fr)	Reynolds Number (Re)
1	81.3	5.36	0.394	0.441	0.516	64900
2	123.5	11.7	0.493	0.597	0.505	110000
3	162.6	17.3	0.524	0.690	0.441	135000
4	201.5	22.9	0.554	0.721	0.375	150000

از عمق‌های جریان ۸۱/۳ میلی‌متر (آزمایش ۱)، عمق کوچکتر از شعاع لوله) و ۱۶۲/۶ میلی‌متر (آزمایش ۳، عمق بزرگتر از شعاع لوله) به دست آمده است. مشاهده می‌شود که اگرچه در شکل ۷-a (آزمایش ۱)، افزایش شمار بازه‌ها از ۱۰ تا ۱۰۰، تاثیر قابل توجهی بر پاسخ‌ها به ویژه در محدوده میانی لوله ندارد، اما این وضعیت برای آزمایش ۳ (شکل ۷-b) بسیار متفاوت است، به طوری که پاسخ‌ها به ازاء شمار بازه‌های ۱۰ و ۲۰ قابل قبول نیست. با در نظر گرفتن همه شرایط، انتخاب ۵۰ بازه برای یک نیمه لوله، بهترین توزیع عرضی سرعت را از نظر دقت و زمان اجرای محاسبات ارائه کرده است. این عدد به عنوان شمار بهترین بازه‌ها برای دیگر آزمایش‌ها (۲ و ۴) منظور شده است.

۳- نتایج و بحث

۳-۱- تحلیل حساسیت شمار زیربازه‌ها

در زمینه شمار زیربازه‌ها و اثر آن بر دقت نتایج مدل ریاضی Shiono and Knight در توزیع عرضی سرعت جریان در رودخانه‌ها بررسی‌های زیادی انجام شده است. از نظر تئوری و بنا بر مبانی و فرضیه‌های روش تفاضل‌های محدود، خطای محاسبات با کاهش گام محاسباتی (افزایش شمار زیربازه‌ها) کاهش می‌یابد. اما کاهش گام محاسباتی، حجم محاسبات را افزایش داده و زمان اجرای مدل را طولانی می‌کند. بنابراین برای افزایش سرعت محاسبات، باید گام محاسباتی بهینه به دست آید. به این منظور مطابق شکل ۷، چندین شبیه‌سازی به ازاء شمار بازه‌های مختلف انجام شده و نتایج با یکدیگر مقایسه می‌شوند. این نتایج به

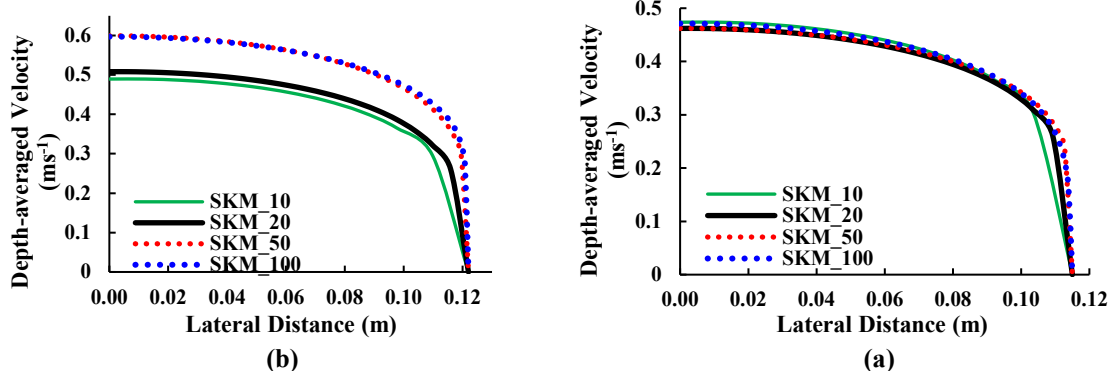


Fig. 7 Sensitivity analysis of number of panels in simulation of lateral velocity distribution for flow depths a) 81.3mm and b) 162.6mm

شکل ۷ تحلیل حساسیت شمار بازه‌ها در شبیه‌سازی توزیع عرضی سرعت به ازاء عمق‌های جریان (a) ۸۱/۳ و (b) ۱۶۲/۶ میلی‌متر

فرض شده است. در جدول ۲ مقادیر بهینه ضریب‌های موردنظر برای ۳ آزمایش ۱ تا ۳ ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود مقادیر دو ضریب λ و β برای هر سه عمق جریان تا حدودی یکسان می‌باشند. نتایج حل عددی توزیع سرعت در لوله نیمه‌پر در عمق‌های مختلف در حالت بهینه در شکل ۸ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که تا حدودی در همه عمق‌های مورد بررسی، همخوانی خوبی بین مقادیر اندازه‌گیری و محاسباتی سرعت‌ها وجود دارد.

۳-۳- ارزیابی دقت نتایج مدل‌سازی

با انجام مراحل بالا، نیمرخ سرعت جریان در عرض لوله در هر عمق قابل محاسبه است. طبق جدول ۲، مقدار ضریب‌های لزجت گردابه‌ای و جریان ثانویه ثابت است و تنها ضریب اصطکاک با عمق رابطه معکوس دارد. با فرض رابطه خطی بین ضریب اصطکاک و عمق نسبی، ضریب اصطکاک برای عمق جریان $201/5$ میلی‌متر (آزمایش ۴)، حدود $0/0186$ به دست می‌آید. با اعمال این ضریب و نیز مقادیر ثابت دو ضریب دیگر، مدل Shiono and Knight برای آزمایش ۴ اجرا شده است. نتایج این اجرا در شکل ۹ نشان داده شده است.

۳-۲- واسنجی ضریب‌های مدل Shiono and Knight در لوله‌ها

با توجه به اینکه تاکنون پژوهشی در زمینه کاربرد مدل Shiono and Knight در مجاری دایره‌ای نیمه‌پر انجام نشده است، به همین دلیل برای مقدار ضریب‌های اصطکاک داریسی-ویسباخ، لزجت گردابه‌ای و جریان ثانویه معادله‌ای ارائه نشده است. به این منظور در این پژوهش از بهینه‌سازی مقادیر این ضریب‌ها در فرآیند حل عددی مدل Shiono and Knight و به کمک تطابق نتایج توزیع عرضی سرعت‌های محاسباتی و آزمایشگاهی استفاده شده است. فرآیند حل عددی و بهینه‌سازی این ضریب‌ها به صورت همزمان و با استفاده از روش بهینه‌سازی گرادیان کاهشی تعمیم‌یافته غیرخطی انجام شده است. در آغاز برای سه عمق اول جریان (آزمایش‌های ۱ تا ۳)، مقادیری برای این سه ضریب فرض می‌شود. تغییرات ضریب اصطکاک در محدوده اعداد نمودار مودی ($0/01-0/1$)، تغییرات ضریب لزجت گردابه‌ای در محدوده $0/03-0/06$ (بر مبنای نتایج بررسی‌های انجام شده در آبراهه‌های روباز) و تغییرات ضریب جریان‌های ثانویه در محدوده $0/25-0/15$ (Shiono and Knight, 1991; Abril and Knight, 2004)

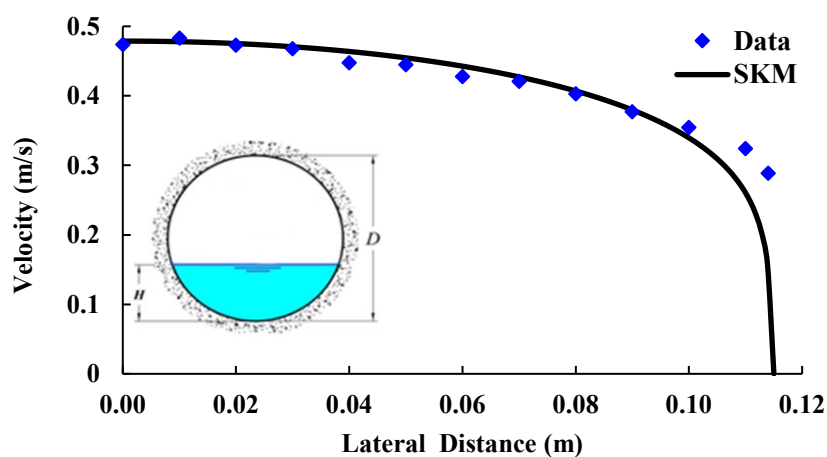
جدول ۲ مقادیر بهینه ضریب‌های مدل Shiono and Knight در لوله نیمه‌پر در عمق‌های مختلف

Table 2 Optimized values of the Shiono and Knight model for the partially filled pipe in various flow depths

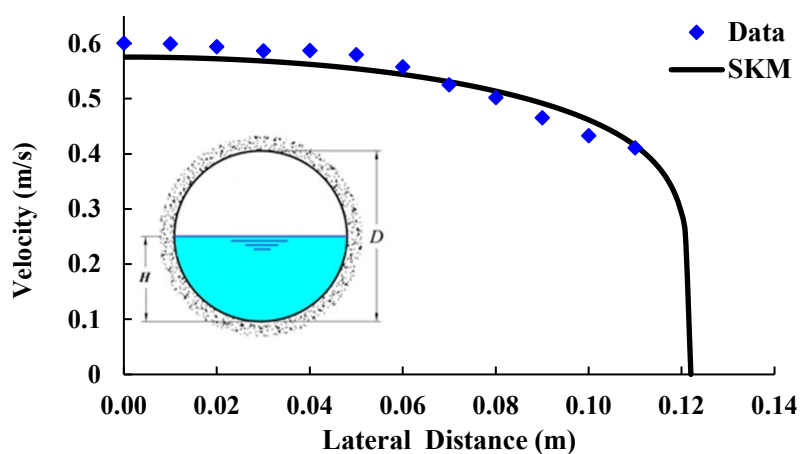
Run	Flow depth H (mm)	Depth ratio H/D	f	λ	β
1	81.3	0.333	0.0255	0.069	-0.2
2	123.5	0.506	0.0224	0.070	-0.2
3	162.6	0.666	0.0210	0.068	-0.2

دبی‌های جریان محاسباتی دارای همخوانی خوبی با دبی‌های مشاهده‌ای می‌باشند. خطای میانگین محاسبات برای همه دبی‌های جریان حدود $3/6$ درصد و برای دبی کمترین جریان حدود $5/7$ درصد به دست آمده است. به‌طور کلی خطای مطلق به دست آمده کمتر از 10 درصد بوده و بنابراین برای بررسی‌های کاربردی در صنعت آب قابل قبول است.

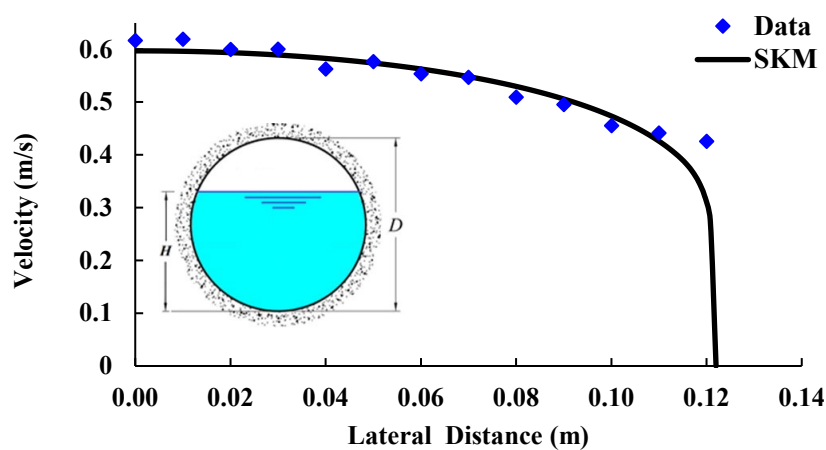
با انتگرال‌گیری از توزیع‌های سرعت به دست آمده، دبی جریان عبوری از لوله قابل محاسبه است. دبی‌های جریان به ازاء همه عمق‌های مورد بررسی در شکل ۱۰ در مقایسه با مقادیر دبی اندازه‌گیری شده به شکل روابط دبی-اشل نشان داده شده است. برای عمق‌های کم و خیلی زیاد (عمق‌ها نسبی کوچکتر از $0/3$ و بزرگتر از $0/85$) به دلیل نبود داده آزمایشگاهی، تنها نتایج محاسباتی ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در همه عمق‌ها،



(a)



(b)



(c)

Fig. 8 Optimized lateral velocity distributions for different flow depths, a) 81.3, b) 123.5, and c) 162.6mm
 شکل ۸ توزیع بهینه سرعت جریان در عرض لوله به ازاء عمق‌های مختلف، (a) ۸۱/۳، (b) ۱۲۳/۵ و (c) ۱۶۲/۶ میلی‌متر

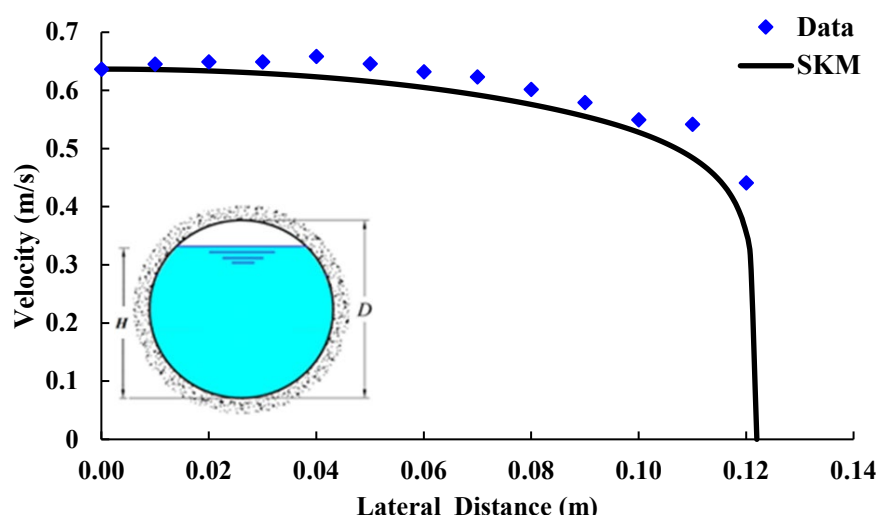


Fig. 9 Simulated lateral velocity distribution in pipe for flow depth of 201.5mm (Run 4) based on $f=0.0186$
 شکل ۹ توزیع عرضی سرعت جریان به ازاء عمق ۲۰۱/۵ میلی‌متر (آزمایش ۴) بر اساس ضریب اصطکاک ۰/۰۱۸۶

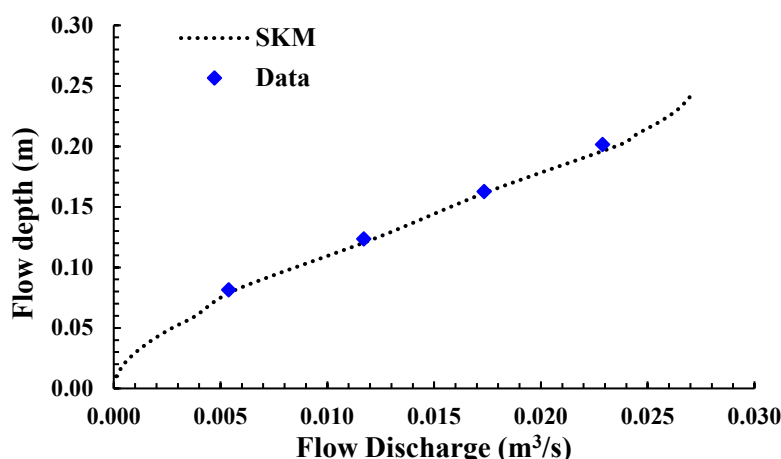


Fig. 10 Comparison of computed and measured stage-discharge curves for the partially filled pipe
 شکل ۱۰ مقایسه روابط دبی-اشل محاسباتی و مشاهده‌ای برای لوله نیمه‌پر

۴- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

در این پژوهش، یک مدل ریاضی ساده و کاربردی مبتنی بر مفهوم متوسط عمقی سرعت جریان برای حل توزیع عرضی سرعت در لوله‌ها و مقاطع دایره‌ای نیمه‌پر پیشنهاد و تاکید شد. کاربرد این مدل در یک لوله آزمایشگاهی با سطح آزاد (Knight and Sterling, 2000) و به ازاء عمق‌های مختلف جریان نشان داد که نیمرخ‌های عرضی سرعت جریان محاسباتی با نیمرخ‌های اندازه‌گیری شده در لوله همخوانی مناسبی داشته و برآورد مناسبی از مقادیر سرعت‌های کمینه، بیشینه و میانگین داشته است. نتایج واسنجی مدل ریاضی نشان داد که با اعمال مقدار حدود

۰/۰۷ برای ضریب لزجت گردابه‌ای و ۰/۲- برای ضریب جریان‌های ثانویه در همه عمق‌های جریان نتایج مناسبی برای توزیع عرضی سرعت حاصل می‌شود. برای ضریب اصطکاک نیز از رابطه‌ای خطی بر مبنای عمق نسبی استفاده شد. در این رابطه، ضریب اصطکاک به صورت معکوس با عمق جریان مرتبط می‌شود که از نظر مفاهیم مکانیک سیالات درست است. دبی‌های جریان به‌دست آمده از مدل ریاضی پیشنهادی در مقایسه با مقادیر دبی اندازه‌گیری شده همخوانی قابل قبولی داشته است. بیشینه خطای مطلق محاسبه دبی جریان حدود ۵/۷ درصد و برای کمینه عمق جریان در لوله به‌دست آمده است. میانگین

τ	تنش برشی (پاسکال)
Γ	جمله جریان‌های ثانویه (پاسکال)
A	مساحت جریان در لوله (مترمربع)
a, b, c, d	ضریب‌های معادله روش تفاضل محدود (-)
D	قطر لوله (متر)
f	ضریب اصطکاک داریسی - ویسیاخ (-)
g	شتاب ثقل (متر بر مجذور ثانیه)
H	عمق جریان (متر)
n	ضریب زبری مانینگ در هر عمق جریان ($m^{-1/3}s$)
n_f	ضریب زبری برای لوله کاملاً پر ($m^{-1/3}s$)
P	محیط مرطوب (متر)
Q	دبی جریان (مترمکعب بر ثانیه)
R	شعاع لوله (متر)
s	شیب جانبی مجرا (-)
S_0	شیب کف لوله (-)
U_d	سرعت جریان به صورت متوسط در عمق (متر بر ثانیه)
V	سرعت متوسط جریان در لوله (متر بر ثانیه)
y	موقعیت گره‌های محاسباتی در عرض لوله (متر)
Fr	عدد فرود جریان در لوله (-)
Re	عدد رینولدز جریان در لوله (-)
SKM	مدل ریاضی Shiono and Knight (-)

۶- منابع‌ها

Abril, J.B. & Knight, D.W. (2004). Stage-discharge prediction for rives in flood applying a depth-averaged model. *J. Hydraul. Res.*, 42(6), 616-629.

Abbs, T.J., Kells, J.A. & Katopodis, C. (2007). A model study of the hydraulics related to fish passage through backwatered culverts. 18th Canadian Hydrotechnical Conference Challenges for Water Resources Engineering in a Changing World. Winnipeg, Manitoba, Canadian Society of Civil Engineers.

Akgiray, O. (2004). Simple formulae for velocity, depth of flow, and slope calculations in partially filled circular pipes. *Environmental Engineering Sciences*, 21(3), 371-385.

Azamathula, H.M.D., Ghani, A.Ab. & YenFei, S. (2011). ANFIS based approach for predicting sediment transport in clean sewer. *Applied Soft Computing*, 12, 1227-1230.

Azevedo, H.S., Morales, R.E., Franco, A.T., Junqueira, S.L. & Erthal, R.H. (2008). Numerical simulation of turbulent flow in corrugated pipes. 12th Brazilian Congress of Thermal Engineering and

خطای مطلق نیز حدود ۳/۶ درصد بوده است. توصیه و تاکید می‌شود که کاربرد مدل پیشنهادی این پژوهش برای حل توزیع عرضی تنش برشی بستر در لوله‌های نیمه‌پر نیز مدنظر قرار گیرد. به این منظور باید از معادله‌هایی که سرعت جریان را به تنش برشی بستر در مقاطع دایره‌ای مرتبط می‌کنند، استفاده شود که با توجه به شکل کف این مقاطع، معادله‌های یادشده مانند آبراهه‌های روباز نخواهد بود. همچنین تاکید می‌شود که با استفاده از مدل پیشنهادی، مجاری دایره‌ای رسوبگذار نیز بررسی و ارزیابی شوند. برای این مجاری، با توجه به بستر رسوبی لوله و نیز امکان تشکیل شکل بستر در این مقاطع، بهینه‌سازی ضریب‌های مدل Shiono and Knight با پیچیدگی بیشتری همراه خواهد بود. همچنین بنا بر مبانی توسعه مدل ریاضی پیشنهادی و با اعمال تغییراتی می‌توان از این مدل برای شبیه‌سازی توزیع سرعت و نیز محاسبه دبی جریان در مجاری فاضلاب با مقاطع خاص مانند مقاطع تخم‌مرغی و ... استفاده کرد.

در ضمن این نکته مهم و بنیادی به‌حتم باید اشاره شود که در مرحله کاربرد مدل شسیونو و نایت برای حالت عمق‌های آب بزرگتر از شعاع لوله، مبانی استخراج این مدل که مبتنی بر فرض جریان آزاد و شیب عرضی صفر و نیز صفر بودن تنش‌های رینولدزی در سطح آزاد آب است در بخشی از محدوده حل مدل دچار نقض می‌شود. با این حال و بنا بر همخوانی نتایج محاسباتی مدل با داده‌های آزمایشگاهی، نتایج مدل پیشنهادی رضایت‌بخش ارزیابی می‌شود. بحث و بررسی این تناقض و ارثه راه‌حل‌های ساده، بهینه و کاربردی برای این موضوع، می‌تواند تحقیق مناسبی در آینده باشد.

۵- فهرست نشانه‌ها

Δy	فاصله‌های عرضی گره‌های محاسباتی (متر)
β	ضریب شدت جریان‌های ثانویه (-)
λ	ضریب بدون بعد لزجت گردابه‌ای (-)
θ	زاویه سطح آب (رادیان)
e	ارتفاع زبری جداره لوله (متر)
ρ	جرم حجمی آب (کیلوگرم بر مترمکعب)

- Fisheries and Marine Service.
- Kehler, N.J. (2009). Hydraulic characteristics of fully developed flow in circular culverts. Winnipeg, Manitoba, M.Sc. Thesis, University of Manitoba.
- Knight, D.W. & Abril, J.B. (1996). Refined calibration of a depth-averaged model for turbulent flow in a compound channel. *Proc. Instn Civ. Engrs. Water, Maritime & Energy*, 118(3), 151-159.
- Knight, D.W. & Sterling, M. (2000). Boundary shear in circular pipes running partially full. *J. Hydraulic Engineering*, 126(4), 263-275.
- Lambert, M.F. & Sellin, R.H.J. (1996). Discharge prediction in straight compound channels using the mixing length concept. *J. Hydraulic Research*, 34, 381-394.
- Magura, C.R. (2007). Velocity structure in an embedded corrugated steel pipe model: Challenges for Water Resources Engineering in a Changing World. Winnipeg, Manitoba: 18th Canadian Hydrotechnical Conference, 22-24.
- McEnroe, B.M. & Malone, T.R. (2008). Hydraulic resistance of small-diameter helically corrugated metal pipes. Lawrence, KS, Kansas Department of Transportation.
- Mohebbi, A. (2014). Turbulent circular culvert flow: Implications to fish passage design. PhD Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Nebraska-Lincoln, 122p.
- Mohebbi, A., Zhai, Y. & Kerényi, K. (2010). Fish passage in large culverts with low flows. McLean, VA: Federal Highway Administration.
- Morrison, R.R., Hotchkiss, R.H., Stone, M., Thurman, D. & Horner-Devine, A.R. 2009. Turbulence characteristics of flow in a spiral corrugated culvert fitted with baffles and implications for fish passage. *Ecological Engineering*, 35(3), 381-392.
- Raths, C.W. & McCauley, R.R. (1962). Deposition in a sanitary sewer. *Water and Sewage Works*, 109(5), 192-197.
- Replogle, J.A. & Chow, V.T. (1966). Tractive-force distribution in open channels. *J. Hydraulic Division*, 92(2), 169-191.
- Regueiro-Picallo, M., Naves, J., Jerónimo Puertas, J.A. & Suárez, J. (2016). Experimental and numerical analysis of egg-shaped sewer pipes flow performance. *Water*, 8, 1-9.
- Rincon, G., La Motta, E. & McCorquodale, J.A. (2009). Discussion of "Tractive force design for sanitary sewer self-cleansing" by Merritt, L.V.B., *J. Environmental Engineering*, 138(4), 525-528.
- Schall, J.D., Thompson, P.L., Zerges, S.M. & Sciences. Belo Horizonte, MG, Brazil, Proceedings of ENCIT.
- Berlamont, J.E., Trouw, K. & Luyckx, G. (2003). Shear stress distribution in partially filled pipes. *J. Hydraulic Engineering*, 129(9), 697-705.
- Camp, T.R. (1946). Design of sewers to facilitate flow. *Sewage Works J.*, 18, 3-16.
- Clark, S.P. & Kehler, N. (2011). Turbulent flow characteristics in circular corrugated culverts at mild slopes. *J. Hydraulic Research*, 49(5), 676-684.
- Ebtehaj, I., Bonakdari, H. & Sharifi, A. (2014). Design criteria for sediment transport in sewers based on self-cleansing concept. *Journal of Zhejiang University- Science A (Applied Physics & Engineering)*, 15(11), 914-924.
- Ervine, D.A., Babaeyan-Koopaei, K. & Sellin, R.H.J. (2000). Two-dimensional solution for straight and meandering overbank flows. *J. Hydraulic Engineering*, 126(9), 653-669.
- Escritt, L.B. (1984). Flow in sewers. In: Sewerage and Sewage Treatment—International Practice. New York: John Wiley & Sons.
- Frenette, M. & Julien, P.Y. (1980). Rapport synthèse sur les caractéristiques hydro-physiques du bassin de la rivière Matamec. Rep. CENTREAU-80-06, Laval Univ., Québec, Canada, 283 p.
- Funamizu, N., Yamashita, S. & Takakuwa, T. (1991). A uniform flow formula for the partially full flow in a circular pipe. *Bulletin of Faculty of the Engineering Hokkaido University*, 155, 1-9.
- Guo, J., Mohebbi, A., Zhai, Y. & Clark, S.P. (2015). Turbulent velocity distribution with dip phenomenon in conic open channels. *J. Hydraulic Research*, 53, 73-82.
- Hu, C., Ju, Z. & Guo, Q. (2010). Flow movement and sediment transport in compound channels. *J. Hydraulic Research*, 48(1), 23-32.
- Hwang, H.K., Song, H.M. & Koo, D.H. (2005). Rehabilitation method for increasing flow velocity and reducing sedimentation. North American Society for Trenchless Technology (NASTT), USA.
- Jiang, Y., Li, B. & Chen, J. (2016). Analysis of the velocity distribution in partially-filled circular pipe employing the principle of maximum entropy. *PLoS One*, 11(3), 1-17.
- Katopodis, C. (1992). Introduction to fishway design. Central and Arctic Region, Department of Fisheries and Oceans. Winnipeg, Manitoba: Freshwater Institute.
- Katopodis, C., Robinson, P.R. & Sutherland, B.G. (1978). A study of model and prototype culvert baffling for fish passage. Department of Fisheries and Environment. Winnipeg, Canada: Western Reg.,

pipes. Department of Civil Engineering. Minneapolis, Minnesota: University of Minnesota Centennial.

Wark, J.B., Samuels, P.G. & Ervine, D.A. (1990). A practical method of estimating velocity and discharge in compound channels. International Conference on River Flood Hydraulics, London, 163-172.

Yoon, J.-I., Sung, J. & Lee, M.H. (2012). Velocity profiles and friction coefficients in circular open channels. *J. Hydraulic Research*, 50(3), 1-8.

Zeghadnia, L., Robert, J.L. & Achour, B. (2019). Explicit solutions for turbulent flow friction factor: A review, assessment and approaches classification. *Ain Shams Engineering Journal*, 10(1), 243-252.

Kilgore, R.T. (2012). Hydraulic design of highway culverts: Hydraulic Design Series, Number 5. Federal Highway Administration.

Shiono, K. & Knight, D.W. (1991). Turbulent open-channel flows with variable depth across the channel. *J. Fluid Mechanics*, 222, 617-646.

Spooner, J. & Shiono, K. (2003). Modelling of meandering channels for overbank flow. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Water and Maritime Engineering*, 156(3), 225-233.

Sterling, M. & Knight, D.W. (2000). Resistance and boundary shear in circular conduits with flat beds running part full. *Proc. Instn Civ. Engrs Water & Mar. Engng*, 142(4), 229-240.

Straub, L. & Morris, H. (1950). Hydraulic data comparison of concrete and corrugated metal culvert



© 2025 The Author(s). Published by Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.

This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.