

Fractal Assessment of Time Series of Density Currents in Flume

Mohammad Hosseini ^{1*}, Mohammad Hadi Fattahi ², Ali Hosseini ²

1- Department of Civil Engineering, Meymand Center, Firoozabad Branch, Islamic Azad University, Firoozabad, Iran.

2- Department of Civil Engineering, Marvdasht Branch, Islamic Azad University, Marvdasht, Iran.

* m.h.8894@gmail.com

Received: 3 August 2023
Accepted: 13 November 2023
Discussion: 21 December 2024



J. Hydraul.
Iranian Hydraulic Association
Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: Density currents formed due to the difference in density, however small, with the surrounding fluid. In addition, even if this density difference exists in the layers of a fluid, this type of flow formed. These currents are a type of two-phase currents that have special and different characteristics compared to normal single-phase currents. Hydrological and hydraulic phenomena known as chaotic, non-linear, dependent and sensitive systems to the change of the initial conditions and the temporal and spatial scale of the study. For this reason, any processing of hydrological time series has a direct effect on the chaotic behavior and the way the system responds to hydrological models and network forecasting.

Methodology: The experiments carried out in the hydraulic department of Shiraz University and a flume of 8 m length, 35 cm width and 60 cm height used. Flume has the ability to tilt. A source of 1000 liters containing thick sediment flow used. A number of 12 experiments conducted in such a way that the powder of passing rock classified from sieve No. 80 used as suspended sediment material to create a dense flow, which has a specific weight of 2650 kgm⁻³ and an average settling speed of 0.0106 mms⁻¹ and an average diameter of particles. It is 0.0074 mm. The density of water is 998.7 kgm⁻³. Three channel slopes of 1, 2, and 3 percent and two density current inlet flow rates of 50 liters per minute and 90 liters per minute used. The density of the thick flow tank is 1005 kgm⁻³ and 1008 kgm⁻³, and the height opening under the sliding inlet valve is 1 cm. Fractal dimension is a decimal number that fractal objects are something between Euclidean and topological shapes. A fractal curve is a curve with an infinite self-similar component. This analysis based on the box counting method, which is a smart and simple method to implement. The fractal dimension obtained by calculating the number of non-overlapping boxes with the size required to cover the fractal curve.

Results and Discussion: A general study of fractal indices such as scale factor diagrams, generalized fractal dimension and singularity spectrum shown in Figure 5 for the time series of dense flow velocity in all models at a distance of m5 from the inlet valve. The highest fractal dimension with a rate of 1.459 related to test number 5 and the lowest fractal dimension related to test number 7 with a rate of 1.22. The highest range of α corresponds to test number 3 with a rate of 3.04 and the lowest corresponds to test number 12 with a rate of 0.087. The lower this range is from the rate of 3.04, the more its multifractal degree decreases and the trend of the system is more towards single fractal patterns. When the inlet flow rate changes from 50 liters per minute to 90 liters per minute, the fractal dimension of the speed

time series decreases by 2.2%, and the amplitude and angle α decrease by 53.5% and increase by 3.9%, respectively, and the tendency of the system with the increase of the input flow rate, it tends towards single fractal. Also, in the technical spectrum charts, with the increase of the input flow rate from 50 liters per minute to 90 liters per minute, the technical spectrum chart tends from full symmetry to right symmetry, in other words, with increasing the flow rate, the exact fractal diagram that created from self-similar elements tends towards a single fractal, which is sensitive to small changes in the flow rate caused by increasing the flow rate of this factor.

Conclusion: The generalized fractal dimension decreases with increasing flow rate and flow concentration, and it shows that the phenomenon is less sensitive to high concentrations and flow rates, and the flow behavior is dependent on the initial conditions. When the input density changes from 1005 kgm^{-3} to 1008 kgm^{-3} , the fractal dimension of the velocity time series decreases by 4.2% and the amplitude and angle α decrease by 9.7% and increase by 9.8%, respectively. The rotation reduced by 6.7% and the Dq changes reduced by 1.5% and its graph is milder.

Keywords: Density current, Time series, Fractal indicators, Fractal dimension.



© 2024 Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.
This is an open access article distributed under the terms and conditions of
the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license)
(<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

ارزیابی فراکتال سربهای زمانی جریان چگال در فلوم

محمد حسینی^{۱*}، محمد هادی فتاحی^۲، علی حسینی^۲

۱- گروه مهندسی عمران، مرکز میمند، واحد فیروزآباد، دانشگاه آزاد اسلامی، فیروزآباد، ایران.

۲- گروه مهندسی عمران، واحد مرودشت، دانشگاه آزاد اسلامی، مرودشت، ایران.

* m.h.8894@gmail.com

دریافت: ۱۴۰۲/۰۵/۱۲، پذیرش: ۱۴۰۲/۰۸/۲۲، نقد و بررسی: ۱۴۰۳/۱۰/۰۱ و بگاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: جریان‌های چگال مانند بسیاری دیگر از پدیده‌های ژئوفیزیک ماهیت غیرخطی دارند و در چارچوب و مبانی نظری سیستم‌های غیر خطی قابل تعریف و تفسیر هستند. سیستم‌های غیر خطی پدیده‌های پیچیده و حساس به شرایط اولیه هستند. برای بررسی دینامیک غیرخطی جریان‌های چگالی در فلوم‌ها و تغییرات آن‌ها در اثر تغییرات القایی شرایط اولیه، از شاخص‌های تحلیل چندفراکتالی شامل طیف تکینگی و بعد فراکتالی استفاده می‌شود. در این تحقیق با تغییر غلظت، شیب و دبی جریان چگال در فلوم، شاخص‌های فراکتالی سری‌های زمانی جریان مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد که با کاهش بعد فراکتال، در واقع دبی، شیب و چگالی جریان متراکم افزایش یافته است. هنگامی که چگالی ورودی از 1005 kgm^{-3} به 1008 kgm^{-3} تغییر می‌کند، بعد فراکتال سری زمانی سرعت 4.2% کاهش می‌یابد و دامنه و زاویه α ، استخراج شده از طیف تکینگی، 9.7% کاهش و 9.8% افزایش می‌یابد. به ترتیب. علاوه بر این، زاویه چرخش ضریب مقیاس 6.7% کاهش می‌یابد و تمایل سیستم به چند فراکتالی کاهش می‌یابد.

کلیدواژگان: جریان چگال، سری زمانی، شاخص‌های فراکتال، بعد فراکتال.

۱- مقدمه

تغییر مقیاس. روش‌های تجزیه فراکتال متنوع‌اند اما همگی یک چیز را به طور مشترک دارا هستند. ایده اصلی آن است که در پس نوسان‌های پیچیده و گاهاً به ظاهر تصادفی یک دوره زمانی، سازوکاری عمل می‌کند که با تغییر مقیاس زمانی، عملکرد آن تغییر نخواهد کرد. یک دوره زمانی را به صورت نمایش گسسته از x_i که در آن $i = 1, 2, \dots, N$ تعریف می‌کنیم که نمایشگر تغییرپذیری‌های زمانی یک فرآیند یا سیگنال $x(t)$ در بازه‌های یکسان زمانی Δt می‌باشد. طول یک دوره زمانی را به طور معمول N در نظر می‌گیرند که باید متوجه اختلاف آن با تداوم دوره در زمان واقعی به صورت $T = N\Delta t$ باشیم. بسامد دوره نیز به صورت $f_s = \frac{1}{\Delta t}$ می‌باشد. با این تعریف‌ها می‌توان نتیجه گرفت که یک دوره زمانی در واقع یک سیگنال دیجیتال می‌باشد و از این برای تحلیل دوره‌های زمانی اغلب پردازش سیگنال دیجیتال نیز نامیده می‌شود. فواصل زمانی سنسجش x اغلب یکسان و یکنواخت است که در آن صورت دوره را یک دوره هم‌فاصله

جریان‌های دانسیته یا چگال در اثر اختلاف دانسیته هر چند کم با سیال محیطی به وجود می‌آیند. در ضمن این اختلاف چگالی حتی اگر در لایه‌های یک سیال نیر وجود داشته باشد، این نوع از جریان تشکیل خواهد شد. این جریان‌ها نوعی از جریان‌های دوبخشی به شمار می‌آیند که دارای شرایط ویژه و متفاوتی نسبت به جریان‌های یک بخشی معمولی هستند. پدیده‌های هیدرولوژیکی و هیدرولیکی به عنوان سامانه‌های آشوبی، غیرخطی، وابسته و حساس نسبت به تغییر شرایط اولیه و مقیاس زمانی و مکانی بررسی شناخته می‌شوند. به همین علت هر گونه پردازش دوره‌های زمانی هیدرولوژیکی، تأثیر مستقیمی بر رفتار آشوبی و روش چگونگی پاسخ سامانه به مدل‌های هیدرولوژیکی و پیش‌بینی شبکه دارد. هدف از تحلیل فراکتال دوره‌های زمانی، یافتن یک یا چند مورد از ویژگی‌های زیر در آن دوره زمانی می‌باشد: ویژگی خودشباهت، رابطه‌های توانی مقیاس و استقلال نسبت به

بر تغییرپذیری‌های زمانی- مکانی بسیار مورد توجه محققان بوده است (Rahmani and Fattahi, 2021, 2022). بررسی نظریه ی فراکتال در زمین ریخت شناسی رودخانه نشان می‌دهد بُعد فراکتالی می‌تواند شاخص مناسبی برای بیان تغییرپذیری‌های رودخانه باشد و به عنوان فراسنجه هندسی جدید وارد مدل‌های ریخت شناسی رودخانه‌ها شود از این رابطه‌ها می‌توان برای بررسی تغییرپذیری‌های انشعاب‌های رودخانه‌ها و نیز حوضه‌ی آن‌ها در گذر زمان بهره جست (Elmie et al., 2014; Rezaie et al., 2011; Alami et al., 2020; Hosseini et al., 2013). فراکتال می‌تواند در پیدایش فراسنجه‌ها و ویژگی‌های رفتار و دوره بازگشت سیل کمک شایانی را کند (Wei et al., 2016; Alipour et al., 2016).

با استفاده از تجزیه فراکتالی، فراسنجه‌های کیفی آب نشان می‌دهد هر چه ساختار شبکه پیچیده تر باشد، پدیده نسبت به فراسنجه‌های کیفی حساس تر می‌باشد به عبارتی دیگر با کوچکترین تغییر در شرایط کیفی آب، ساختار تغییر می‌کند (Vargas et al., 2019; Beata et al., 2020). Rahmani and Fattahi (2023) تحلیل پویایی غیر خطی مبتنی بر تجزیه فراکتال دوره‌های زمانی بارندگی و دما را برای یافتن تاثیرهای القایی تغییرپذیری‌های اقلیم انجام دادند. نتایج نشان از توانایی تجزیه فراکتال دوره‌های زمانی بارندگی و دما در آشکارسازی روند تغییرپذیری‌های اقلیمی در انگلستان بود.

Campos and Paz (2020) ویژگی‌های فراکتالی بارش و سیل در حوضه مورد ارزیابی جانریو- برزیل بررسی کردند. بُعد فراکتال نقطه‌ای در اثر بارندگی‌های کم، عدد $0/41$ را نشان می‌دهد اما در مواقع سیلاب میزان بُعد فراکتال، عدد $0/94$ را نشان می‌دهد که هرچه میزان بُعد فراکتال به یک نزدیکتر باشد از تصادفی بودن پدیده حکایت می‌کند. Lee et al. (2020) با استفاده از تجزیه و تحلیل فراکتالی، الگوی امواج رسوبات ته نشین شده بستر رودخانه را بررسی کردند با افزایش زمان و توسعه و تکامل یافتن امواج بار بستر رودخانه، بُعد فراکتال کاهش می‌یابد و توانستند رابطه‌نمایی با همبستگی $0/82$ در بازه زمانی مورد بررسی برای بُعد فراکتال به دست آورند. (Kamyab and Fattahi (2018) بررسی‌های گسترده‌ای بر روی انطباق سنجی خواص ژئومورفولوژیک

می‌نامند و این در حالی است که روش‌های تحلیلی برای تجزیه دوره‌های زمانی غیرهم‌فاصله نیز وجود دارد. عبارت دوره زمانی فراکتال در پیشینه تحقیقات این موضوع دلالت بر یک سیگنال زمانی تک فراکتال یا فراکتال منفرد دارد. دوره‌های زمانی چند فراکتال ناهمگن بوده و ویژگی خودشباهت را در بازه‌های موضعی از ساختار اصلی نشان می‌دهند ضمن آنکه مقیاس اندازه‌گیری فراکتال آنها با زمان تغییر می‌کند. بنابراین می‌توان آنها را با مجموعه‌ای از فراکتال‌های موضعی بررسی کرد.

فرضیه‌هایی که می‌توان برای این گونه جریان‌ها در نظر گرفت از جمله سیال به صورت تراکم ناپذیر است، الگوی تشکیل جریان چگال با تغییر غلظت، دبی و شیب بستر ارتباط معنا داری دارد و جریان چگال تنها به صورت جریان گل آلود در نظر گرفته می‌شود. جریان‌های چگال نیز همانند بسیاری دیگر از پدیده‌های ژئوفیزیکی ماهیت غیر خطی داشته، سامانه‌های غیر خطی پدیده‌هایی پیچیده و حساس نسبت به شرایط اولیه می‌باشند که تغییر کوچکی در هر یک از عامل‌ها موثر می‌تواند تاثیرهای قابل توجهی بر مجموعه رفتاری و الگوی جریان چگال بگذارد. هدف از این پژوهش بررسی جامعی بر روی ویژگی‌های فراکتال و چند فراکتال دوره زمانی جریان چگال و یافتن برتری‌های تحلیل‌های فراکتال در آشکار سازی طبیعت غیر خطی جریان چگال است. در ضمن بررسی انطباقی دقیق بین فراسنجه‌های هیدرولیکی جریان چگال و تحلیل ویژگی‌های چند فراکتال انجام خواهد شد بگونه‌ای که بتوان رابطه‌های معنا داری بین آنها به دست آورد. با این رویکرد می‌توان با انجام پردازش سریع و محاسبه ویژگی‌های فراکتال به شناخت دقیق تر جریان چگال دست یافت که تاکنون چنین بررسی گسترده‌ای توسط محققان در این زمینه انجام نگرفته است. بررسی بُعد فراکتالی سامانه با استفاده از روش بُعد همبستگی نشان می‌دهد دوره‌های زمانی مرتبط با سامانه‌های طبیعی پیچیده تر، بُعد فراکتال بالاتری دارند و به ۲ نزدیک می‌شود (Mohammadi et al., 2019; Hosseini et al., 2014).

بررسی پویایی غیر خطی دوره‌های زمانی پدیده‌های ژئوفیزیکی برای آشکار سازی الگوهای رفتاری پدیده مبتنی

یافته دوره‌های زمانی در برای تحلیل رفتار غیر خطی دوره‌های زمانی در مقطعی از آبراهه مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- مواد و روش‌ها

آزمایش‌های در بخش هیدرولیک دانشگاه شیراز صورت گرفته است و از یک فلوم بطول 8m، عرض 35 cm و ارتفاع 60 cm استفاده شد. فلوم دارای قابلیت شیب‌پذیری می‌باشد. از یک منبع ۱۰۰۰ لیتری که محتوی جریان غلیظ رسوبی می‌باشد استفاده شده است که توسط یک پمپ باخروجی ۲ اینچ با بیشترین دبی عبوری ۲۰۰ لیتر بر دقیقه استفاده شده است. برای کنترل ورودی جریان چگال از یک فلومتر استفاده شده است. پر کردن آب فلوم توسط یک لوله که به منبع آب ۲۰۰۰ لیتری متصل است استفاده شده است در هنگام اجرای آزمایش، شیر آب ورودی این منبع قطع می‌شود و برای کنترل سطح ایستایی آب در فلوم از یک منبع آب تنظیمی ۵۰۰ لیتری که متصل به پمپ است، استفاده شده است. که در شکل ۱ نمای شمای کلی از فلوم و الگوی تشکیل جریان چگال مشاهده می‌شود. شمار ۱۲ آزمایش به گونه‌ای انجام شده که از پودر سنگ عبوری رده شده از الک شماره ۸۰ به عنوان مواد معلق رسوبی برای ایجاد جریان چگال استفاده شده است که وزن مخصوص 2650 kgm^{-3} و سرعت ته نشینی میانگین 0.0106 mms^{-1} و قطر میانگین ذرات 0.0074 mm می‌باشد. چگالی آب 998.7 kgm^{-3} می‌باشد. از سه شیب آبراهه ۱، ۲ و ۳ درصد و دو دبی ورودی جریان چگال ۵۰ لیتر بر دقیقه و ۹۰ لیتر بر دقیقه استفاده شده است. چگالی مخزن جریان غلیظ 1005 kgm^{-3} و 1008 kgm^{-3} می‌باشد.

مقدار بازشدگی ارتفاع زیر درپچه ورودی کشویی 1cm می‌باشد. برای اندازه‌گیری سرعت جریان چگال در فلوم از یک عدد سرعت سنج الکترومغناطیسی مدل ۸۰۲ ساخت شرکت Valeport انگلستان با دقت اندازه‌گیری $\pm 5 \text{ mms}^{-1}$ استفاده شده است که این دستگاه دارای یک حسگر اندازه‌گیری جریان است که قابلیت اتصال به رایانه را دارد. برای برداشت غلظت جریان از یک چند سرنگ‌های سیفونی شکل در ۱۶ نقطه به صورت عمودی در وسط فلوم استفاده شده است به

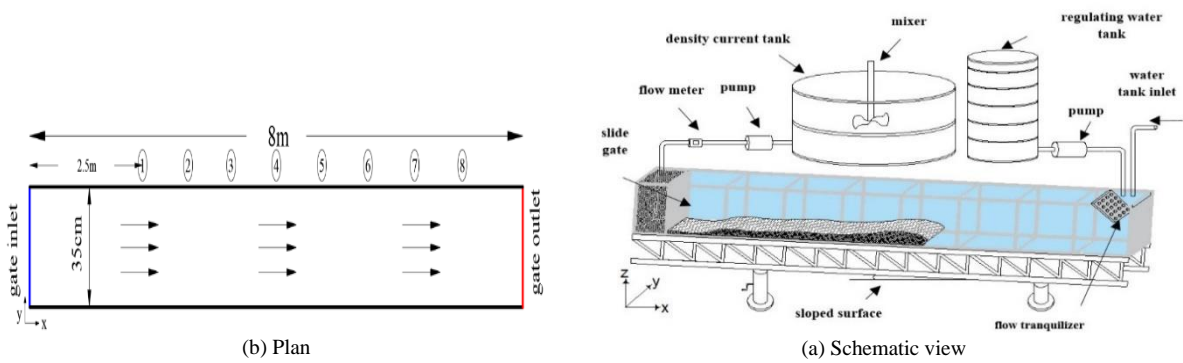
حوضه آبریز و ویژگی‌های چند فراکتال شکل آبراهه وال نات گولچ انجام دادند. (Farzin et al., 2011) با استفاده از داده‌های دوره زمانی دبی رودخانه، نمودار طیف تکینگی را ترسیم نمودند. نتایج نشان داد که منحنی به سمت راست متمایل می‌شود و چند فراکتالی کاهش می‌یابد. این به معنای آن است که جریان رودخانه نسبت به تغییرپذیری‌های کوچک محلی حساس می‌باشد. در پژوهش‌های دیگری تاثیر مقیاس زمانی بر رفتار طیف تکینگی مورد بررسی قرار گرفته است. دبی ساعتی و روزانه رودخانه رفتار تا حدودی همانندی دارند و با افزایش بازه زمانی، دامنه طیف تکینگی آن کاهش می‌یابد و نمودارها دارای عدم تقارن به سمت راست می‌باشد و از درجه چند فراکتالی آن کاسته می‌شود (Hekmatzadeh et al., 2012; Khatibi et al., 2012).

(Rahmani and Fattahi, 2021) نتیجه یکسانی را در زمینه داده‌های دوره زمانی تغییرپذیری‌های تراز آب زیر زمینی در اثر فعالیت‌های لرزه‌ای گزارش کردند. در مورد ارزیابی دیگر اثر گذشت زمان بر رفتار چند فراکتال دوره زمانی رودخانه بررسی شده است. با استفاده از دوره زمانی حوضه آبریز (دانگتینگ-چین) و الگوریتم شمارش جعبه‌ای تجزیه فراکتالی، طیف تکینگی ترسیم شده است. نتایج نشان می‌دهد که با گذشت زمان نمودار طیف تکینگی دارای عدم تقارن به سمت راست می‌باشد دامنه α حدود ۳۵ درصد افزایش و شیب نمودار ضریب مقیاسی آن تند تر می‌شود و نشان می‌دهد که نسبت به شرایط اولیه ورودی حساس می‌باشد (Zhang et al., 2019; Teng and Shang., 2018). پژوهش‌های همانندی با داده‌های بارندگی، تراز سطح آب زیر زمینی و غلظت جریان چگال نیز نتایج مشترکی را بازگو می‌کند. در بررسی‌های انجام شده، نمودار طیف تکینگی دارای عدم تقارن به سمت چپ می‌باشد و دامنه α آن ۰/۵ می‌باشد به عبارتی دیگر با افزایش دامنه α ، نسبت به شاخص فراکتالی حساسیت بیشتری از خود نشان می‌دهند (Garcia et al., 2020; Rakhshandehroo and Amiri, 2012; Hosseini et al., 2021).

در این تحقیق با تغییر غلظت، شیب و دبی جریان چگال در فلوم، شاخص‌های فراکتالی دوره‌های زمانی جریان مورد بررسی قرار گرفت. شاخص‌های چند فراکتالی دوره‌های زمانی شامل رفتار نمودار طیف تکینگی، ضریب مقیاس و بُعد تعمیم

زمانی مشخص، سرعت بدنه جریان چگال اندازه گیری شده است. به دلیل محدودیت‌های آزمایشگاهی از جمله طول فلوم، حجم مخزن جریان غلیظ، نوع وسیله سرعت سنج و شیب بستر فلوم برای برداشت داده‌ها در محدوده زمانی ۱۰۰ ثانیه انجام شده است. همچنین نتایج آزمایشگاهی بیشتر با نتایج فیلدی مورد صحت سنجی شد (Hosseini et al., 2021).

طوری که در ارتفاع‌های مختلف از کف آبراهه تا سطح مورد نظر جریان غلیظ نمونه گیری انجام گیرد تا بتوان مقدار میانگین جریان غلیظ تعیین شود. در فاصله 5m از فلوم محدودیت‌هایی اعمال شده است که در جدول ۱ مشاهده می‌شود. جریان چگال از سه ناحیه سر، بدنه و دنباله تشکیل شده است در این تحقیق بیشتر به تکامل جریان چگال در ناحیه بدنه پرداخته شده است که در یک مکان و محدوده



(b) Plan

(a) Schematic view

Fig. 1 A Schematic view of the density current entering the flume

شکل ۱ نمای شمای کلی از فلوم جریان چگال

شمار جعبه‌های ناهمپوشان با اندازه δ که برای پوشاندن منحنی فراکتال لازم می‌باشند، به دست می‌آید. بعد فراکتال مستقل از مقیاس بوده و با تغییر اندازه جعبه‌ها بعد فراکتال تغییر نمی‌کند و نمودار لگاریتمی شمار جعبه به اندازه جعبه ترسیم شده و با محاسبه شیب نمودار، بعد فراکتال به دست می‌آید. هرچه فراکتال سطح یک صفحه را پر کند بعد آن به ۲ نزدیک می‌شود و پیچیدگی پدیده بیشتر می‌شود. بعد فراکتال D_f از معادله (۱) به دست می‌آید.

$$D_f = -\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N(\delta)}{\log(\delta)} \quad (1)$$

که در آن $N(\delta)$ شمار جعبه‌های مورد نیاز با اندازه δ است که برای پوشش کامل منحنی فراکتال لازم می‌باشد.

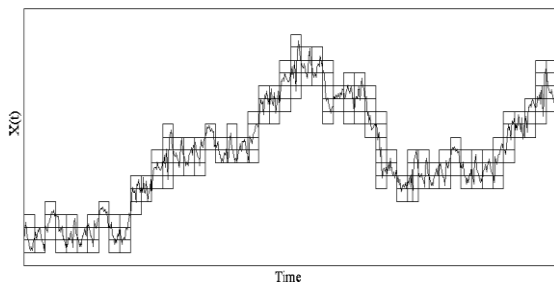


Fig. 2 The box counting method mechanism to calculate the fractal dimension

شکل ۲ روش عملکرد روش شمارش جعبه‌ای برای محاسبه بعد فراکتال

همچنین لازم به ذکر است با توجه به محدودیت‌های بخش هیدرولیک آزمایشگاه دانشگاه شیراز، تنها دستگاه سرعت سنج امکان برداشت به صورت دوره زمانی برای ماهیت جریان چگال میسر بوده است و برداشت دیگر فرانسجه‌های جریان از قبیل غلظت جریان چگال، به دلیل نبودن دستگاه غلظت سنج ثانیه ای در آزمایشگاه این امر میسر نبوده است و تنها فرانسجه سرعت جریان بررسی شده است.

جدول ۱ مقادیر و شرایط ورودی جریان چگال

Table 1 Initial conditions of density current

Number of Runs	Initial Condition			
	Q (Lmin ⁻¹)	ρ_f (kgm ⁻³)	S %	ρ_a (kg-m ⁻³)
12	50~90	1005~1008	1~2~3	998.7

(Mandelbrot and Vanness (1986) بعد فراکتال عددی اعشاری می‌باشد که اشیاء فراکتالی چیزی بین اشکال اقلیدسی و عوارض شناختی می‌باشند یک منحنی فراکتال، منحنی با بی نهایت جزء همسان می‌باشد این تحلیل بر پایه روش شمارش جعبه‌ای انجام گرفته است که روش هوشمندانه و ساده در اجرا است. بعد فراکتال با محاسبه

بعد فراکتال تعمیم یافته در معادله (۳) تعریف شده است
(Hemali and Pathak, 2013)

$$T(q) = q \cdot D(q) - 1 \quad (3)$$

طیف تکینگی $f(\alpha)$ بعد فراکتال جعبه هایی می باشد در جایی که α فرانسجه موضعی است که محاسبات آن از جعبه ای به جعبه دیگر تغییر میکند. در شمارش جعبه ای چند فراکتال، شبکه مجازی از جعبه های مستطیلی شکل تصویر جریان را پوشش می دهند و یک احتمال به هر جعبه بر مبنای شماره پیکسل آن جعبه نسبت داده می شود که به صورت معادله ۴ الی ۶ برای محاسبه $f(\alpha)$ و $\alpha(q)$ تعریف می شود (Chhabra et al., 1989).

$$\mu(q, \delta) = \frac{p_i^q(\delta)}{\sum_i p_i^q(\delta)} \quad (4)$$

$$\alpha(q) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, \delta) \log p_i^q(\delta)}{\log(\delta)} \quad (5)$$

$$f(\alpha) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i(q, \delta) \log \mu_i(q, \delta)}{\log(\delta)} \quad (6)$$

که در آن $p_i^q(\delta)$ شمار کل جعبه های غیر خالی با اندازه δ و $\mu(q, \delta)$ وزن مربوط به i امین جعبه میباشد. برابر شکل (۳) با رسم مقدرهای $f(\alpha)$ در مقابل زاویه تکینگی α می توان رفتار سامانه را بررسی نمود.

بعد فراکتال به تنهایی برای به تصویر در آوردن ویژگی های فراکتالی پدیده کافی نمی باشد. بعد فراکتال در واقع اطلاعات کلی و یا میانگین اطلاعات شبکه را منتقل می کند و از بی نظمی های موضعی عبور می کند. به همین دلیل بعد فراکتال تعمیم یافته بر مبنای روش شمارش جعبه ای در معادله (۲) تعریف می شود (Carpinteri et al., 2009).

$$D_q = \frac{1}{(q-1)} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln \sum \mu_i^q}{\ln \delta} \quad (2)$$

μ_i طول کلی شکل در i امین جعبه و δ اندازه جعبه و مقدار q متعلق به مجموعه اعداد حقیقی است و بازه تغییر پذیری های آن از $-q$ تا $+q$ می باشد. در شکل (۳) نمونه ای از نمودارهای بعد تعمیم یافته نشان داده شده است که اگر بعد فراکتال تعمیم یافته با کاهش یکنواخت و ملایم همراه باشد تمایل پدیده به چند فراکتالی کاهش می یابد در حالی که نمودار با شیب تند همراه باشد تمایل پدیده به چند فراکتالی افزایش می یابد.

ضریب مقیاسی که با $T(q)$ از آن یاد می شود، شیب منحنی برازشی لوگ-لوگ تابع ضریب مقیاسی $T(q)$ بر حسب q میباشد. این نمودار به طور معمول برای تعیین الگوی رفتاری سامانه استفاده شود. هنگامی که نمودار خطی شود تمایل سامانه به الگوی چند فراکتالی افزایش می یابد و برعکس وجود شکستگی (زاویه چرخش θ) چند فراکتالی را کاهش می دهد. روش محاسبه تابع ضریب مقیاس بر مبنای شاخص

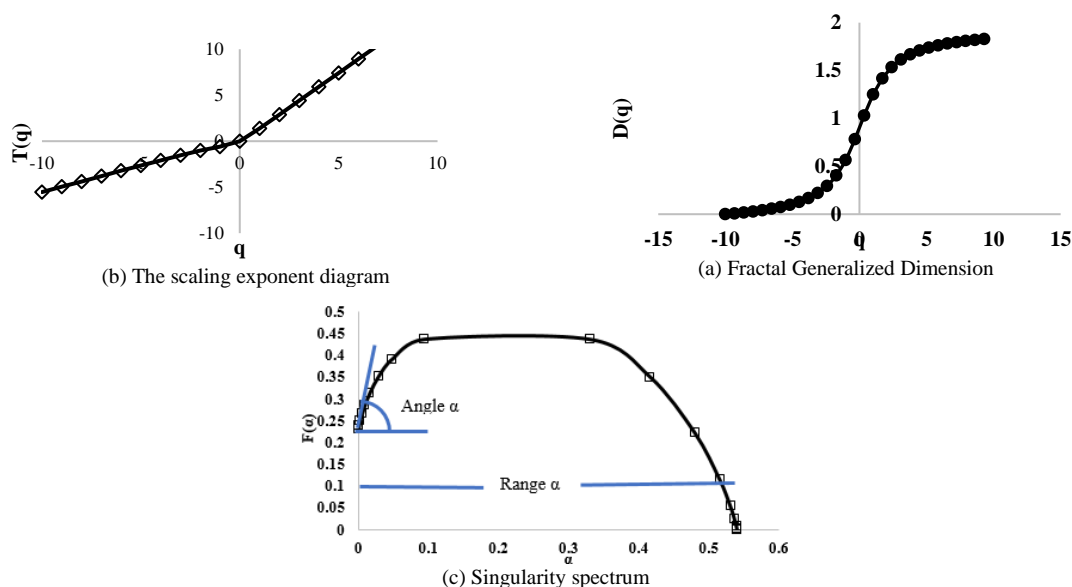


Fig. 3 The comparison of singularity spectrum, Fractal Generalized Dimension and the scaling exponent diagram of models

شکل ۳ نمونه ای از نمودارهای بعد تعمیم یافته فراکتال، ضریب مقیاس و طیف تکینگی

بررسی کلی شاخص‌های فراکتالی مانند نمودارهای ضریب مقیاس، بعد تعمیم یافته فراکتال و طیف تکینگی در شکل ۵ برای دوره زمانی سرعت جریان چگال در همه مدل‌ها در فاصله ۵m از دریچه ورودی نشان داده شده است. بیشترین بعد فراکتال با میزان $1/459$ مربوط به آزمایش شماره ۵ و کمترین بعد فراکتال مربوط به آزمایش شماره ۷ با میزان $1/22$ می‌باشد. بیشترین دامنه α مربوط به آزمایش شماره ۳ با میزان $3/04$ و کمترین آن مربوط به آزمایش شماره ۱۲ با میزان $0/087$ می‌باشد که هر چه این دامنه از میزان $3/04$ کمتر شود از درجه چند فراکتالی آن کاسته می‌شود و روند سامانه به سمت الگوهای تک فراکتالی بیشتر می‌شود. نمودارهای طیف تکینگی در آزمایش‌های ۱، ۴، ۵ و ۶ دارای تفران می‌باشد که رفتار یک فراکتال کامل تک فراکتال دارد اما با افزایش فراسنجه‌های هیدرولیکی مانند دبی ورودی و افزایش شیب آبراهه نمودار طیف تکینگی به سمت چپ متمایل می‌شود مانند آزمایش‌های چند فراکتالی افزایش می‌یابد و نسبت به تغییرپذیری‌های بزرگ حساس است. همچنین دامنه α در آزمایش شماره ۲ به ترتیب $3/36$ است که نسبت به آزمایش شماره ۱۲ که $0/087$ می‌باشد ۴۲ برابر بیشتر است که به دلیل افزایش دبی و افزایش غلظت می‌باشد است بیشترین زاویه α در آزمایش شماره ۱ با میزان $77/4$ درجه و کمترین آن در آزمایش شماره ۱۰ با میزان $48/16$ درجه می‌یابد. در نمودار ضریب مقیاس همواره الگوی فصل مشترک تاحدودی خطی بوده و شکستگی‌های کمی در آن مشاهده می‌شود که بیشترین زاویه چرخش مربوط به آزمایش شماره ۱۲ با میزان $179/85$ درجه و کمترین زاویه چرخش مربوط به آزمایش شماره ۱ با میزان $176/58$ درجه می‌باشد که در این مقطع با کمتر شدن زاویه از مقدار $179/99$ درجه رفتار سامانه تمایل به چند فراکتالی کاهش می‌یابد. نمودار بعد تعمیم یافته فراکتال نشان می‌دهد که بیشترین و کمترین تغییرپذیری‌های Dq مربوط به آزمایش شماره ۱ و ۱۲ به ترتیب با میزان $1/83$ و $0/057$ می‌باشد که تغییرپذیری‌های Dq هر چه کمتر باشد روند الگوی سامانه تمایل به چند فراکتالی کاهش می‌یابد. در جدول (۲) خلاصه نتایج شاخص‌های دوره زمانی سرعت جریان چگال نشان داده شده است.

طیف تکینگی باریک نوسان‌های نظام یافته نسبی را در دوره زمانی به تصویر می‌کشد که در دامنه‌های مشابه در طول زمان رخ می‌دهد، این نشانه‌ای برای یک ساختار تک مقیاس است. طیف تکینگی عریض، نوسان‌های دوره‌ای بیشتری را در دوره‌های زمانی نشان می‌دهد که در دامنه وسیع‌تری از دامنه‌ها در مدت زمانی مختلف رخ می‌دهند، شبیه فرآیندهای چندفراکتالی. نوسان‌های بزرگ در یک سیگنال دارای ضرایب تکینگی α کوچک می‌باشند و در دم سمت چپ طیف قرار دارند، در حالی که α برای نوسان‌های کوچک، بزرگ است و در دم سمت راست طیف قرار دارد. بر این مبنای، چند فراکتالی با انحراف زیاد ضریب تکینگی α از برای مرکزی $\alpha(0)$ مشخص می‌شود. هنگامی که α تا حدودی ثابت است، سیگنال تک فراکتال است، در حالی که تغییرپذیری‌های α نشان دهنده یک فرآیند چند مقیاسی است، محدوده طیف تکینگی نشان دهنده پویایی سامانه است. هر چه نمودار طیف تکینگی دامنه یا دهانه منحنی بازتر و زاویه α کمتر باشد تمایل سامانه به چند فراکتالی افزایش می‌یابد همچنین اگر منحنی از تقارن کامل برخوردار باشد، سامانه را می‌توان فراکتال دقیق دانست. فراکتال‌های دقیق از تکرار عنصرهای همسان پدیده فراکتال بوجود می‌آیند. اما اگر منحنی به سمت راست متمایل شود چند فراکتالی کاهش می‌یابد و نسبت به تغییرپذیری‌های کوچک محلی حساس می‌باشد و اگر منحنی به سمت چپ متمایل شود چند فراکتالی افزایش و نسبت به تغییرپذیری‌های بزرگ حساس می‌باشد.

۳- دوره زمانی شاخص‌های فراکتال

در این قسمت از تحقیق با استفاده از دوره زمانی سرعت، به بررسی شاخص‌های فراکتالی پرداخته شده است به دلیل محدودیت‌های زمانی آزمایشگاه و همچنین ابزار اندازه‌گیری دوره زمانی سرعت تنها در فاصله ۵m از دریچه ورودی از قسمت بدنه جریان چگال برداشته شده است که محدوده زمانی ۱۰۰ ثانیه انتخاب شده است که نمودارهای آن در شکل ۴ نشان داده شده است پس از آن داده‌های مورد نظر توسط کدهای توسعه داده شده در محیط MATLAB پردازش شده و شاخص‌های فراکتالی آن استخراج شده است

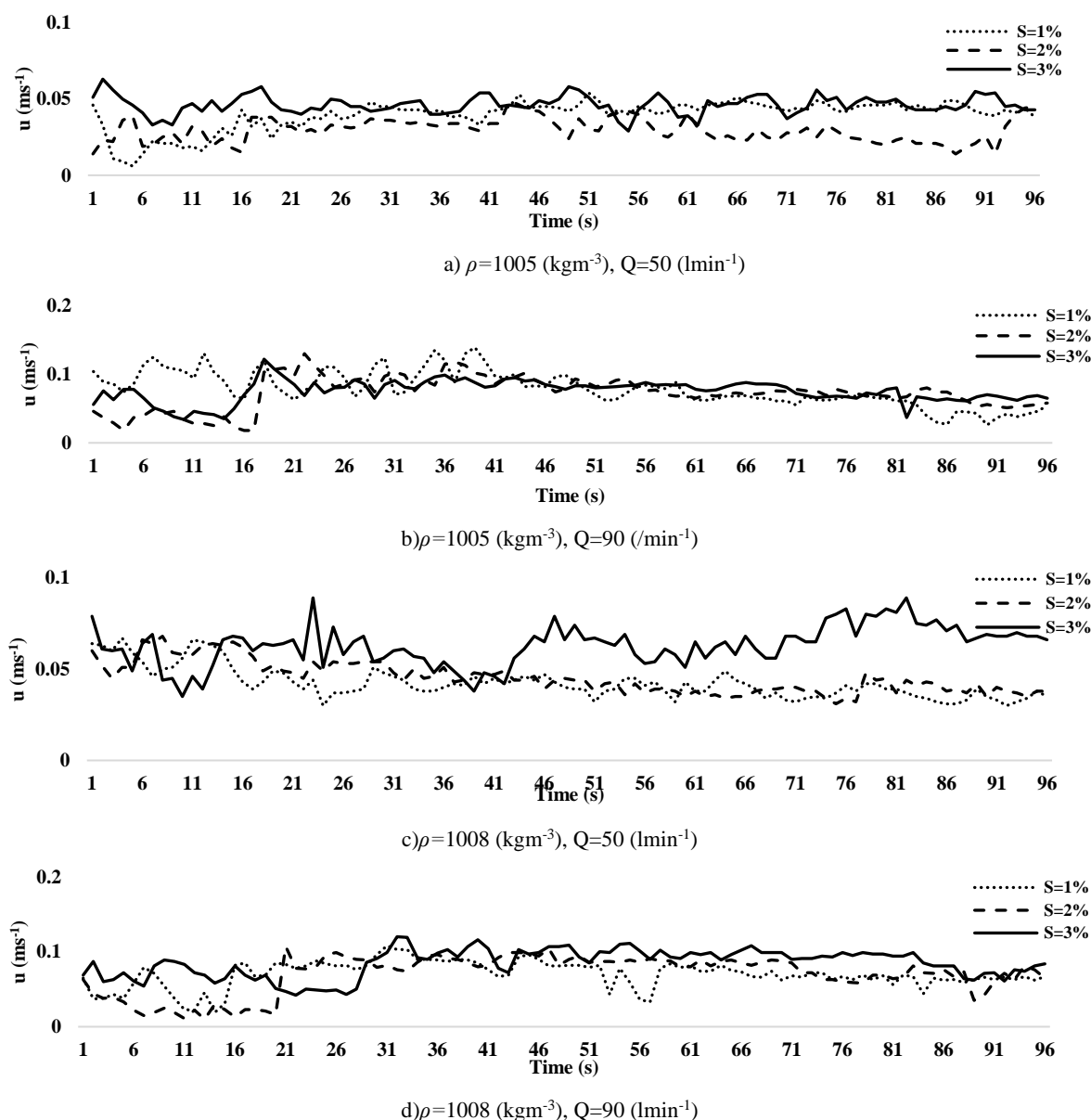


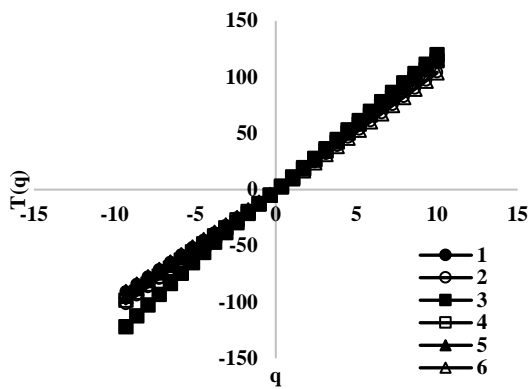
Fig. 4 Time series diagram of velocity under different gradients at a distance of 5m from the inlet valve

شکل ۴ نمودار دوره زمانی سرعت تحت شیب‌های مختلف در فاصله ۵m از دریچه ورودی

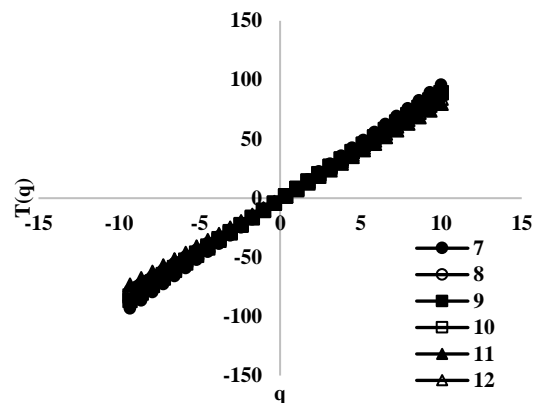
جدول ۲ خلاصه نتایج شاخص‌های فراکتالی دوره زمانی سرعت در فاصله ۵m از دریچه ورودی

Table 2 Summary of the results of the fractal indicators of the velocity time series at a distance of 5m from the inlet valve

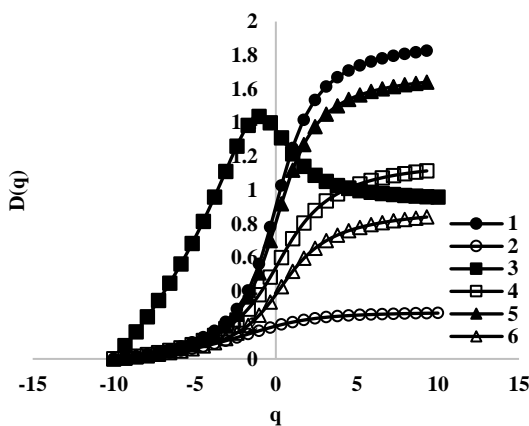
Exp. No	Dr	Vertex angle (θ)	Rate of changes		Range ($\alpha_{max} - \alpha_{min}$)	Angle (α)
			D(q=10)	D(q=-10)		
1	1.372	176.58	1.834		2.0419	77.4
2	1.292	179.42	1.2716		3.3608	63.94
3	1.406	177.97	1.4377		3.0483	51.59
4	1.246	177.82	1.1212		1.3096	70.2
5	1.459	177.08	1.6472		1.8302	72.04
6	1.4	178.54	0.8467		0.9957	77.32
7	1.22	179.94	0.2065		0.2465	74.65
8	1.272	179.1	0.3861		0.4482	72.87
9	1.3	179.92	0.1707		0.2316	57.54
10	1.33	179.46	0.2307		0.3179	48.16
11	1.412	179.1	0.3495		0.395	70.07
12	1.375	179.85	0.0569		0.0873	53.95



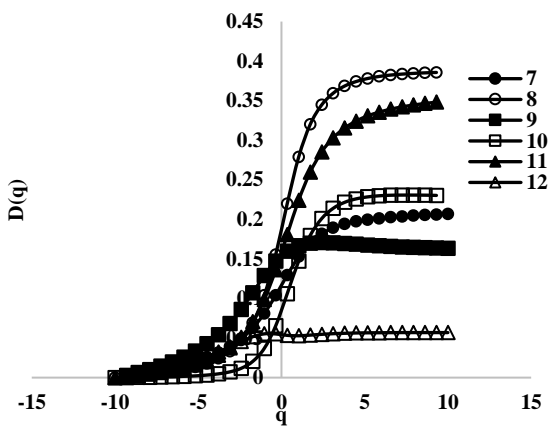
(b) The scaling exponent



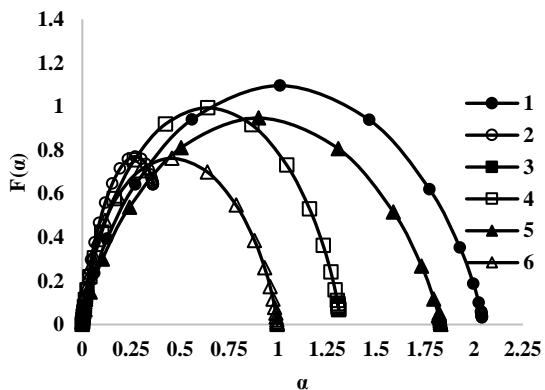
(a) The scaling exponent



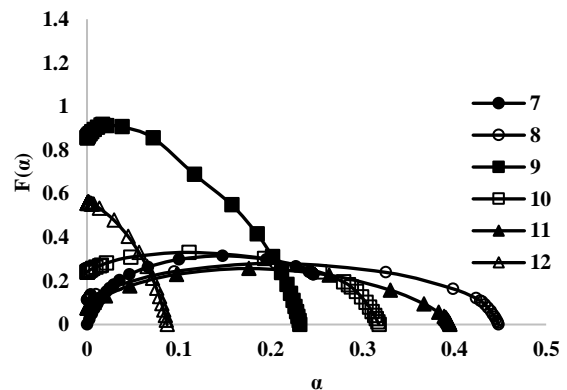
(d) Fractal Generalized Dimension



(c) Fractal Generalized Dimension



(f) Singularity spectrum



(e) Singularity spectrum

Fig. 5 Fractal index diagram of time series of dense flow speed at a distance of m5 from the inlet valve

شکل ۵ نمودار شاخص‌های فراکتالی دوره زمانی سرعت جریان چگال در فاصله ۵m از دریچه ورودی

سمت تک فراکتال میل می‌کند همچنین در نمودارهای طیف تکینگی، با افزایش دبی ورودی از ۵۰ لیتر بر دقیقه به ۹۰ لیتر بر دقیقه نمودار طیف تکینگی از حالت تقارن کامل به سمت تقارن راست متمایل می‌شود به عبارتی دیگر با افزایش دبی، نمودار فراکتال دقیق که از عنصرهای همسان به وجود می‌آید به سمت تک فراکتال میل می‌کند که نسبت به

به عنوان نمونه برابر شکل ۵ شاخص‌های فراکتالی دوره زمانی سرعت جریان چگال نشان داده شده است، بطور کلی برای هنگامی که دبی ورودی از ۵۰ لیتر بر دقیقه به ۹۰ لیتر بر دقیقه تغییر یابد، بعد فراکتال دوره زمانی سرعت ۲/۲٪ کاهش می‌یابد و دامنه و زاویه α به ترتیب ۵/۵٪ کاهش و ۳/۹٪ افزایش می‌یابد و متمایل سامانه با افزایش دبی ورودی به

رفتار ضد همبسته اجزای دوره، و به معنای عدم حساسیت معنا دار فراکتالیته سامانه از تغییرپذیری‌های صورت یافته است در حالی که در آزمایش‌های ۹ و ۱۲ که شرایط اولیه آزمایش مبتنی بر بیشترین دبی و شیب می‌باشد، فارغ از میزان غلظت الگوی مثبت تغییرپذیری‌های چند فراکتالی و رویکرد همبسته در اجزای دوره نمایان است.

خلاصه نتایج تغییرپذیری‌های شاخص‌های فراکتالی در دوره زمانی در جدول ۳ قابل مشاهده می‌باشد. بطور کلی در دوره زمانی سرعت جریان چگال، هنگامی که بعد فراکتال جریان چگال کاهش می‌یابد در حقیقت دبی، شیب و چگالی جریان غلیظ افزایش یافته است و تاثیر پذیری شیب بستر فلوم بیشتر از تغییرپذیری‌های دبی و چگالی ورودی می‌باشد. همچنین بیشترین عامل اثر گذار بر دامنه α و تغییرپذیری‌های بعد فراکتال تعمیم یافته در اثر افزایش دبی می‌باشد و بیشترین اثر بر زاویه چرخش در نمودار ضریب مقیاس، تغییرپذیری‌های شیب بستر فلوم می‌باشد. در تفسیر فراکتالی دوره زمانی سرعت جریان چگال می‌توان بیان کرد که تغییرپذیری‌های موضعی که شامل شیب آبراهه می‌باشد تاثیر بر الگوی طبیعی جریان نمی‌گذارد در نتیجه افزایش دبی و چگالی ورودی باعث می‌شود پدیده ساختار فراکتالی خودش را حفظ کند و به عبارتی اثر تنگ شدگی‌های ممتد و موضعی در آبراهه، روی دبی‌ها و چگالی‌های کوچک اثر گذار می‌باشد.

تغییرپذیری‌های کوچک دبی حساس است که با افزایش دبی این عامل ایجاد می‌شود. نمودارهای ضریب مقیاس در دوره زمانی سرعت نشان می‌دهد که با افزایش دبی ورودی، زاویه چرخش ۰/۴ درصد افزایش می‌یابد که تغییر چندان محسوسی مشاهده نمی‌شود اما نمودارها خطی هستند و زاویه چرخش نشان از تمایل ضعیف به سمت چند فراکتال کاهش را نشان می‌دهد همچنین نمودار بعد تعمیم یافته نشان می‌دهد که با افزایش دبی ورودی، تغییرپذیری‌های Dq حدود ۵۰٪ کاهش می‌یابد و نمودار آن حالت ملایم تر و نرم تری دارد و تمایل سامانه به سمت چند فراکتالی کاهش می‌یابد. بطور کلی با افزایش دبی ورودی آبراهه، روند سامانه در دوره زمانی سرعت جریان چگال تمایل به چند فراکتالی کاهش می‌یابد. بررسی نتایج چندفراکتالی در شکل ۵، روشن می‌کند که در حالی که میانگین $\alpha(0)$ کمتر از ۰.۵ برای دوره‌های زمانی جریان چگال نشان دهنده حافظه دراز مدت با رفتار ضد همبستگی است، مقدار بیش از ۰.۵ این شاخص شامل نگرش همبسته است. بررسی نمودارهای طیف تکینگی جریان چگال نشان می‌دهد که بیشترین تاثیرپذیری رفتار چند فراکتال جریان چگال از افزایش دبی و پس از آن شیب آبراهه بوده و میان تغییرپذیری‌های غلظت اغلب در سطح کمتری از حساسیت نسبت به این دو را شامل می‌شود. بررسی نمودارهای شکل ۵-f و ۵-e نشان می‌دهد که رفتار دوره‌های زمانی جریان در تمام آزمایش‌های ۱ تا ۶ دال بر

جدول ۳ درصد تغییرپذیری‌های شاخص‌های فراکتالی در دوره زمانی در اثر تغییرپذیری ورودی اولیه

Table 3 Percentage changes of fractal indices in time series as a result of initial input changes

Exp. No	Type	D_f	Vertex angle (θ)	Rate of changes		Range ($\alpha_{max} - \alpha_{min}$)	Angle (α)
				$D(q=10) - D(q=-10)$			
Q (l/min)	50 → 90	-2.2%	+0.4%	-50%		-53.5%	+3.9%
S (%)	1 → 3	-4.33%	-7.6%	+9%		+8%	-9.7%
ρ (kgm ⁻³)	1005 → 1008	-4.21%	-6.7%	-5.1%		-9.7%	+9.8%

شاخص‌های فراکتالی دوره زمانی سرعت جریان چگال برای همه مدل‌ها نشان دادند، هنگامی که دبی ورودی از ۵۰ لیتر بر دقیقه به ۹۰ لیتر بر دقیقه تغییر یابد، بعد فراکتال دوره زمانی سرعت ۲/۲٪ کاهش می‌یابد و دامنه و زاویه α به ترتیب ۵۳/۵٪ کاهش و ۳/۹٪ افزایش می‌یابد، زاویه چرخش ۰/۴ درصد افزایش می‌یابد و تغییرپذیری‌های Dq

۴- نتیجه‌گیری

دوره زمانی سرعت جریان چگال در همه مدل‌ها در فاصله ۵m از دریچه ورودی نشان داد، بعد فراکتال تعمیم یافته با افزایش دبی و غلظت جریان کاهش می‌یابد و نشان می‌دهد که پدیده نسبت به غلظت‌ها و دبی‌ها ی بالا حساسیت کمتری دارد و رفتار جریان تابع شرایط اولیه می‌باشد.

۵- فهرست نشانه‌ها

Q	دبی (Lmin^{-1})
ρ_t	چگالی سیال غلیظ (Kgm^{-3})
S	شیب کف آبراهه
u	سرعت (ms^{-1})
ρ_a	چگالی آب (kgm^{-3})
Δt	بازه زمان بر حسب ثانیه
f_s	فرکانس دوره
μ_t	طول کلی شکل
δ	اندازه جعبه
q	بازه تغییرپذیری‌ها
D_q	بُعد فراکتال
T_q	ضریب مقیاسی
$p_i^q(\delta)$	شمار کل جعبه‌های غیر خالی با اندازه δ
$f(\alpha)$	طیف تکینگی
θ	زاویه چرخش

۶- سپاسگزاری

در این تحقیق از مسئولان و کارشناسان آزمایشگاه هیدرولیک دانشگاه شیراز به برای گرد آوری و انجام آزمایش‌های جریان چگال قدرانی شود.

۷- منابع‌ها

- Alami, M. & Malekani, L. (2013). Phase Space Reconstruction and Fractal Dimension Using of Delay Time and Embedding Dimension. *Journal of Civil and Environmental Engineering*, 43(1), 105-115. (In Persian)
- Alipour, M.H. & Shamsai, A. (2016). Seasonal fractal-scaling of floods in two U.S. water resources. *Journal of Hydrology*, 540(1), 232-239.
- Beata, K., Dariusz, K. & Ewa, H. (2020). Fractal-Heuristic Method of Water Quality Sensor Locations in Water Supply Network, *Journal of Water*, 12(3), 832-847.
- Campos, P. & Paz, I. (2020). Spatial Diagnosis of Rain Gauges' Distribution and Flood Impacts: Case Study in Itaperuna, Rio de Janeiro—Brazil, *Journal of Water*, 12(1), 1120-1147.
- Carpinteri, A., Lacidogna, G. & Niccolini, G. (2009). Fractal analysis of damage detected in concrete structural elements under loading, *Chaos Solitons and Fractals*, 42(4), 2047-2056.
- Chhabra, A., Jensen, R. & Sreenivasan, K.R. (1989). Multifractals, Multiplicative Processes and

حدود ۵۰٪ کاهش می‌یابد و نمودار آن حالت ملایم تر و نرم تری بطور کلی با افزایش دبی ورودی آبراهه، روند سامانه در دوره زمانی سرعت جریان چگال تمایل به چند فراکتالی کمی دارد. شاخص‌های فراکتالی دوره زمانی سرعت جریان چگال در همه مدل‌ها نشان دادند، هنگامی که شیب کف آبراهه از ۱٪ به ۳٪ تغییر یابد میزان بُعد فراکتال دوره زمانی سرعت ۴/۳۳٪ کاهش می‌یابد و دامنه و زاویه α به ترتیب ۸٪ افزایش و ۹/۷٪ کاهش می‌یابد، زاویه چرخش ۷/۶ درصد کاهش می‌و تغییرپذیری‌های D_q حدود ۹٪ افزایش می‌یابد و نمودار آن حالت شیب تند تری دارد. بطور کلی با افزایش شیب آبراهه، روند سامانه در دوره زمانی سرعت، میل به سمت چند فراکتالی بیشتری دارد. شاخص‌های فراکتالی دوره زمانی سرعت جریان چگال در همه مدل‌ها نشان دادند، هنگامی که چگالی ورودی از kgm^{-3} ۱۰۰۵ به ۱۰۰۸ تغییر یابد میزان بُعد فراکتال دوره زمانی سرعت ۴/۲٪ کاهش می‌یابد و دامنه و زاویه α به ترتیب ۹/۷٪ کاهش و ۹/۸٪ افزایش می‌یابد، زاویه چرخش ۶/۷ درصد کاهش می‌یابد و تغییرپذیری‌های D_q حدود ۵/۱٪ کاهش می‌یابد و نمودار آن حالت ملایم تری دارد. بطور کلی با افزایش چگالی آبراهه، روند سامانه در دوره زمانی سرعت، میل به سمت چند فراکتالی کمی دارد. در تفسیر فراکتالی دوره زمانی سرعت جریان چگال می‌توان بیان کرد که تغییرپذیری‌های موضعی که شامل شیب آبراهه می‌باشد تأثیری بر الگوی طبیعی جریان نمی‌گذارد در نتیجه افزایش دبی و چگالی ورودی باعث می‌شود پدیده ساختار فراکتالی خودش را حفظ کند. بطور کلی در دوره زمانی سرعت جریان چگال، هنگامی که بُعد فراکتال جریان چگال کاهش می‌یابد در حقیقت دبی، شیب و چگالی جریان غلیظ افزایش یافته است و تأثیر پذیری شیب بستر فلوام بیشتر از تغییرپذیری‌های دبی و چگالی ورودی می‌باشد. همچنین بیشترین عامل اثر گذار بر دامنه α و تغییرپذیری‌های بُعد فراکتال تعمیم یافته در اثر افزایش دبی می‌باشد و بیشترین اثر بر زاویه چرخش در نمودار ضریب مقیاس، تغییرپذیری‌های شیب بستر فلوام می‌باشد.

- Mandelbrot, B.B. & Van Ness, J.W. (1986) Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review*, 10, 422-437.
- Mohammadi, M. & Ekhtesasi, M. (2019). Comparison of fractal dimension and geomorphologic characteristics in the management of Aqda Basin, *Environmental Erosion Research Journal, Hormozgan University*, 33(1), 62-84. (In Persian)
- Rahmani, F. & Fattahi, M.H. (2021). Nonlinear dynamic analysis of the fault activities induced by groundwater level variations. *Groundwater for Sustainable Development*, 14, 100629, <https://doi.org/10.1016/j.gsd.2021.100629>.
- Rahmani, F. & Fattahi, M.H. (2022). Association between forecasting models' precision and nonlinear patterns of daily river flow time series. *Modeling Earth Systems and Environment*, 8(3), 4267-4276.
- Rahmani, F. & Fattahi, M.H. (2023). Climate change-induced influences on the nonlinear dynamic patterns of precipitation and temperatures (case study: Central England). *Theoretical and Applied Climatology*, 152(3-4), 1147-1158.
- Rakhshandehroo, G.R. & Amiri, S.M. (2012) Evaluating fractal behavior in groundwater level fluctuation, *Journal of Hydrology*, 464(1), 550-556.
- Rezaie, M., Servati, M. & Asghari, M. (2011). Investigating changes in the geometric pattern of the Qezel Ozen River using fractal geometry analysis, *Journal of geography and planning*, 4(1), 119-139. (In Persian)
- Teng, Y. & Shang, P. (2018). Detrended fluctuation analysis based on higher-order moments of financial time series. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 490(1), 311–322.
- Vargas, K. & Salariaga, J. (2019). Analysis of Fractality in Water Distribution Networks Using Hydraulic Criteria, 1th Congress O ASCE World Environmental and Water Resources, USA.
- Wei, X and Li, X. (2016) "Fractal features of soil particle size distribution in layered sediments behind two check dams: Implications for the Loess Plateau, China" *Journal of Hydrology*, 266(1), 133–145.
- Zhang, X., Zhang, G., Qiu, L., Zhang, B., Sun, Y., Gui, Z. & Zhang, Q. (2019). A Modified Multifractal Detrended Fluctuation Analysis (MFDFA) Approach for Multifractal Analysis of Precipitation in Dongting Lake Basin, China. *Journal of Water*, 11(5), 891-1009.
- the Thermodynamic Formalism, *Phys. Rev. A*, 40(8), 4593-4611.
- Elmie, H., Peykar, O. & Saadat, M. (2014). Investigating the fractal theory in river geomorphology: a case study of Zarineh River, *Journal of Geography and Planning*, 3(2), 130-141. (In Persian)
- Farzin, S., Shekholeslami, R. & Hasanzadeh, Y. (2011). Analyzing the volatility of time series using phase space drawing and correlation dimension method of a case study of monthly rainfall in Lake Urmia. 4th Water Resources Management Conference, Amir Kabir University of Technology, Tehran. (In Persian)
- Garcia-Marin, A., Estevez, J., Morbidelli, R., Saltalippi, C., Murioz, J. & Flammini, A. (2020). Assessing Inhomogeneities in Extreme Annual Rainfall Data Series by Multifractal Approach. *Journal of Water*, 12(1), 1030-1048.
- Hekmatzadeh, A., Haghghi, A., Guyomi, K., Amiri, S.M. & Klove, B. (2019). The effects of extremes and temporal scale on multifractal properties of river flow time series. *River Research and Applications*, 36(1), 1-12.
- Hemali, T. & Pathak K.N. (2013). Multi-fractality due to long-range correlation in the L-band ionospheric scintillation S4 index time series. *Astrophysics and Space Science*, 350(1), 47-56.
- Hosseini, M. & Moshfegh, M. (2014). Comparison between phase space-based local chaotic models for riverflow forecasting, *Journal of Civil Engineering Modares*, 15(3), 13-23. (In Persian)
- Hosseini, M., Fattahi, M.H. & Eslamian, S. (2020). "Experimental Analytical Study on Fractal Behaviors of the Density Current. *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions of Civil Engineering*, 45(1), 2663-2679.
- Hosseini, M., Fattahi, M.H. & Eslamian, S. (2021). Experimental investigation of density current patterns using dynamic fractal analysis. *International Journal of Sediment Research*, 36(2), 165-176.
- Kamyab, S. & Fattahi, M.H. (2018). Compliance of the Watershed Geo-Morphological Indices with the Multi fractal Properties of the River Network, Iran. *Water Resources Research*, 14(5), 311-326.
- Khatibi, R., Sivakumar, B., Ghorbani, M.A., Kisi, O., Kocak, K. & Farsadizadeh, D. (2012). Investigating chaos in river stage and discharge time series. *Journal of Hydrology*, 414(1), 108–117.
- Lee, A., Aubeneau, A. & Cardenas, M. (2020). The Sensitivity of Hyporheic Exchange to Fractal Properties of Riverbeds. *Journal of Water*, 56(5), 20-42.

