

Numerical Simulation of Dam-Break Problem using MQ Method Including Bed Slope and Friction

Sima Shokat¹, Alireza Fallah², Reza Babae³, Ehsan Jabbari^{4*}

1- MSc Graduate, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

2- PhD Student, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

3- PhD Graduate, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

4- Associate Professor, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

* e.jabbari@qom.ac.ir

Received: 13 June 2024

Accepted: 10 November 2024

Discussion: 22 December 2025



J. Hydraul.

Iranian Hydraulic Association

Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: In this research, the shallow water equations of dam-break flow have been rewritten in the semi-implicit form to create a system of linear equations. The existing methods used for solving the dam break problem have their pros and cons. For example, the finite volume method requires meshing of the entire problem domain; consequently, in large-scale domains such as the dam break problem, due to using large finite volumes, accuracy will be reduced. The finite difference method also requires points on a regular grid to define the geometry of the problem. Furthermore, such methods obtain the solutions in specific computational nodes or elements of the domain while other points require the interpolation procedure, in which more errors may occur. Besides, most of the numerical methods for modeling discontinuities, which essentially occur in the dam-break problem, have a significant error and computational cost. In this research, the Multiquadric (MQ) method was employed to resolve some of the mentioned weaknesses in solving the problem. The development is carried out in solving systems of unsteady non-linear differential equations by making more convenient the implementation of Radial Basis Functions (RBFs). Since the accuracy of the MQ method drastically depends on its optimal shape parameter, an efficient optimization approach is implemented (Kahid et al., 2020).

Methodology: The Partial Differential Equations (PDE) of the dam break problem include the continuity and momentum equations in the x and y directions. In this research, the system of nonlinear equations is reproduced to solve the dam break problem due to the presence of slope and friction of the bed in the flow. Also, the forward finite difference method is used to discretize the time derivatives. A previously experienced optimization scheme (Kahid et al., 2020), is used for finding the optimal shape parameter as the critical factor in improving the accuracy of the method. In addition, in this approach, the initial conditions of the problem are estimated using the MQ function (for finding the optimized shape parameters), and it may be shown that the obtained optimal shape parameters are also the optimal values for the next time steps. Therefore, there is no need for the shape parameter to be optimized for all subsequent time steps. As a result, the computational cost was significantly reduced. Furthermore, to reduce the non-physical or numerical oscillations, viscous terms were added to the governing equations, which are coefficients of the second derivatives in the x and y directions. In this regard, the optimal values of the unknown coefficients were found as -0.25 and -0.25 in the x and y directions, respectively.

Results and Discussion: MQ-RBF resolves the disadvantages of mesh-based methods, such as the high cost of meshing, the need for interpolation between the grid nodes, etc. In this research, the MQ method has been successfully used to model the dam break problem by considering the friction and slope of the bed. An optimization scheme is used to find the optimal shape parameter as the main critical factor in increasing the accuracy of the MQ method. For instance, six numerical examples are presented to validate the reliability of the proposed approach, for 1D and 2D domains. The examples highlight the capabilities and demonstrate the long-term stability of the proposed approach. In addition, the results of the proposed approach were compared with other numerical and analytical methods (Stoker, 1992), which showed that the solution obtained by the present approach has an acceptable precision compared to the other solutions. Also, this approach may be developed to be used in solving partial and gradual dam break problems.

Conclusion: In this research, the dam break problem has been solved using the meshless MQ method in the presence of the bed and friction slopes. By considering viscous terms the numerical oscillations in the discontinuities were successfully captured. In this regard, the optimal values of the coefficients of the viscous terms were found. The capability and reliability of the numerical model were examined through some 1D and 2D examples. The results showed that the proposed method has acceptable accuracy in simulating the flood flow caused by the dam failure including the friction and slope of the bed, as well as its shock front, with less computational costs compared to other numerical methods.

Keywords: Numerical simulation, Dam-break, Multiquadric method, Meshless method, System of non-linear equations, Shallow water equations.

حل مسئله شکست سد با استفاده از روش بدون شبکه چند ربعی با وجود اصطکاک و شیب بستر

سیما شوکت^۱، علیرضا فلاح^۲، رضا بابایی^۳، احسان جباری^{۴*}

۱- کارشناسی ارشد آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه قم

۲- دانشجوی دکتری آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه قم

۳- دکترای آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه قم

۴- دانشیار گروه مهندسی عمران، دانشگاه قم

* e.jabbari@qom.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۲۳، پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۲۰، نقد و بررسی: ۱۴۰۴/۱۰/۰۱ و بگاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: شکست سد پدیده‌ای است که در پی آن سیلاب ناگهانی عظیمی به سمت پایین‌دست، جریان می‌یابد. حل معادلات حاکم بر پدیده آب‌های کم‌عمق به دلیل غیرخطی بودن نیازمند ملاحظات خاص است. در این تحقیق، معادلات برای استفاده از روش حل شبه‌خطی دستگاه معادلات غیرخطی، بازنویسی گردید. روش بدون شبکه پایه شعاعی با مزایای متعددی شناخته می‌شود از جمله: ایجاد یک تابع پیوسته پاسخ در سراسر میدان محاسباتی، قابلیت بالا در شبیه‌سازی هندسه‌های نامنظم و پیچیده، توانایی بالا در شبیه‌سازی ناپیوستگی‌های موجود در پاسخ‌ها، تعمیم آسان به مسائل سه‌بعدی. این روش برای احتراز از برخی از مشکلات روش‌های باشبکه، شامل تعریف شبکه متشکل از خطوط متقاطع، بعضاً نیاز به حل اساسی مسئله، تکینگی و گسسته‌سازی میدان توسعه داده شد. از مزایای روش های بدون شبکه پیوستگی تابع پاسخ در کل میدان و آسانی تغییر در آرایش نقاط است. به این منظور، دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی و ناپایای حاکم، برای حل مسئله شکست سد با وجود شیب و اصطکاک بستر بازتولید گردید. علاوه بر این برای گسسته‌سازی جمله‌های زمانی از روش اختلاف محدود پیشرو و برای کاهش نوسانات غیرفیزیکی از جملات مستهلک کننده در معادلات حاکم استفاده گردید که این جملات به صورت ضرایبی از مشتقات مرتبه دو در جهات x و y در معادلات اعمال می‌شوند که مقادیر بهینه این ضرائب در جهت هر دو محور x و y برابر با $0/25$ - بدست آمد. در نهایت با حل چند مثال، کارآمدی و دقت قابل قبول این روش در مقایسه با روش‌های عددی و تحلیلی موجود نشان داده شد.

کلیدواژگان: شبیه‌سازی عددی، شکست سد، روش چندربعی، روش بدون شبکه، دستگاه معادلات غیرخطی، معادلات آب‌های کم عمق.

۱- مقدمه

مهم‌ترین عامل‌ها در دقت نهایی پاسخ‌ها در نظر گرفته می‌شود (Kansa et al., 1992). با توجه به اهمیت متغیرشکل در تابع‌های پایه شعاعی، بررسی‌های پرشماری بر روی تأثیر متغیرشکل بر کیفیت تابع‌های چندربعی، معکوس چندربعی^۲ و گوسین^۴ انجام شده است. در این بررسی‌ها وابستگی مقدار بهینه متغیرشکل به شمار و توزیع نقطه‌ها نشان داده شده است (Rippa, 1999). از این

روش چندربعی^۱ که برای حل معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای به کار گرفته می‌شود، زیرمجموعه روش‌های تابع‌های پایه شعاعی است که توسط کانزا (۱۹۹۰) معرفی شده است. از این روش برای حل معادله‌های دیفرانسیل بیضوی، سهموی و هذلولوی استفاده شده است (Kansa, 1990). در این روش، متغیرشکل^۲ به عنوان یکی از

3. Inverse Multiquadric
4. Gaussian

1. Multiquadric method
2. Shape Parameter

آن‌ها را به مسئله‌های دیگر تعمیم داد. در سال‌های اخیر استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته و نتایج مناسبی برای تعیین متغیر شکل به دست آمده است. در این پژوهش نیز به منظور بهره‌مندی از برتری‌ها و دقت بالای روش چندربعی به ویژه در مسئله‌های با ناپیوستگی زیاد، از این روش برای حل مسئله شکست سد استفاده می‌شود.

تاکنون بررسی‌های پرشماری برای حل مسئله شکست سد با ویژگی‌های متفاوت انجام شده است. پدیده شکست سد با استفاده از یک روش اختلاف مرکزی مرتبه دوم و حل معادله‌های دوبعدی غیرهمگن سنت‌ولنت با دقت بالایی شبیه‌سازی شده است (Gottardi et al., 2004). معادله‌های آب‌های کم‌عمق در آبراه‌های باز با بستر خشک و مرطوب توسط مدلی بدون شبکه که بر مبنای روش هیدرودینامیک ذرات هموار^۳ توسعه داده شده، حل شده است (Chang et al., 2011). همچنین، این معادله‌ها در شرایط بستر خشک و مرطوب، هندسه نامنظم و وجود اصطکاک بستر، توسط مدلی با استفاده از روش بدون شبکه تابع پایه شعاعی محلی بر اساس دیفرانسیل ربعی^۴ حل شده است (Behroozi et al., 2023). به رغم بررسی‌های کم انجام شده در خصوص شکست سد جزئی، مدل‌های هیدرولیکی گوناگونی برای مدل‌سازی آن گسترش یافته است به طوری که نتایج این مدل‌ها ابزارهای مناسبی برای مدیریت و رویارویی با مخاطره شکست سد به شمار می‌آید (Liu et al., 2024). در مسئله شکست سد، به دلیل وجود گرادیان شدید عمق، افزودن جمله‌های استهلاک مصنوعی در فرآیند حل، به پایداری و دقت مناسب در پاسخ‌ها می‌انجامد (Yazdi et al., 2008). مسئله شکست سد با روش‌های مختلفی در زمینه تابع‌های پایه شعاعی مانند تابع‌های محلی مدل‌سازی شده است که نتایج نشان دهنده عملکرد و هزینه محاسباتی مناسب، سرعت بالا و پایداری روش است (Jiang et al., 2023).

بدیهی است که روش‌های به کاررفته در حل مسئله شکست

رو می‌توان با در نظر گرفتن خطای نسبی بین پاسخ روش چندربعی و پاسخ دقیق مسئله، مقدار بهینه این متغیر را تعیین کرد (Wertz et al., 2006). در صورتی که پاسخ‌های تحلیلی از مسئله مورد نظر در دست نباشد، می‌توان با به کارگیری روش کوشی و استفاده از معیار ریشه میانگین مربعات خطا به بهینه‌سازی متغیر شکل پرداخت (Fallah et al., 2019). در روشی دیگر در آغاز، مقدار بهینه متغیر شکل برای مسئله‌هایی که پاسخ تحلیلی دارند به دست می‌آید، آنگاه همان مقدارها برای مسئله‌های همانندی که پاسخ تحلیلی ندارند، استفاده می‌شود. فرض اساسی این الگوریتم این است که متغیر شکل بهینه تا حد زیادی به شکل دامنه محاسباتی، نوع شرایط مرزی، شمار و چگونگی توزیع گره‌ها و معادله حاکم بستگی دارد (Chen et al., 2018). با شیوه تجزیه دامنه، افزون بر افزایش سرعت در همگرایی، از تکینه شدن و بد وضع^۱ شدن ماتریس ضریب‌ها نیز جلوگیری می‌شود (Wong et al., 1999)؛ ضمن اینکه می‌توان با استفاده از گام‌های زمانی کوچک از بد وضع شدن ماتریس ضریب‌ها جلوگیری کرد (Tatari et al., 2009). با استفاده از شیوه تجزیه دامنه، می‌توان پیچیدگی دامنه‌های بزرگ را رفع کرده و با کوچک کردن متغیر شکل و پایین آوردن عدد وضعیت^۲ ماتریس ضریب‌ها، دقت نتایج را افزایش داد (Kansa et al., 2013). همچنین این روش در حل معادله‌های آب‌های کم‌عمق برای تحلیل و مدل‌سازی جریان جزر و مد سه‌بعدی استفاده شده است (Wong et al., 2002).

موارد بیان شده نشان می‌دهند که پژوهشگران روش چندربعی را برای حل مسئله‌های هیدرولیک محاسباتی با موفقیت به کار برده‌اند. همچنین با توجه به پژوهش‌های انجام‌گرفته در زمینه تعیین متغیر شکل، پژوهشگران تلاش می‌کنند متغیر شکل را با ارائه رابطه‌های تجربی یا الگوریتم‌های بهینه‌سازی، به دست آورند. رابطه‌های تجربی به دست آمده برای مسئله‌های مورد نظر نتایج مناسبی ارائه داده‌اند، اما به دلیل تجربی بودن، نمی‌توان کارایی

4. Local Radial Basis Function-based Differential Quadrature Method (LRBF-DQM)

1. Ill-conditioned
2. Condition Number
3. SPH Method

متغیرشکل بهینه در هر گام زمانی و (۵) بالا بودن هزینه محاسباتی می تواند تا حدی مرتفع شود.

۲- معادله‌ها، شرایط اولیه و مرزی حاکم بر

پدیده شکست سد

معادله‌های حاکم بر جریان ناشی از شکست سد در حالت دوبعدی عبارت‌اند از:

$$U_t + E_x + F_y = S \quad (1)$$

که در آن:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(s_{0x} - S_{fx}) \\ gh(s_{0y} - S_{fy}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$E_x = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$F_y = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

در معادله‌های (۲)، (۳) و (۴)، x فاصله در راستای طول آبراهه، y فاصله در راستای عرض آبراهه، t زمان، h ارتفاع آب، u و v به ترتیب سرعت در راستاهای x و y ، g شتاب گرانش، S_{0x} و S_{0y} شیب کف آبراهه به ترتیب در راستاهای x و y ، و S_{fx} و S_{fy} شیب اصطکاکی به ترتیب در راستاهای x و y است.

$$S_f = \frac{u^2 n^2}{R^{\frac{4}{3}}} \quad (5)$$

که در آن R شعاع هیدرولیکی و n ضریب اصطکاک بستر مانینگ است. به عنوان شرایط اولیه، در زمان $t = 0$ ارتفاع آب در بالادست سد برابر با h_0 و ارتفاع آب در پایین دست سد برابر با h_d است که در شکل ۱ نشان داده شده است. همچنین این دو مقدار در بالادست و پایین دست سد به عنوان مقدارهای مرزی در نظر گرفته می‌شود. لازم به یادآوری است که در این رویکرد از آنجایی که ضحامت

سد با توانمندی‌ها و کاستی‌هایی روبه‌رو بوده‌اند. به‌عنوان مثال، روش‌های عددی باشبکه مانند روش حجم محدود، نیازمند شبکه‌بندی کل دامنه مسئله هستند؛ لذا در دامنه‌های بزرگ مقیاس مانند مسئله شکست سد به علت استفاده از عنصرهای بزرگ با کاهش دقت همراه هستند. روش‌های اختلاف محدود نیز برای مدل‌سازی هندسه مسئله به نقطه‌های با شبکه منظم نیاز دارند. چنین روش‌هایی پاسخ را در نقطه‌های خاصی از دامنه به دست می‌آورند و در دیگر نقطه‌ها مستلزم درون‌یابی و لذا بروز خطای بیشتر در تقریب هستند. همچنین بسیاری از روش‌های عددی در مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها چنانکه در پدیده شکست سد دیده می‌شود، خطای زیادی دارند یا هزینه محاسباتی آن‌ها چشمگیر است (Toro, 2001). در این پژوهش، روش چندربعی با هدف رفع برخی از کاستی‌های نامبرده برای حل مسئله شکست سد و به کارگیری برتری‌های روش‌های بدون شبکه توسعه می‌یابد. به‌طور کلی، این کاربرد در زمینه حل دستگاه‌های معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی ناپایا و به منظور بسط کاربرد روش‌های پایه شعاعی انجام می‌شود. از آنجایی که دقت روش چندربعی به کلی به مقدار بهینه متغیرشکل وابسته است، از یکی از طرح‌های بهینه‌سازی، به این صورت که در گام زمانی اول، متغیرشکل بهینه به دست آمده و آنگاه به عنوان مقدار بهینه در گام‌های بعد به کار برده می‌شود، استفاده شده است. به این ترتیب، شرایط اولیه مسئله با تابع چندربعی درون‌یابی و متغیرشکلی که منجر به دقیق‌ترین تخمین از آن شده، به‌عنوان متغیرشکل بهینه انتخاب می‌شود. نتیجه جالب توجه این است که مقدار بهینه به دست آمده برای متغیرشکل برای حل مسئله در گام‌های زمانی بعدی تغییر نمی‌کند و نیازی به بهینه کردن آن در هر گام زمانی نیست. به این ترتیب حجم محاسبه روش چندربعی به مقدار قابل توجهی کاهش می‌یابد (Fallah et al., 2019 و Kahid et al., 2020). بنابراین برخی کاستی‌های الگوریتم‌های پیشین اعم از (۱) وابسته بودن به یک پاسخ دیگر از مسئله، (۲) وابستگی به هندسه و فیزیک مسئله (تجربی بودن)، (۳) حل مسئله به ازای دو دسته از نقطه‌های محاسباتی، (۴) بهینه‌سازی

$$\begin{cases} h = h_0 \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad (8)$$

ب: شرایط مرزی نوع S_2 :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial x} \\ v & u \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

در این نوع شرط مرزی مولفه‌های سرعت و تغییر عمق در راستاهای x و y صفر است. همچنین تغییر u و v به ترتیب در راستاهای y و x صفر در نظر گرفته شده است. در رابطه (۹)، \vec{n} بردار نرمال مرز مورد نظر است.

ج: شرایط مرزی نوع S_3 :

$$\begin{cases} h = h_d \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad (10)$$

۳- روش چند ربعی

در حل معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر مسئله‌های دوبعدی به روش چندربعی، تابع‌های پاسخ با رابطه (۱۱) تقریب زده می‌شوند و با استفاده از آن، پاسخ معادله‌ها در هر نقطه از میدان محاسباتی به دست می‌آید (Hardy, 1971):

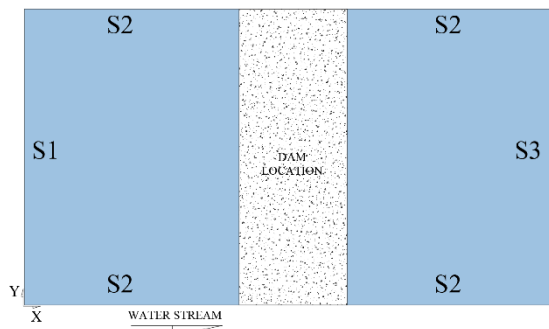


Fig. 2 Geometry and boundary conditions in 2-D problems (Top view of the domain)

شکل ۲ هندسه و شرایط مرزی در حالت حل دو بعدی (پلان دامنه)

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + c^2} \quad (11)$$

دریچه یا سد در مقابل طول آبراهه بسیار ناچیز است، با اطمینان خاطر از ضخامت سد صرف نظر می‌شود، لذا:

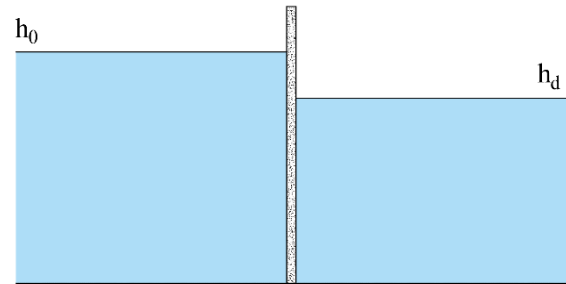


Fig. 1 Initial and boundary conditions in 1-D problems
شکل ۱ شرایط اولیه و مرزی در حالت میدان یک بعدی

(الف) شرایط اولیه برای بالادست سد:

$$\begin{cases} h = h_0 \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad 0 < x \leq \frac{L}{2} \quad (6)$$

(ب) شرایط اولیه برای پایین دست سد:

$$\begin{cases} h = h_d \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad \frac{L}{2} < x < L \quad (7)$$

شرایط مرزی مسئله در دو حالت میدان‌های یک‌بعدی و دوبعدی در نظر گرفته شده است. در حالت یک‌بعدی، برای اعمال شرایط مرزی، تا هنگامی که موج‌های مثبت و منفی به ترتیب به مرزهای پایین دست و بالادست نرسیده باشند، عمق آب در بالادست و پایین دست سد، مقداری ثابت در نظر گرفته می‌شود. پس از آن شرایط مرزی گرادیان صفر برای متغیر عمق در بالادست و پایین دست لحاظ می‌شود.

در حالت دو بعدی طبق شکل ۲، انواع مرزها تعریف شده‌اند. با این فرض که اثر موج آب بر مرزهای بالادست و پایین دست قابل صرف نظر باشد، مقدارهای عمق و سرعت آب در آن‌ها ثابت در نظر گرفته شده است. فرض بالا به این معنی است که محاسبه‌ها تا رسیدن موج‌های مثبت و منفی به مرزهای پایین دست و بالادست معتبر هستند. با این توضیح، شرایط مرزی برای مرزهای مختلف به صورت زیر تعریف می‌شوند:

الف: شرایط مرزی نوع S_1 :

یک ویژگی مثبت برای تابع چنددرجی به حساب می‌آید چرا که هزینه‌های محاسباتی برای یافتن مقدار بهینه متغیر شکل را به شدت کاهش می‌دهد.

برای گسسته‌سازی جمله‌های متغیر زمانی $\frac{\partial h}{\partial t}$ ، $\frac{\partial p}{\partial t}$ و $\frac{\partial q}{\partial t}$ در دستگاه معادله‌های حاکم، از تقریب اختلاف پیشرو طبق رابطه (۱۵) استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} \quad (15)$$

در رابطه (۱۵)، ψ می‌تواند h ، q یا p باشد. n نیز شمارنده گام زمانی است. با ترکیب رابطه (۱) و (۱۵) گسسته‌سازی معادله‌ها به روش شبه‌خطی (Kahid et al., 2020) صورت می‌گیرد که در ادامه شرح داده شده است.

۵- باز تولید معادله‌های حاکم به روش شبه‌خطی

دستگاه معادله‌های حاکم به روش شبه‌خطی طبق رابطه‌های (۱۶) تا (۱۸) بیان می‌شود (Kahid et al., 2020).

$$h^{n+1} + \Delta t \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} = h^n \quad (16)$$

$$a \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} + b \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} + q^{n+1} + 2d \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x} + e \frac{\partial q^{n+1}}{\partial y} + \dots$$

$$d \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} = q^n + \Delta t \cdot g \cdot h^n (S_{0x} - S_{fx}) \quad (17)$$

$$b \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} + f \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} + e \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x} + p^{n+1} + d \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + \dots$$

$$2e \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} = p^n + \Delta t \cdot g \cdot h^n (S_{0y} - S_{fy}) \quad (18)$$

در این رابطه، متغیرهای a ، b ، d ، e و f در مجموعه رابطه‌های (۱۹) تا (۲۳) به صورت زیر تعریف شده‌اند:

در رابطه (۱۱)، N شمار کل نقطه‌های محاسباتی در درون دامنه، x_j و y_j مختصات مرکزهای محاسباتی و c متغیر شکل است که در قسمت بعد به آن پرداخته می‌شود. نقطه‌های برهم‌نهی^۱ به منظور اعمال معادله‌های حاکم و شرایط مرزی به ترتیب در درون میدان محاسباتی و روی مرزها قرار می‌گیرند تا ضریب‌های مجهول λ تعیین شوند. با یافتن این ضریب‌ها، تابع تقریب $f(x, y)$ که تابع پاسخ مسئله است شکل می‌گیرد. در این پژوهش به منظور کاربرد آسان‌تر روش چنددرجی، مرکزهای محاسباتی و برهم‌نهی منطبق بر یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند.

توزیع نقطه‌های محاسباتی و برهم‌نهی، بسته به نوع هندسه و پدیده مورد بررسی می‌تواند به صورت یکنواخت یا غیریکنواخت باشد. در این پژوهش برای هر دو حالت یک‌بعدی و دوبعدی، توزیع این نقطه‌ها به صورت یکنواخت مربعی در نظر گرفته شده است.

۴- باز تولید معادله‌های حاکم و شرایط مرزی با تابع چنددرجی

برای مقدارهای عمق آب، دبی در راستای x (راستای جریان) و دبی در راستای y (عمود بر راستای جریان)، تابع‌های تخمین چنددرجی به صورت رابطه‌های (۱۲) تا (۱۴) در نظر گرفته می‌شود:

$$h(x, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + c_h^2} \quad (12)$$

$$p(x, y) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + c_p^2} \quad (13)$$

$$q(x, y) = \sum_{j=1}^N \beta_j \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + c_q^2} \quad (14)$$

در رابطه‌های (۱۱)، تا (۱۳)، $q = hu$ و $p = hv$ ، c_h ، c_p و c_q نیز متغیرهای شکل مربوط به h ، p و q هستند. در این پژوهش نشان داده می‌شود که در حل مسئله شکست سد به روش چنددرجی $c = c_h = c_p = c_q$ است. این امر

1. Collocation nodes

در رابطه‌های (۱۶) تا (۱۸) با استفاده از تابع‌های تخمین رابطه‌های (۱۲) تا (۱۴) و نیز با اعمال مشتق آن‌ها به صورت رابطه‌های (۲۴) تا (۲۶) بازنویسی می‌شوند.

در معادله‌های (۲۴) تا (۲۶)، ضمن اینکه در معادله‌ها در کنار یکدیگر دستگاه معادله‌های حاکم بر پدیده شکست سد به روش ضمنی چندربعی - اختلاف محدود پیشرو را تشکیل می‌دهند. واضح است که معادله‌های مذکور برای حل هر مسئله دویعدی با شمار N نقطه محاسباتی منجر به حل یک دستگاه معادله‌های جبری $3N \times 3N$ برای محاسبه ضریب‌های λ_j^{n+1} ، α_j^{n+1} و β_j^{n+1} در هر گام زمانی می‌شوند. بنابراین استفاده از کمترین شمار نقطه‌های محاسباتی به منظور کاهش زمان محاسبه ضروری است.

با به دست آمدن ضریب‌های مجهول λ_j ، α_j و β_j تابع‌های تخمین عمق و دبی در هر دو راستای یعنی رابطه‌های (۱۲) تا (۱۴) در هر گام زمانی به دست می‌آیند.

۵-۱- استهلاک نوسان‌های غیرفیزیکی

برای کاهش نوسان‌های غیرفیزیکی (عددی) در حل مسئله شکست سد با شیب هندسی و اصطکاکی می‌توان از جمله‌های مستهلک کننده‌ای شامل مشتق دوم تابع‌های هدف در راستاهای x و y استفاده کرد. در این رویکرد تابع هدف عمق جریان است که مشتق‌های دوم آن مطابق رابطه‌های (۲۷) تا (۲۹) به معادله‌های حاکم اضافه می‌شوند.

$$h^{n+1} + \Delta t \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x} + \Delta t \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} + \dots \quad (27)$$

$$\xi \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial y^2} = h^n$$

$$a \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} + b \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} + q^{n+1} + \dots \quad (28)$$

$$2d \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x} + e \frac{\partial q^{n+1}}{\partial y} + d \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} + \dots$$

$$\xi \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial y^2} = q^n + \Delta t \cdot g \cdot h^n (S_{0x} - S_{fx})$$

$$a = \Delta t \frac{g [h^n]^3 - [q^n]^2}{[h^n]^2} \quad (19)$$

$$b = -\Delta t \frac{q^n \times p^n}{[h^n]^2} \quad (20)$$

$$d = \Delta t \frac{q^n}{h^n} \quad (21)$$

$$e = \Delta t \frac{p^n}{h^n} \quad (22)$$

$$f = \Delta t \frac{g [h^n]^3 - [p^n]^2}{[h^n]^2} \quad (23)$$

منظور از تعبیر شبه‌خطی در عبارت‌های بالا خطی‌سازی یک معادله غیرخطی است با معلوم دانستن بخشی از متغیرها به گونه‌ای که معادله با باقی‌مانده متغیرهای مجهول، شکل خطی داشته باشد. این رویکرد در یک فرایند تکراری شمار تکرار را افزایش می‌دهد اما از دقت پاسخ نهایی نمی‌کاهد. دستگاه معادله‌های نشان داده شده

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \sqrt{r_j^2 + c^2} + \Delta t \sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \frac{x - x_j}{\sqrt{r_j^2 + c^2}} + \dots \quad (24)$$

$$\Delta t \sum_{j=1}^N \beta_j^{n+1} \frac{y - y_j}{\sqrt{r_j^2 + c^2}} = h^n$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \frac{a(x - x_j) + b(y - y_j)}{\sqrt{r_j^2 + c^2}} + \dots \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \frac{r_j^2 + c^2 + 2d(x - x_j) + e(y - y_j)}{\sqrt{r_j^2 + c^2}} + \dots$$

$$\sum_{j=1}^N \beta_j^{n+1} \frac{d(y - y_j)}{\sqrt{r_j^2 + c^2}} = q^n + \Delta t \cdot g \cdot h^n (S_{0x} - S_{fx})$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_j^{n+1} \frac{b(x - x_j) + f(y - y_j)}{\sqrt{r_j^2 + c^2}} + \dots \quad (26)$$

$$\sum_{j=1}^N \beta_j^{n+1} \frac{r_j^2 + c^2 + d(x - x_j) + 2e(y - y_j)}{\sqrt{r_j^2 + c^2}} + \dots$$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^{n+1} \frac{e(x - x_j)}{\sqrt{r_j^2 + c^2}} = p^n + \Delta t \cdot g \cdot h^n (S_{0y} - S_{fy})$$

$$h(x,t) = \begin{cases} h_L \rightarrow \text{if } : x \leq \frac{L}{2} - t\sqrt{gh_L} \\ \frac{1}{9}(2\sqrt{gh_L} - \frac{1}{2t}(2x-L))^2 \rightarrow \dots \\ \text{if } : \frac{L}{2} - t\sqrt{gh_L} \leq x \leq (u_2 - c_2)t + \frac{L}{2} \\ \frac{h_R}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8S^2}{gh_R}} - 1 \right) \rightarrow \text{if } : (u_2 - c_2)t + \frac{L}{2} \leq x \leq St + \frac{L}{2} \\ h_R \rightarrow \text{if } : x \geq St + \frac{L}{2} \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{cases} u_2 = S - \frac{gh_R}{4S} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{8S^2}{gh_R}} \right) \\ c_2 = \sqrt{\frac{gh_R}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8S^2}{gh_R}} - 1 \right)} \end{cases} \quad (33)$$

که در آن S سرعت موج تکانه، ریشه مثبت مقدار $u_2 + 2c_2 - 2\sqrt{gh_L}$ است (Seyedashraf et al., 2018). نتایج این حل تحلیلی در بررسی دقت مثال‌های عددی استفاده شده است.

۶- مثال‌های عددی

یکی از رویکردهای عددی مشهور و شاخص در حل معادله‌های مشتق پاره‌ای سهموی روش مک کورمک است. لذا مثال‌های یک و دوبعدی این بخش با استفاده از روش‌های بدون شبکه چندبندی و مک کورمک با در نظر گرفتن شیب‌های متفاوت اصطکاک و توپوگرافی بستر و همچنین مانع‌هایی در مسیر جریان، حل و نتایج آن ارائه شده است.

۶-۱- مثال‌های یک‌بعدی

در این مثال‌ها، آبراهه‌هایی با ویژگی‌های مندرج در جدول ۱ در نظر گرفته شده است. همچنین، سد در وسط آبراهه قرار دارد و عمق آب در بالادست آن ۱۰ متر و در پایین دست آن ۵ متر است که در نتیجه بستر پایین دست به صورت تر منظور شده است.

در این مثال‌ها، مقدار بهینه ضریب جمله استهلاک $\xi = -13$ به دست آمده است. (تحلیل حساسیت خطا نسبت به تغییر ضریب استهلاک ξ در شکل ۳ مشاهده می‌شود). همچنین توزیع نقطه‌ها در طول آبراهه به صورت

$$\begin{aligned} & b \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} + f \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} + p^{n+1} + \dots \\ & e \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x} + d \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + 2e \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} + \dots \\ & \xi \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^2 h^{n+1}}{\partial y^2} = p^n + \Delta t \cdot g \cdot h^n (S_{0y} - S_{fy}) \end{aligned} \quad (29)$$

همچنین جمله‌های استهلاکی که برای متغیر h جایگذاری شده است را می‌توان با جمله‌های همانند برای دبی‌های جریان در راستاهای x و y جایگزین کرد (رابطه‌های ۲۸ و ۲۹)، اما تجربه نشان داده است که به استفاده همزمان از جمله‌های استهلاکی شامل بیش از یک متغیر نیازی نیست و بلکه یافتن مقدارهای ضریب‌های بهینه این جمله‌ها اگر ناممکن نباشد بسیار زمانبر است. لازم به یادآوری است که مقدارهای ضریب‌های جمله‌های مستهلک کننده (ξ و η) در گام‌های زمانی مختلف قابل بهینه‌سازی است.

۵-۲- راستی آزمایی (حل تحلیلی استوکر)

یکی از بهترین روش‌های راستی آزمایی الگوریتم‌های عددی مقایسه نتایج آنها با پاسخ‌های یک روش حل تحلیلی همان مسئله می‌باشد. استوکر حل دقیق پدیده شکست سد در حالت یک بعدی بدون در نظر گرفتن شیب و اصطکاک را ارائه داده است (Stoker, 1992). روش عددی این پژوهش بدون در نظر گرفتن شیب و اصطکاک با روش استوکر مقایسه شده و پاسخ‌های مناسبی به دست آمده‌اند. پاسخ‌های روش استوکر به شرح زیر است:

$$u(x,0) = 0$$

$$h_L = \begin{cases} h_L \rightarrow \text{if } 0 \leq x \leq \frac{L}{2} \\ h_R \rightarrow \text{if } \frac{L}{2} \leq x \leq L \end{cases} \quad (30)$$

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 \rightarrow \text{if } : x \leq \frac{L}{2} - t\sqrt{gh_L} \\ \frac{1}{3t}(2(x+t\sqrt{gh_L}) - L) \rightarrow \dots \\ \text{if } : \frac{L}{2} - t\sqrt{gh_L} \leq x \leq (u_2 - c_2)t + \frac{L}{2} \\ u_2 \rightarrow \text{if } : (u_2 - c_2)t + \frac{L}{2} \leq x \leq St + \frac{L}{2} \\ 0 \rightarrow \text{if } : x \geq St + \frac{L}{2} \end{cases} \quad (31)$$

بین دو پاسخ، از رابطه معیار خطای زیر محاسبه شده است:

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \left(\frac{f_i^{anl} - f_i^{rbf}}{f_i^{anl}} \times 100 \right)^2}{n}} \quad (34)$$

که در آن E_{rms} ریشه میانگین مربعات درصد خطا، f_i^{anl} پاسخ تحلیلی مسئله در نقطه نام مشاهده، f_i^{rbf} پاسخ روش چندربعی در نقطه نام مشاهده و n شمار نقطه‌های مشاهده است.

روش مدل‌سازی این تحقیق در مثال اول (شکل ۵)، همخوانی مناسبی با روش مک کورمک (Amini et al., 2020) و (Banhashemi et al., 2008) دارد به گونه‌ای که خطای E_{rms} آن کمتر از یک درصد به دست آمده است. در سه مثال اول، با تغییر ضریب مانینگ و ثابت نگه داشتن شیب بستر، مشخص شد که افزایش ضریب مانینگ در شرایط یکسان مسئله، باعث کاهش ارتفاع پیشانی موج مثبت پیشرونده به سوی بالادست می‌شود. در شکل ۶ تاثیر تغییر ضریب مانینگ نمایش داده شده است. در شکل ۷ نیز تاثیر گرانروی مصنوعی بر حل مسئله دیده می‌شود به طوری که با اضافه کردن آن به معادله‌های حاکم، نوسان‌ها از بین رفته و مکان موج منفی بالادست تغییر می‌کند.

چنانکه مشاهده می‌شود، در مثال دوم از این بخش (حالت‌های ۱ تا ۵)، با ثابت نگه داشتن ضریب مانینگ و افزایش شیب آبراهه، موج ناشی از شکست سد (موج منفی

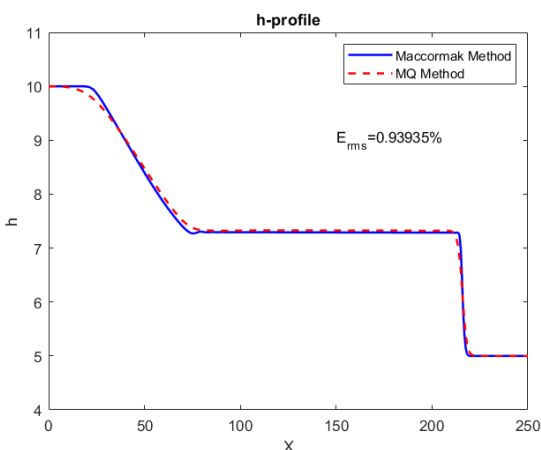


Fig. 5 Water surface profile in example 1, case 1
شکل ۵ نیمرخ طولی سطح آزاد آب در حالت ۱ مثال ۱

جدول ۱ ویژگی‌های مثال‌های یک بعدی

Example	Case	L	n	S0
1	1	250	0.015	0.000
	2	250	0.045	0.000
	3	250	0.150	0.000
2	1	250	0.029	0.001
	2	250	0.029	0.005
	3	250	0.029	0.008
	4	250	0.029	0.010
	5	250	0.029	0.020
3	1	2000	0	0

یکنواخت و با شمار ۴۰۱ مرکز محاسباتی لحاظ شده است. افزون بر این، در شکل ۴ تحلیل حساسیت خطای مدل نسبت به تغییر پارامتر شکل ارائه شده است. همان‌طور که در این شکل مشاهده می‌شود، به ازای بازه‌ای از متغیر شکل، مقدار بهینه‌ای وجود دارد.

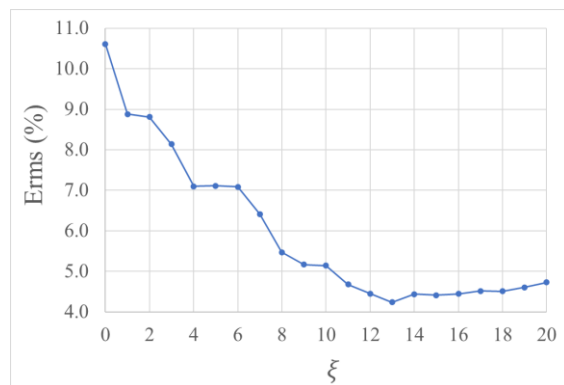


Fig. 3 Variations of Erms with respect to ξ

شکل ۳ تغییر خطا بر حسب تغییر ضریب استهلاک

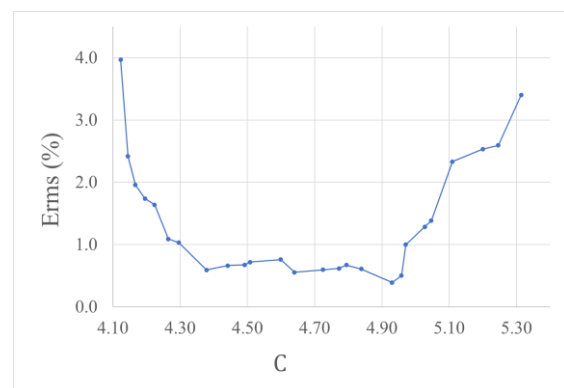
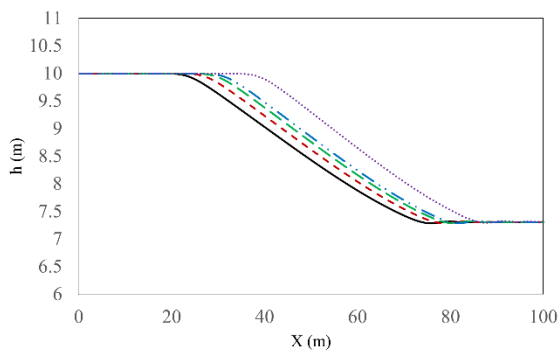


Fig. 4 Variations of Erms with respect to shaper parameter

شکل ۴ تغییر خطا بر حسب تغییر متغیر شکل

پاسخ‌های رویکرد این پژوهش با پاسخ‌های تحلیلی موجود و روش عددی مک کورمک مقایسه شده‌اند. تفاوت کمی

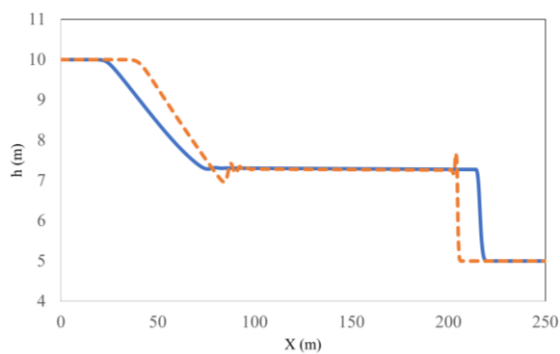
نوسان‌های موج ناشی از شکست سد با افزوده شدن گرانروی مصنوعی به مدل‌سازی، از بین می‌رود. همچنین پیشروی موج مثبت به سوی پایین‌دست و موج منفی به سوی بالادست نسبت به حالت بدون گرانروی مصنوعی بیشتر می‌شود.



— Case 1 - - - Case 2 Case 3 - · - - Case 4 Case 5

Fig. 9 Magnified water surface profile in cases 1-5 of with different channel slopes example 1

شکل ۹ بزرگنمایی نیمرخ طولی سطح آزاد آب در حالت‌های ۱ تا ۵ مثال ۱ به ازای شیب‌های مختلف و ضریب مانینگ یکسان



— With Artificial Viscosity - - - Without Artificial Viscosity

Fig. 10 Water surface profile in example 2 with and without artificial viscosity

شکل ۱۰ مقایسه نیمرخ طولی سطح آزاد آب در مثال ۲ با و بدون گرانروی مصنوعی

در شکل ۱۱ (مربوط به مثال سوم) همخوانی مناسبی بین پاسخ‌های دقیق استوکر با روش‌های MQ و روش مک‌کورمک (Amini et al., 2020 و Banihashemi et al., 2008) دیده می‌شود. مقدار خطای محاسبه شده بین روش چندربعی و روش استوکر به میزان ۰/۸ درصد و بین روش مک‌کورمک و استوکر به میزان ۰/۴۸ درصد می‌باشد که نشان دهنده همخوانی بسیار مناسب بین هر دو روش با پاسخ تحلیلی (استوکر) است.

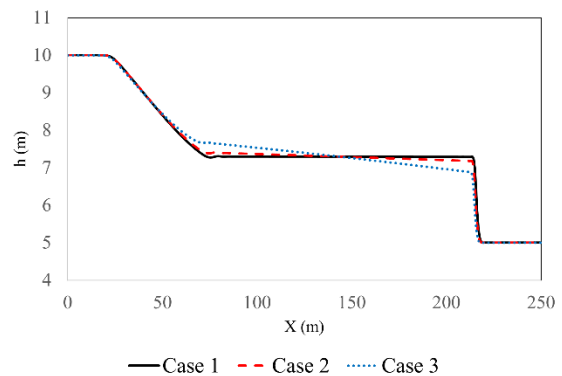


Fig. 6 Water surface profile in example 1 with different Manning's coefficients

شکل ۶ مقایسه نیمرخ طولی سطح آزاد آب در مثال ۱ با ضریب‌های مانینگ مختلف

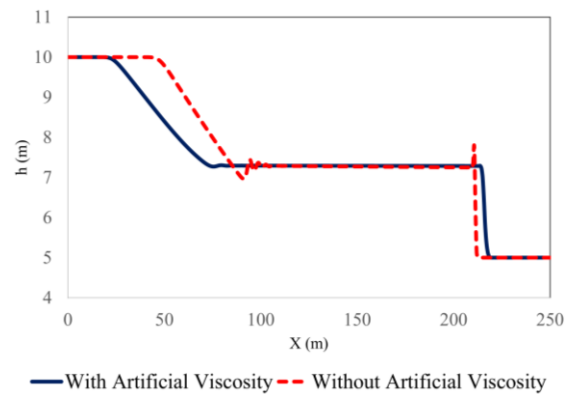


Fig. 7 Water surface profile in example 1 with and without artificial viscosity

شکل ۷ مقایسه نیمرخ طولی سطح آزاد آب در مثال ۱ با و بدون گرانروی مصنوعی

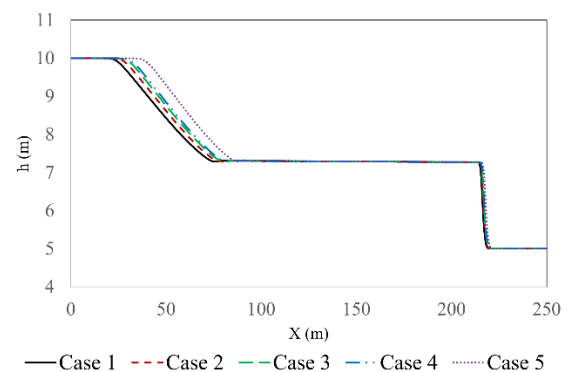


Fig. 8 Water surface profile in cases 1-5 of example 1 with different channel slopes

شکل ۸ نیمرخ طولی سطح آزاد آب در حالت‌های ۱ تا ۵ مثال ۱ به ازای شیب‌های مختلف و ضریب مانینگ یکسان

کاهنده بالادست) به سمت پایین دست جابه‌جا می‌شود اما پیشانی موج مثبت، به نسبت موج منفی، تغییرمکان چندانی ندارد (شکل ۸). در شکل ۱۰ دیده می‌شود که

منظور شده است (شکل ۱۲). در مثال پنجم، با افقی نگه داشتن کف بالادست، تغییر شیب پایین دست بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد که وجود شیب کف (مثبت یا منفی) در حوضچه پایین دست در نیمرخ سطح آب بی‌تاثیر است در حالی که شیب کف (مثبت یا منفی) در قسمت بالادست سد به روشنی موجب افزایش یا کاهش تراز آب می‌شود (شکل ۱۳). به طور دقیق‌تر، شیب مثبت منجر به کاهش عمق آب و شیب منفی موجب افزایش عمق آب می‌شود.

جدول ۴ ویژگی‌های مثال ۶

Example	Case	L	S0(Y) (Left Side)	S0(Y) (Right Side)
	1	200	-0.05	0.05
6	2	200	0.05	-0.05
	3	200	0	0

در مثال ششم، شیب در راستای جریان ثابت و افقی است اما کف آبراهه از مقطع طولی در وسط آن به دو طرف دارای شیب‌های عرضی متفاوتی است؛ به طوری که با بالا آمدن دو طرف آبراهه، (مقطع کف آبراهه به صورت ۷ شکل) سطح آب نسبت به حالت شیب عرضی صفر (افقی) در وسط عرض آبراهه بالاتر می‌آید و در حالت مقطع ۸ شکل عکس آن رخ خواهد داد (شکل ۱۴). به تعبیر دیگر در شیب ۷ شکل جریان به سمت محور مرکزی آبراهه، موجب افزایش عمق در محور مرکزی و برعکس در حالت شیب ۸ شکل جریان به سمت دیواره‌های آبراهه، منجر به کاهش عمق در محور مرکزی آبراهه می‌شود.

همچنین، در فرآیند حل، مقدارهای بهینه ضریب‌های استهلاک برای راستاهای x و y با آزمون و خطا به ترتیب 0.25 و -0.25 به دست آمد.

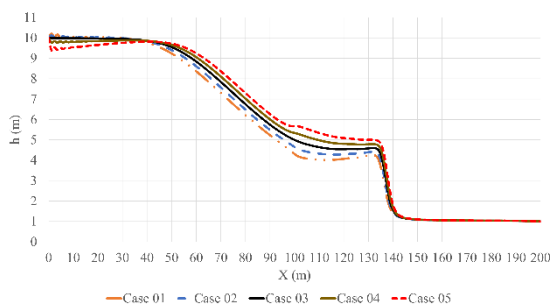


Fig. 12 Water surface profile in example 4

شکل ۱۲ نیمرخ طولی سطح آزاد آب در مثال ۴

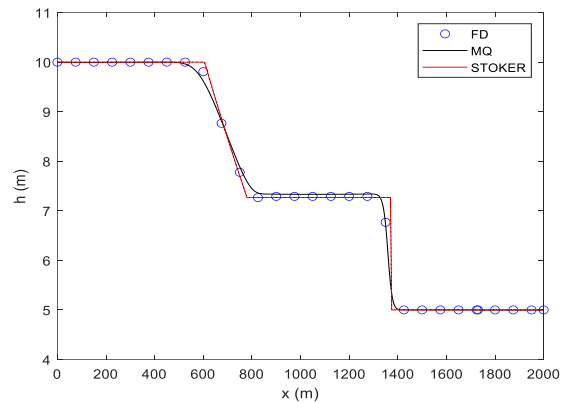


Fig. 11 Water surface profile in example 3

شکل ۱۱ نیمرخ طولی سطح آزاد آب در مثال ۳

جدول ۲ مقایسه خطای روش مک‌کورمک و روش چندربعی با پاسخ تحلیلی

Table 2 Comparison of MQ and MacCormack methods with analytical solution

Method	McCormack	MQ
E_{rms} (%)	0.48	0.8

۷- مثال‌های دوبعدی

در این بخش، آبراهه‌های مستطیلی دوبعدی با ویژگی‌های مندرج در جدول ۳ و جدول ۴ در نظر گرفته شده است. همچنین، سد در وسط آبراهه قرار دارد و عمق آب در بالادست آن ۱۰ متر و در پایین دست آن یک متر فرض شده است. همه نتایج در زمان ۴/۵ ثانیه پس از شکست سد و با گام‌های زمانی ۰/۱ ثانیه (۴۵ گام زمانی) به دست آمده‌اند.

جدول ۳ ویژگی‌های مثال‌های دو بعدی

Table 3 2-D Examples Specifications

Example	Case	L	S0(X) (Reservoir)	S0(X) (Basin)
	1	200	-0.050	0
	2	200	-0.025	0
4	3	200	0	0
	4	200	0.025	0
	5	200	0.050	0
	1	200	0	-0.050
	2	200	0	0.025
5	3	200	0	0
	4	200	0	0.025
	5	200	0	0.050

در مثال چهارم، شیب کف آبراهه پایین دست سد برابر با صفر (افقی) و بالادست (مخزن) با شیب‌های متغیر مثبت و منفی

معادله‌های حاکم از عبارتهای استهلاکی استفاده شد که در حالت دو بعدی ضریب‌هایی از مشتقات دوم در راستاهای x و y هستند و مقدارهای ضریب‌های آنها در این دو راستا به ترتیب -0.25 و -0.25 به دست آمد.

به منظور بررسی و اعتبارسنجی مدل عددی، چهار مثال عددی ارائه و نتایج آن بررسی شد. نتایج و زمان اجرا در دو مثال با میدان‌های یک بعدی و دو بعدی، برای ناپیوستگی در شرایط اولیه، متفاوت است. قابلیت مدل‌سازی مناسب ناپیوستگی‌ها یکی از معیارهای ارزیابی کارایی یک رویکرد عددی است که در مورد روش پیشنهادی موفقیت آمیز بود و پایداری مناسبی در پاسخ‌ها با گذشت زمان مشاهده شد. افزون بر این، مقایسه نتایج روش پیشنهادی با دیگر روش‌های عددی و تحلیلی نشان داد که رویکرد این پژوهش در مقایسه با روش عددی مک کورمک و روش تحلیلی استوکر همخوانی قابل قبولی دارد. همچنین به کارگیری عبارتهای استهلاک با ضریب‌های مناسب (بهینه شده) در محل‌های ناپیوستگی عملکرد مناسبی داشته و از رشد نوسان‌های غیرفیزیکی به خوبی جلوگیری کرده است. همچنین این روش برای دستیابی به یک دقت معین در مقایسه با روش عددی مک کورمک، در مسئله شکست سد با وجود اصطکاک و شیب بستر، با استفاده از یک رایانه مشخص، به زمان محاسباتی بیشتری (در حدود ۱/۵ برابر) نیاز دارد که این نتیجه تنها با اندازه‌گیری به دست آمده و با بهبود روش بهینه‌سازی الگوریتم تعیین ضریب شکل بهینه قابل کاهش است.

۹- فهرست نشانه‌ها

h	عمق آب (m)
u	سرعت در راستای x (m)
v	سرعت در راستای y (m)
g	شتاب گرانش (m/s^2)
S_{0x}, S_{0y}	شیب کف در راستاهای x و y
S_{fx}, S_{fy}	شیب اصطکاک در راستاهای x و y
h_o	عمق آب در بالادست (m)
h_d	عمق آب در پایین دست (m)
p, q	دبی بر واحد عرض در راستاهای x و y (m^2/s)
\vec{n}	بردار یکه عمود بر سطح

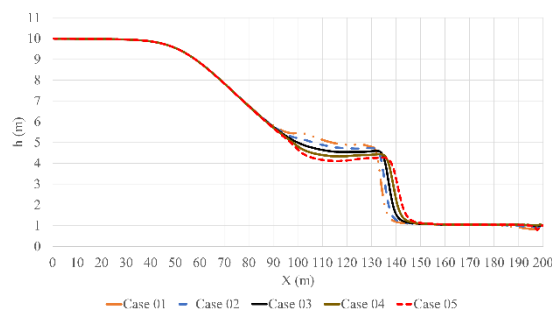


Fig. 13 Water surface profile in example 5
شکل ۱۳ نیمرخ طولی سطح آزاد آب در مثال ۵

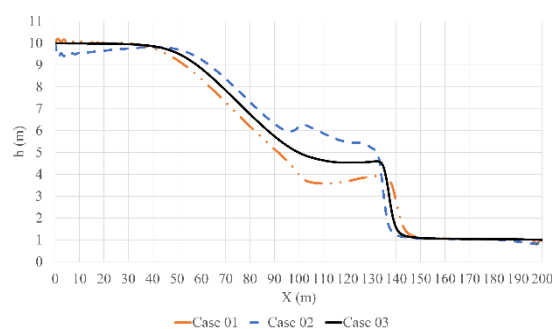


Fig. 14 Water surface profile in example 6
شکل ۱۴ نیمرخ طولی سطح آزاد آب در مثال ۶

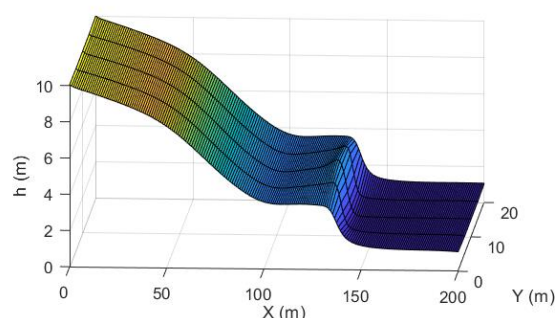


Fig. 15 Water surface profile in Case 3 of example 6
شکل ۱۵ نمایش سطح آزاد آب در مورد ۳ از مثال ۶

۸- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش برای مدل‌سازی شکست سد با منظور کردن جمله‌های شیب بستر و اصطکاک، از روش چندرعبی استفاده شده است. برای بهینه‌سازی و محاسبه متغیر شکل به عنوان یکی از عامل‌های مهم در تعیین دقت روش چند رعبی از روش فلاح و همکاران (Fallah et al., 2019) استفاده شد. به این ترتیب تنها در گام اول (مدل‌سازی شرایط اولیه) متغیر شکل بهینه تعیین و آنگاه مقدار بهینه به دست آمده بدون تغییر برای دیگر گام‌های زمانی نیز استفاده شد. به منظور کاهش نوسان‌های غیرفیزیکی، در

parameters. *Computers & Mathematics with Applications*, 24(12), 99-120.

Kansa, E.J. & Geiser, J. (2013). Numerical solution to time-dependent 4D inviscid Burgers' equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(3), 637-645.

Liu, Y., Zhang, X., Yu, H., Sun, Y., Sun, C., Li, Z. & Li, X. (2024). Hydraulic model of partial dam break based on sluice gate flow. *Ocean Engineering*, 295, 116974, <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.116974>.

Pourlak, M., Akbari, H. & Jabbari, E. (2023). Importance of Initial Particle Distribution in Modeling Dam Break Analysis with SPH. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 27(1), 218-232.

Rippa, S. (1999). An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 11, 193-210.

Seyedashraf, O., Mehrabi, M. & Akhtari, A. A. (2018). Novel approach for dam break flow modeling using computational intelligence. *Journal of Hydrology*, 559, 1028-1038.

Stoker, J.J. (1992). *Water waves: The mathematical theory with applications*, Vol. 36, John Wiley & Sons.

Tatari, M. & Dehghan, M. (2009). On the solution of the non-local parabolic partial differential equations via radial basis functions. *Applied Mathematical Modelling*, 33(3), 1729-1738.

Toro, E.F. (2001). *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*. Wiley and Sons Ltd.

Wertz, J., Kansa, E. J. & Ling, L. (2006). The role of the multiquadric shape parameters in solving elliptic partial differential equations. *Computers & Mathematics with Applications*, 51(8), 1335-1348.

Wong, A., Hon, Y., Li, T., Chung, S. & Kansa, E. (1999). Multizone decomposition for simulation of time-dependent problems using the multiquadric scheme. *Computers & Mathematics with Applications*, 37(8), 23-43.

Wong, S., Hon, Y. & Li, T. (2002). A meshless multilayer model for a coastal system by radial basis functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 43(3-5), 585-605.

Yazdi, S.R. & Mohammadi, A. (2008). NASIR software as a virtual training workshop: simulating the sudden failure of dams with the help of artificial depreciation. *Journal of technology and education*, 3(58), 1-8. (In Persian)

ضریب‌های شکل برای متغیرهای h ، p و q c_h, c_p, c_q
علایم یونانی:

ضریب‌های مجهول برای تابع‌های تقریب h ، p و q $\lambda_j, \alpha_j, \beta_j$

۱۰- منابع

Amini, R., Ghodousi, H. & Shahverdi, K. (2020). Simulation of Rapidly Varied Unsteady Flow in Irrigation Canals Using MacCormack-TVD Numerical Method. *Scientific Research Journal of Irrigation and Water Engineering of Iran*, 3(10), 13-21. (In Persian)

Banihashemi, M.A. & Kianian, M. (2008). Two-dimensional model of gradual dam break with Fred and McCormack method. The 4th National Congress of Civil Engineering. Tehran. (In Persian)

Behroozi, A.M., Meier, C.I. & Vaghefi, M. (2023). Radial basis function-based differential quadrature for dam break problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 155, 307-322.

Chang, T.-J., Kao, H.-M., Chang, K.-H. & Hsu, M.-H. (2011). Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Hydrology*, 408(1-2), 78-90.

Chen, W., Hong, Y. & Lin, J. (2018). The sample solution approach for determination of the optimal shape parameter in the Multiquadric function of the Kansa method. *Computers & Mathematics with Applications*, 75(8), 2942-2954.

Fallah, A., Jabbari, E. & Babae, R. (2019). Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization. *Computers & Mathematics with Applications*, 77(3), 815-829.

Gottardi, G. & Venutelli, M. (2004). Central scheme for two-dimensional dam-break flow simulation. *Advances in Water Resources*, 27(3), 259-268.

Hardy, R.L. (1971). Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of geophysical research*, 76(8), 1905-1915.

Jiang, P., Zheng, H., Xiong, J. & Zhang, C. (2023). A stabilized local RBF collocation method for incompressible Navier–Stokes equations. *Computers & Fluids*, 265, 105988, <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2023.105988>.

Kahid, H., Babae, R., Fallah, A.R. & Jabbari, E. (2020). Development of multiquadric meshless method for solving dam-break problem. *Journal of Hydraulics*, 14(4), 83-98. (In Persian)

Kansa, E. & Carlson, R. (1992). Improved accuracy of multiquadric interpolation using variable shape



© 2025 The Author(s). Published by Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.
This is an open-access article distributed under the terms of the Creative Commons Attribution License (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>), which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited.