

Study of Variable Coefficients of Forschheimer's Relation in Analysis of Unsteady Flow in Porous Media

Hassan Hajikazemian¹, Jalal Bazargan^{2*}

1- PhD in Hydraulic Structures, Department of Civil Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

2- Prof. Department of Civil Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

* jbazargan@znu.ac.ir

Received: 3 July 2023

Accepted: 10 September 2023

Discussion: 21 December 2024



J. Hydraul.

Iranian Hydraulic Association

Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: Coarse-grained porous media, due to the size of particles and pores, causes complications in the flow behavior, so that the flow in them does not have a layered state and the Darcy relation loses its validity. In such a situation, the hydraulic gradient velocity relationship is nonlinear. The coefficients of the relationships have been examined by various researchers.

Surface water relations, also known as Saint-Venant relations, are among the best calculation tools governing free surface water flows. These equations were first used in 1871 by Adbemar Barre de Saint Venant in order to analyze unsteady flow with a free surface, and after that many researchers applied and analyzed the characteristics of free flows as well as flow in porous medium by these equations.

In this research, characteristics of steady and unsteady flow in porous environment have been studied. By calculating the velocity values at each point and plotting the velocity graph against the hydraulic gradient, the coefficients of Forschheimer's binomial relation were obtained for different discharge values. By examining the changes of these coefficients, linear relationships were obtained for the changes of the coefficients against the flow rate changes.

Methodology: In the present study, the tilting laboratory channel of the Faculty of Civil Engineering, Zanjan University was used. In order to create a porous environment, 1.2 meters of the length of the channel has been selected and separated by two net separators. (Fig 1). The grading of pebbles used is presented in Figure 2. Also, their physical characteristics are given in Table 1.

The experimental program of this research was carried out in two sections of steady and unsteady flow. In the steady part, water flowed with 10 different flow rates from 8.51 to 20.62 L/s. By arranging the coefficients and the flow rates and plotting them against each other, a function can be derived to calculate the coefficients a and b based on the flow rate. The graphs in Figure 4 show these functions.

In the next part of the tests, the hydrograph in Figure 5 was passed through the porous media. Saint-Venant's equations were considered as governing equations and were solved using the method of characteristics. The equations were solved once by using fixed values and the other time by using the functions of Forschheimer coefficients.

Results and Discussion: The Saint-Venant equations for the problem were solved once by

using the average values of the coefficients of Forschheimer's relation and again by using the functions of these coefficients. By solving the equations, the velocity and depth values and as a result the flow rate at any moment and at any point of the porous medium were calculated. Table 3 shows the calculated flow rate error for two solution modes. In this table, the minimum and maximum values of the input hydrograph are compared with their corresponding values in the hydrograph at the point of 6 cm. Checking the error values shows that the calculated error of the maximum flow rate (which occurred at the peak of the hydrograph) in the case of constant Forschheimer coefficients is 13.36%, which is about 3 liters per second more than the actual hydrograph. In spite of this issue, there is only 2.16% error in the calculation hydrograph with variable coefficients of maximum discharge. This is also important in the minimum of hydrograph. So that the error value in the calculation hydrograph with fixed coefficients has 22% error (minimum of the hydrograph occurs at the beginning), while the corresponding value for the calculation mode with variable coefficients is only 1%.

As can be seen in Fig 9, the calculated profile is almost always a little lower than the observed profile and the difference between these two profiles reaches its maximum at the time of the hydrograph peak, and then the difference decreases again as the discharge decreases.

Table No. 4 shows the percentage of the relative error for the observed and calculated flow profiles at different times. As mentioned, the maximum error among all times and all points is observed in 400 seconds and at the end point of the profile.

Conclusion: The results of the numerical solution in two cases of fixed and variable coefficients show that the percentage of relative error in the maximum and minimum discharge for the case of fixed coefficients is much more than the case of variable coefficients.

The results show that the maximum discharge is smaller as we move along the medium and also occurs at a later time. The results also indicated that the average calculation error of the depth at the times of 100, 300 and 600 seconds respectively is 4.88, 8.05 and 9.93 percent.

Keywords: porous media, Forschheimer's Relation, Unsteady Flow, Saint-Venant Equations, Method of Characteristics.



© 2024 Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.

This is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

بررسی استفاده از ضرایب متغیر رابطه‌ی فورشه‌ایمر در تحلیل جریان غیرماندگار در محیط متخلخل

حسن حاجی کاظمیان^۱، جلال بازرگان^{۲*}

۱. دانش‌آموخته دکتری مهندسی آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه زنجان، زنجان.

۲. استاد، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه زنجان، زنجان.

*jbazargan@znu.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۱۲، پذیرش: ۱۴۰۲/۰۶/۱۹، نقد و بررسی: ۱۴۰۳/۱۰/۰۱، وب‌گاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: در این تحقیق ویژگی‌های جریان‌های ماندگار و غیرماندگار درون محیط متخلخل سنگریزه‌ای به صورت آزمایشگاهی و عددی مورد بررسی قرار گرفته و برای نخستین بار روابط خطی برای ضرایب رابطه‌ی فورشه‌ایمر بر اساس دبی جریان در حل عددی معادله‌های سنتونانت مورد استفاده گرفت. در بخش نخست پس از عبور دادن ۱۰ دبی متفاوت در حالت ماندگار از محیط سنگریزه‌ای، با ثبت عمق جریان در هر نقطه، نمودارهای سرعت متوسط-گرادیان هیدرولیکی برای آنها رسم شده و مقادیر ضرایب رابطه‌ی فورشه‌ایمر برای هر دبی به صورت جداگانه به دست آمد. سپس تغییرهای این ضرایب در برابر دبی مورد بررسی قرار گرفته و برای هر یک از ضرایب رابطه‌ی خطی بر اساس دبی پیشنهاد گردید. در ادامه‌ی آزمایش‌ها با عبور دادن یک هیدروگراف از محیط سنگریزه‌ای مقادیر عمق در هر لحظه و هر نقطه به ثبت رسیدند. در بخش دوم معادله‌های سنتونانت به عنوان معادلات حاکم در نظر گرفته و با استفاده از روش مشخصه‌ها به حل آنها پرداخته شد. حل معادله‌ها یک بار با استفاده از مقادیر ثابت و بار دیگر با ضرایب متغیر صورت گرفت که نتایج حاصل شده حاکی از آن می‌باشند که درصد خطای نسبی محاسباتی در دبی ورودی بیشینه برای حالت ضرایب ثابت و متغیر به ترتیب معادل ۱۳/۳۶ و ۲/۱۶ درصد و در دبی کمیته نیز به ترتیب معادل، ۲۲ و ۱ درصد هستند. در ادامه‌ی حل معادله‌ها با ضرایب متغیر، نتایج عمق جریان در زمان‌های مختلف در تمام طول محیط ایجاد شده با دقت مناسبی محاسبه و بررسی گردید.

کلیدواژگان: محیط سنگریزه‌ای، رابطه‌ی فورشه‌ایمر، جریان غیرماندگار، معادله‌های سنتونانت، روش مشخصه‌ها.

۱- مقدمه

عنوان دو دسته کلی رابطه‌های سرعت گرادیان هیدرولیکی

در محیط متخلخل معرفی کرد.

$$i = aV + bV|V| \quad (1)$$

$$i = mV^n \quad (2)$$

ضریب‌های رابطه‌های بالا توسط محققان مختلفی از جمله Sidropolo, Stephenson, Ward, Englund, Ergun, Hansen, Ahmed & Sonada و ... بررسی شده و اغلب بر مبنای مجموعه‌ای از ویژگی‌های مصالح، سیال و سرعت ظاهری (یا عدد رینولدز) محاسبه شده‌اند.

Lenc et al. (2022) در تحقیق خود روشی برای استخراج فرمول ضریب‌های موثر فورشه‌ایمر برای یک محیط متخلخل چند لایه پیشنهاد کردند. این رابطه‌ها بر مبنای

بررسی و پیش‌بینی مشخصه‌های جریان در محیط‌های سنگریزه‌ای به ویژه محیط درشت‌دانه در علوم مختلف دارای اهمیت زیادی می‌باشد. محیط‌های متخلخل درشت‌دانه با توجه به اندازه‌ی ذرات و منفذها سبب بروز پیچیدگی‌هایی در رفتار جریان می‌شوند به طوری که جریان در آنها حالت لایه‌ای نداشته و رابطه‌ی داری اعتبار خود را از دست می‌دهد. در چنین وضعیتی رابطه‌ی سرعت گرادیان هیدرولیکی به صورت غیرخطی می‌باشد. بنا بر نتایج پژوهش‌های بسیاری که در این زمینه انجام شده می‌توان رابطه‌ی دو جمله‌ای و رابطه‌ی نمایی را به

Hosseini & Joy (2007) معادله‌های تجربی مورد استفاده برای برآورد فراسنجه‌های هیدرولیکی جریان غیرخطی در محیط‌های متخلخل درشت‌دانه را ارزیابی کرد و به این نتیجه رسید که معادله‌هایی که در آنها داده‌های مرتبط با زبری و شکل سنگ‌دانه‌ها لحاظ شده‌اند به نتایج خوبی در برآورد فراسنجه‌های جریان درون محیط متخلخل می‌انجامد. وی از رابطه‌های اصلاح شده سنت-ونانت به منظور مدل‌سازی جریان ناماندگار از میان محیط سنگریزه‌ای استفاده کرد. همچنین رابطه‌های همانندی توسط Stephenson (1979) به عنوان رابطه‌های حاکم برای تحلیل جریان در محیط متخلخل ایجاد شده در یک کانال مستطیلی استفاده شده‌اند. (Norouzi et al., 2023) با استفاده از داده‌های آزمایشگاهی و معادل‌های سنت-ونانت جریان ناماندگار درون مصالح سنگریزه‌ای را بررسی کردند. بدین منظور در رابطه‌های مورد استفاده از معادله‌ی دو جمله‌ای فورشه‌ایمر به منظور محاسبه گرادیان هیدرولیکی استفاده شد. نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهند استفاده از مقدارهای متغیر a و b در معادله‌ی فورشه‌ایمر نسبت به مقدارهای ثابت می‌تواند نتایج دقیق‌تری را حاصل کند. ضریب‌های بالا توسط الگوریتم توسعه‌ی ذرات PSO در هر گام زمانی محاسبه شده‌اند.

در این پژوهش ویژگی‌های جریان ماندگار و ناماندگار در محیط متخلخل سنگریزه‌ای بررسی شده‌اند. در بخش نخست آزمایش‌های ماندگار با عبور دادن ۱۰ دبی متفاوت از سنگریزه‌ها مقدارهای عمق در نقطه‌های طول محیط ثبت شدند. با محاسبه مقدارهای سرعت در هر نقطه و رسم نمودار سرعت در برابر گرادیان هیدرولیکی ضریب‌های رابطه‌ی دو جمله‌ای فورشه‌ایمر برای هر یک از دبی‌ها به دست آمد. با بررسی روند تغییرهای این ضریب‌ها رابطه‌های خطی برای تغییر ضریب‌های در برابر تغییر دبی به دست آمد. در بخش دوم آزمایش به صورت ناماندگار انجام شده و در هر لحظه و در هر مکان مقدارهای عمق آب ثبت شد. در ادامه معادله‌های سنت-ونانت به عنوان معادله‌های حاکم با استفاده از روش مشخصه‌ها حل شد. حل معادله‌ها در دو حالت صورت گرفته که در حالت نخست ضریب‌های فورشه‌ایمر به صورت ثابت (مقدارهای

نفوذپذیری لایه‌های موازی و همچنین لایه‌های عمود بر جریان تدوین شده‌اند. مصالح مخلوط پیرامون معدن آهن Yashuan در کشور چین به منظور بررسی و تحلیل ویژگی‌های جریان توسط Li and Chen (2022) بررسی شده است. در این تحقیق عملکرد رابطه‌ی داریسی در مصالح با دانه‌بندی مختلف از لای تا شن و نفوذپذیری‌های متفاوت بررسی کرده و نشان داده‌اند که هر چه نفوذپذیری مصالح بیشتر شود رابطه‌ی داریسی اعتبار خود را بیشتر از دست می‌دهد و رابطه‌ی غیر خطی فورشه‌ایمر می‌تواند بهترین نتیجه را در تحلیل مشخصه‌های جریان فراهم سازد. نتایج آزمایش‌ها نشان می‌دهند که با افزایش نفوذپذیری مصالح ضریب غیرخطی فورشه‌ایمر به صورت نمایی افزایش می‌یابد. در پژوهشی دیگر مشخصه‌های جریان غیرداریسی در محیط متخلخل با تهیه منحنی‌های گرادیان فشار در برابر سرعت تجزیه و تحلیل شده‌اند. محققان آزمایش‌های خود را روی نمونه‌ی استوانه‌ای به قطر ۱۵ و ارتفاع ۳۰ سانتی‌متر روی ۷ نوع مصالح انجام دادند. نتایج نشان دادند ضریب β با تخلخل و نفوذپذیری رابطه دارد. در پایان معادله‌ای برای ضریب یاد شده بر مبنای پارامترهای تخلخل و نفوذپذیری ارائه گردید (Yang et al., 2018).

رابطه‌های آب‌های سطحی که به عنوان معادله‌های سنت-ونانت نیز یاد می‌شود از بهترین ابزار محاسبه‌شدنی حاکم بر جریان‌های آب با سطح آزاد می‌باشد. جریان‌هایی همچون جریان‌های سیلابی در رودخانه‌ها، جریان درون سازه‌های هیدرولیکی مانند سدها یا تأسیسات فاضلاب و همچنین جریان درون محیط‌های سنگریزه‌ای از این جمله هستند (Elsanouse et al., 2022). این معادله‌ها اولین بار در سال ۱۸۷۱ توسط Adbemar Barre de Saint Venant به منظور تحلیل جریان ناماندگار با سطح آزاد به کار گرفته شد و پس از آن محققان بسیاری به بررسی و برآورد مشخصه‌های جریان‌های آزاد و همچنین جریان در محیط متخلخل توسط این معادله‌ها پرداختند که می‌توان به نتایج بررسی‌های (Costabile et al., 2009), Fiedler and Ramirez (2000), Delestre and James (2008) و Cea and Blade (2015) اشاره کرد.

است. این کانال به طول ۱۳ متر و به ابعاد یک متر عرض در ۰/۸ متر ارتفاع بوده و دیواره‌ی آن به منظور بررسی جریان از شیشه ساخته شده است. به منظور ایجاد محیط متخلخل ۲/۱ متر از طول کانال انتخاب و توسط دو جداکننده توری جدا شده است. برای ثبت فشار وارد بر کف کانال تعداد ۲۳ پیزومتر در محدوده ایجاد شده نصب شده‌اند. فاصله‌ی پیزومترها به صورت ۶ پیزومتر به فاصله ۱۵ سانتی‌متر در ابتدا، ۶ پیزومتر به فاصله ۱۰ سانتی‌متر در وسط و ۱۰ پیزومتر به فاصله ۵ سانتی‌متر در انتهای کانال قرار داده شده است. شکل ۱ نمای کلی کانال را نشان می‌دهد. برای ایجاد شیب از دو جک هیدرولیک استفاده می‌شود که در این پژوهش شیب به صورت ثابت ۱/۷۳ درصد تنظیم شده است.

متوسط) و در حالت دوم برای نخستین بار ضریب‌های به صورت متغیر (تابعی از دبی) در حل معادله‌های سنت-ونانت در نظر گرفته شدند. نتایج نشان می‌دهند مقادیرهای خطا در هیدروگراف ورودی جریان با استفاده از ضریب‌های متغیر خطای بسیار کمتری دارد از این رو در ادامه محاسبه‌ها از ضریب‌های متغیر استفاده شد. بررسی نتایج عمق و دبی در نقطه‌ها و زمان‌های مختلف نشان دهنده صحت عملکرد تابع‌های پیشنهادی برای ضریب‌های فورشه‌ایم می‌باشد.

۲- مواد و روش‌ها

۱-۲- تجهیزات آزمایشگاهی

در این پژوهش از کانال آزمایشگاهی شیب‌پذیر آزمایشگاه دانشکده‌ی مهندسی عمران دانشگاه زنجان استفاده شده

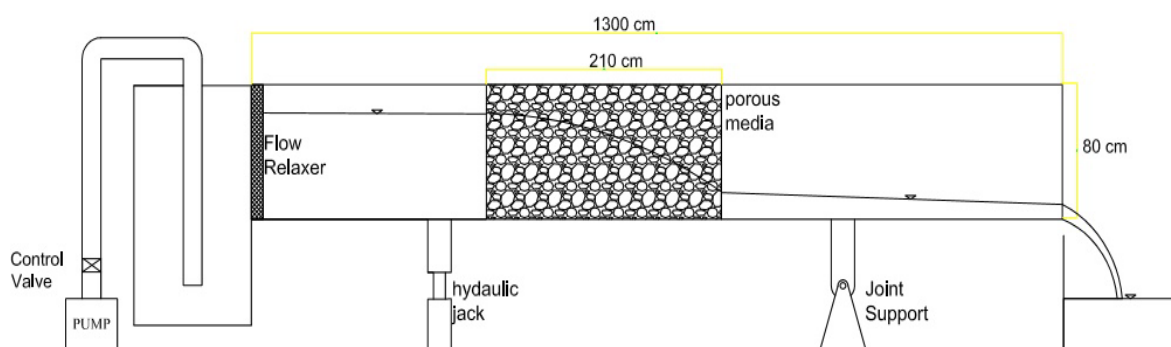


Fig 1. Schematic of laboratory flume

شکل ۱. نمای کلی کانال آزمایشگاهی مورد استفاده

۳- آزمایش‌های انجام شده

۱-۳- حالت ماندگار

برنامه‌ی آزمایشی این پژوهش در دو بخش جریان ماندگار و ناماندگار صورت گرفت. در قسمت ماندگار آب با ۱۰ دبی مختلف (دبی از ۸/۵۱ تا ۲۰/۶۲ لیتر بر ثانیه) از محیط متخلخل ایجاد شده عبور داده شد. با هدف ماندگاری مؤلفه‌های جریان، در آغاز هر آزمایش پمپ به مدت ۱۰ دقیقه با دبی مورد نظر کار کرده و پس از آن پارامترهای

۲-۲- مصالح مورد استفاده

سنگریزه‌های مورد استفاده در این تحقیق از یک معدن سنگ کوهی واقع در روستای نیکویه در فاصله‌ی ۴۰ کیلومتری شمال غرب شهر قزوین تامین شده‌اند. سنگدانه‌ها از جنس آذرین بوده و با هدف استفاده در بالاست راه‌آهن تولید شده‌اند. بر این مبنا همه سنگریزه‌های مورد استفاده تیز گوشه می‌باشند. همچنین مشخصه‌های فیزیکی آنها در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱ ویژگی‌های فیزیکی سنگریزه‌ی مورد استفاده

Table 1 Specifications of laboratory materials

| d0 | d10 | d30 | d50 | d60 | d100 | Cu | Cc | Porosity |
|-------|------|------|-------|-------|-------|------|------|----------|
| 3.943 | 6.78 | 9.97 | 13.99 | 17.70 | 54.93 | 2.61 | 0.83 | 0.425 |

نمودارهای شکل ۳ این تابع‌ها را نشان می‌دهند.

جدول ۲ ضریب رابطه‌های دو جمله‌ای و توانی

Table 2 Coefficients of power and binomial relations

| Q (l/s) | a | B | m | N |
|---------|-------|---------|---------|-------|
| 8.510 | 1.160 | 23.930 | 23.270 | 1.779 |
| 10.060 | 1.178 | 34.337 | 38.419 | 1.878 |
| 12.410 | 1.138 | 51.084 | 54.537 | 1.910 |
| 14.150 | 1.114 | 66.052 | 61.624 | 1.885 |
| 15.720 | 1.220 | 83.775 | 92.197 | 1.952 |
| 17.920 | 1.324 | 105.940 | 98.649 | 1.904 |
| 18.660 | 1.328 | 116.430 | 109.620 | 1.914 |
| 19.370 | 1.339 | 131.740 | 137.670 | 1.955 |
| 19.920 | 1.382 | 143.530 | 149.250 | 1.955 |
| 20.620 | 1.397 | 154.190 | 163.310 | 1.964 |

لازم برداشت و ثبت شدند. بلندای پیزومتریک و عمق آب به صورت مستقیم برداشت شدند. مقدارهای گرادیان هیدرولیکی در برابر سرعت جریان برای هر یک از آزمایش‌ها رسم شده و ضریب‌ها رابطه‌ی دو جمله‌ای و رابطه‌ی توانی برای هر حالت محاسبه شد که نتایج آنها در شکل ۴ آورده شده‌اند.

ضریب‌های اشاره شده برای تمام دبی‌ها محاسبه شده و در جدول ۲ ارائه شده است. مقدار میانگین ضریب‌ها به ترتیب ۱/۲۶ و ۹۱/۶ به ترتیب برای a و b می‌باشند. با بررسی نتایج رابطه‌ی معناداری بین دبی و ضریب‌ها مشاهده شد که با مرتب کردن ضرایب و دبی‌ها و رسم آنها در برابر یکدیگر می‌توان یک تابع برای محاسبه‌ی هر یک از ضریب‌های a و b بر مبنای دبی استخراج کرد.

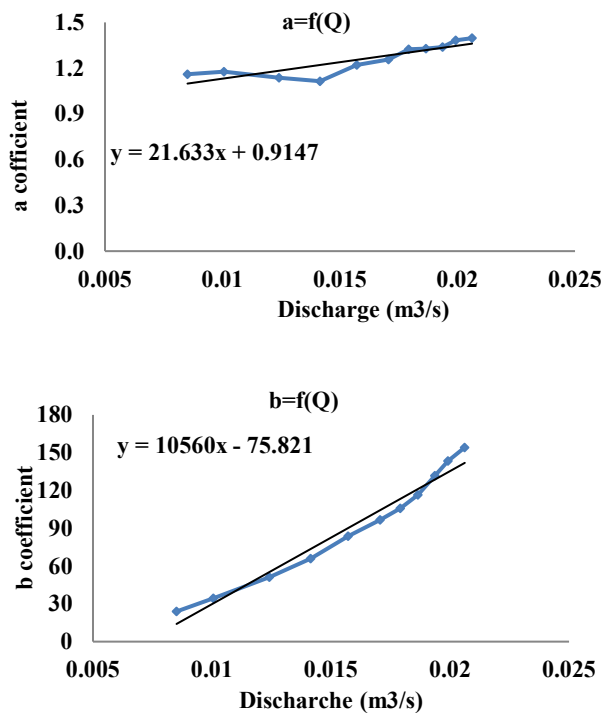


Fig 3 A and b coefficients functions based on discharge

شکل ۳ تابع ضریب‌های a و b بر مبنای دبی

مرحله‌های آزمایش فیلم‌برداری شده و سپس با استخراج عکس از آنها و استفاده از نرم‌افزارهای پردازش تصویر، مقدارهای عمق آب در هر لحظه با دقت زیاد ثبت شد. همچنین عمق آب در ورودی و خروجی محیط متخلخل نیز به صورت جداگانه برای در نظر گرفتن شرایط مرزی ثبت شد.

۳-۲- حالت ناماندگار

در بخش دوم آزمایش‌ها، جریان با هیدروگراف نشان داده شده در شکل ۵ از محیط متخلخل عبور داده شد. لازم به یادآوری است برای ایجاد جریان ناماندگار از یک اینورتر دیجیتالی با قابلیت گرفتن هیدروگراف مورد نظر از نرم افزار استفاده شده است. به منظور ثبت داده‌ها از همه

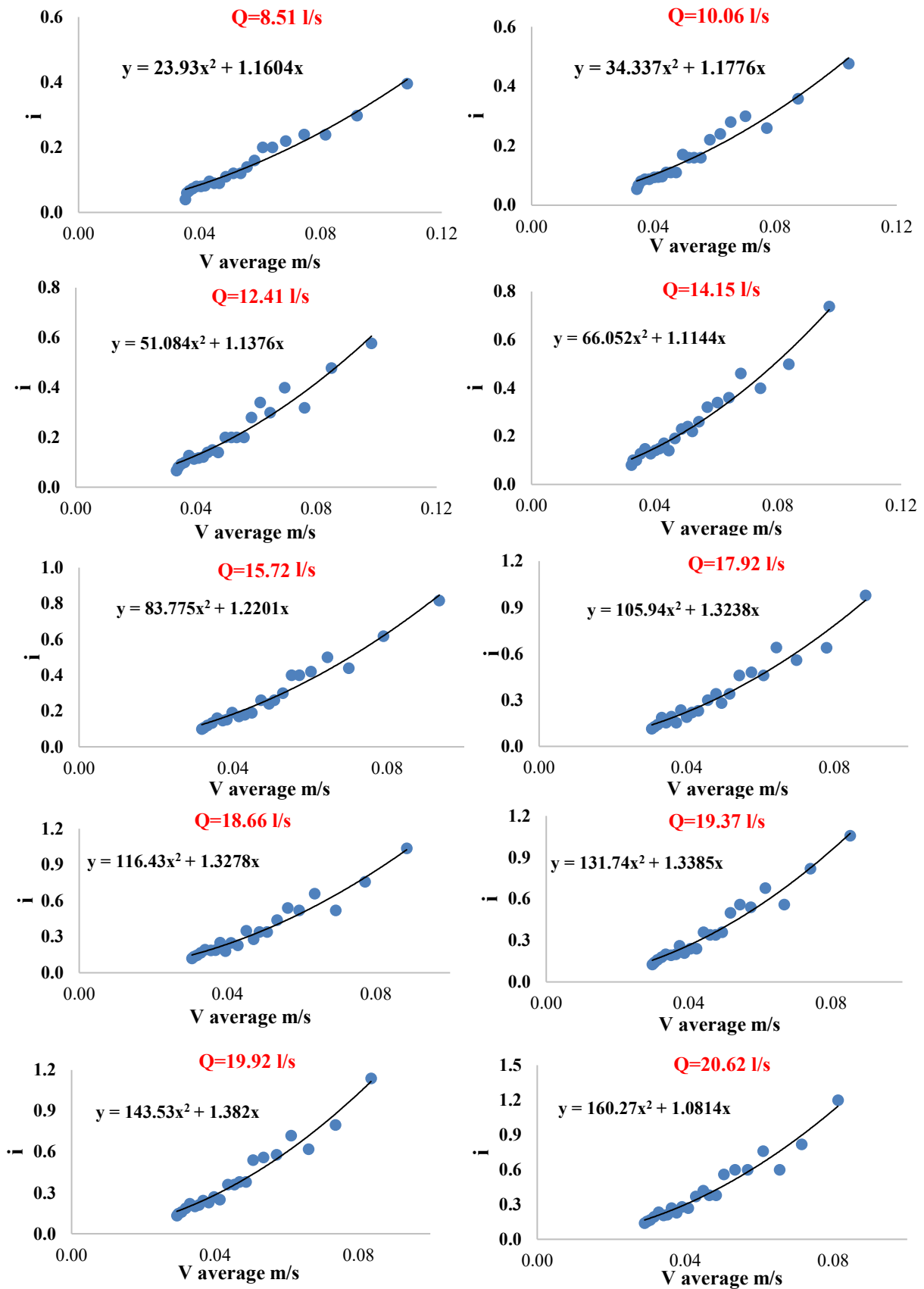


Fig. 4 Hydraulic gradient-velocity graphs for different discharges
 شکل ۴ نمودارهای گرادیان هیدرولیکی در برابر سرعت میانگین برای دبی‌های مختلف

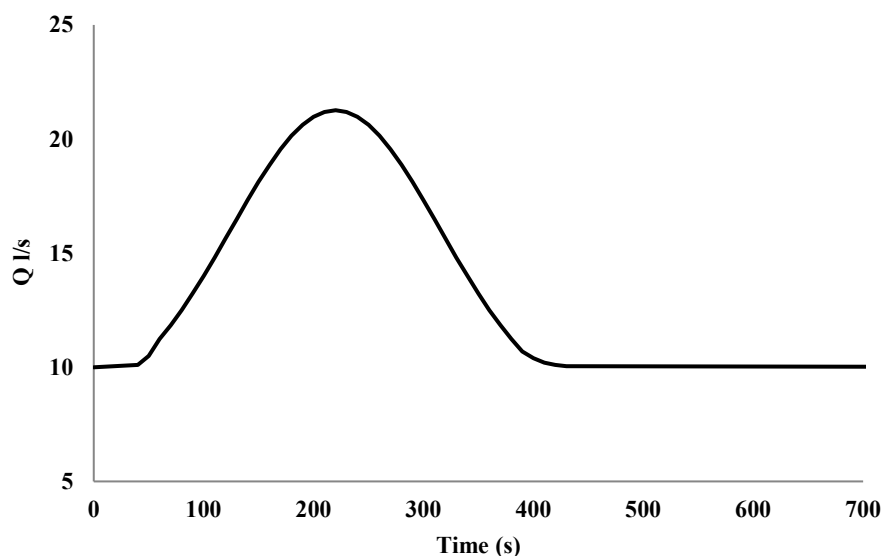


Fig. 5 Entrance hydrograph

شکل ۵ هیدروگراف ورودی

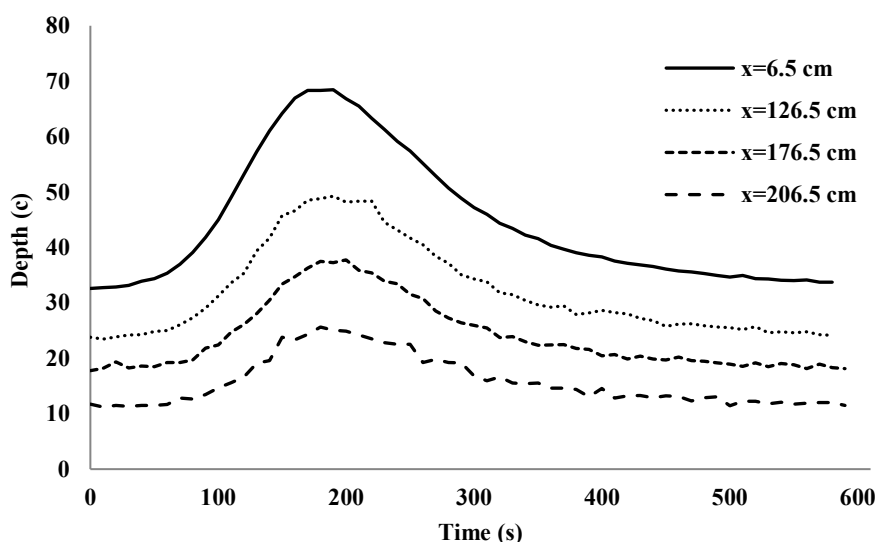


Fig. 6 Depth changes in different points of porous media within test time

شکل ۶ تغییرهای عمق در نقطه‌های مختلف محیط متخلخل در طی زمان آزمایش

باشد، از معادله‌های پیوستگی و اندازه حرکت استفاده می‌شود. در غیر این صورت معادله‌های پیوستگی و انرژی نتایج قابل قبولی به دست می‌دهد. سنت‌ونانت با لحاظ فرضیه‌هایی، شکل ساده‌تری از معادله‌های پیوستگی و اندازه حرکت را به دست آورد. معادله‌های دیفرانسیلی سنت‌ونانت را می‌توان برای جریان در کانال‌های باز به صورت زیر بیان کرد.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g(S_0 - S_f) \quad (3)$$

۴- حل عددی معادله‌های سنت و نانت

۴-۱- معادله‌های حاکم

استفاده از رابطه‌های سنت‌ونانت در تحلیل جریان از محیط‌های متخلخل در بین محققان بسیار رایج است. برای توصیف جریان در مجاری باز، همواره از سه رابطه‌ی اصلی پیوستگی، اندازه حرکت و انرژی استفاده می‌شود. چون متغیرهای اصلی جریان تنها عمق و سرعت یا عمق و دبی هستند، بنابراین دو معادله از سه معادله‌ی بالا برای تحلیل کفایت می‌کند. هنگامی تلفات انرژی نامشخص

بدیهی است که در حین انتگرال‌گیری از معادله‌های یاد شده مقدارهای S_f یا i و سرعت انتشار موج c در طول پاره‌خط‌های RP و SP ثابت در نظر گرفته شده‌اند که در واقع هر دو فراسنجه یادشده تغییر پیدا می‌کنند، لذا برای جلوگیری از خطای محاسباتی بایستی مقدارهای Δx و Δt اعدادی کوچکتری انتخاب شوند به عبارتی بایستی تحلیل حساسیت دقت پاسخ‌ها با مقدار Δx و Δt های مختلف بررسی شوند. با انتگرال‌گیری و برخی ساده‌سازی‌ها رابطه‌های لازم برای مقدارهای $V_r, C_r, y_r, V_r, C_r, y_r$ بر حسب مقدارهای V, y, C در نقطه‌های A, B و C به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$V_r = \frac{V_c - \frac{\Delta t}{\Delta x}(C_A V_C - C_C V_A)}{1 + (V_C - V_A + C_C - C_A) \frac{\Delta t}{\Delta x}} \quad (8)$$

$$C_r = \frac{C_C - V_r \frac{\Delta t}{\Delta x}(C_C - C_A)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}(C_C - C_A)} \quad (9)$$

$$y_r = y_C - \frac{\Delta t}{\Delta x}(V_r + C_r)(y_C - y_A) \quad (10)$$

$$V_s = \frac{V_c - \frac{\Delta t}{\Delta x}(C_B V_C - C_C V_B)}{1 + (V_C - V_B + C_C - C_B) \frac{\Delta t}{\Delta x}} \quad (11)$$

$$C_s = \frac{C_C - V_s \frac{\Delta t}{\Delta x}(C_C - C_B)}{1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}(C_C - C_B)} \quad (12)$$

$$y_s = y_C - \frac{\Delta t}{\Delta x}(V_s - C_s)(y_C - y_B) \quad (13)$$

$$V_p = \frac{1}{2}(V_r - V_s) + (C_r + C_s) - \frac{1}{2}g\Delta t(S_{fr} + S_{fs}) + g\Delta t S_0 \quad (14)$$

$$C_p = \frac{1}{4}(V_r - V_s) + \frac{1}{2}(C_r + C_s) + \frac{1}{4}g\Delta t(S_{fs} - S_{fr}) \quad (15)$$

$$y_p = \frac{C_p^2}{g} \quad (16)$$

رابطه‌های (۱۴) تا (۱۶) برای نقطه‌های میانی و حد فاصل شرایط مرزی بالادست و پایین‌دست به کار می‌روند. برای مرز بالادست رابطه (۱۷) به همراه شرط مرزی بالادست و برای پایین دست رابطه (۱۸) به همراه شرط مرزی پایین دست استفاده شوند.

$$y \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

که در این رابطه‌ها v سرعت جریان، y عمق جریان، S_0 شیب کف کانال، S_f شیب خط گرادیان انرژی، x مسافت در طول کانال، t زمان و g شتاب جاذبه ثقل می‌باشند. از جمله اصلی‌ترین پارامترها جهت تحلیل جریان ناماندگار، محاسبه مقدار شیب خط انرژی بوده که در جریان درون محیط‌های متخلخل به صورت رابطه‌ی (۵) نشان داده می‌شود.

$$S_f = \frac{d\left(h + z + \frac{V^2}{2gn^2}\right)}{dx} \quad (5)$$

که در آن: h : عمق جریان، z : ارتفاع کف لایه متخلخل از خط مبنا، V : سرعت ظاهری جریان، n : تخلخل محیط متخلخل و g : شتاب ثقل است. به دلیل کم بودن مقدار سرعت جریان درون محیط‌های متخلخل، مقدار بلندای سرعت در مقایسه با جمله‌های دیگر ناچیز بوده و می‌توان از آن صرف نظر کرد. در این حالت می‌توان شیب خط انرژی را معادل گرادیان هیدرولیکی در نظر گرفت.

۴-۲- معادله‌های مشخصه

روش‌های حل معادله‌های سنت‌ونانت را می‌توان در دو دسته کلی روش‌های عددی و روش‌های تقریبی گنجانده. در این پژوهش از روش صریح مشخصه‌ها که یکی از روش‌های عددی حل است، برای حل معادله‌های سنت‌ونانت استفاده شده است. چنانچه معادله‌های حاکم به دو جفت معادله دیفرانسل معمولی تبدیل شده و با استفاده از روش تفاضلات محدود حل می‌شوند. چنانچه منحنی‌های مشخصه را از یکی از نقطه‌های شبکه رسم کنیم، منحنی‌های یادشده از نقطه‌های شبکه مجاور عبور نمی‌کنند.

اساس این روش انتگرال‌گیری از معادله‌های سنت‌ونانت روی مشخصه‌هاست.

$$\int_R^P dV + \int_R^P \frac{g}{C} dy = g \int_R^P (S_0 - S_f) dt \quad (6)$$

$$\int_S^P dV - \int_S^P \frac{g}{C} dy = g \int_S^P (S_0 - S_f) dt \quad (7)$$

هر گام زمانی رابطه (۱۹) برقرار باشد.

$$dt \leq \left| \frac{dx}{V \pm c} \right| \quad (19)$$

که در این رابطه V سرعت جریان و $C = \sqrt{g\gamma}$ سرعت موج می‌باشند. معادله‌های سنت‌ونانت برای مسئله یک بار با استفاده از مقادیرهای متوسط ضریب‌های رابطه فورشه‌ایمر و بار دیگر با استفاده از تابع‌های این ضرایب حل شدند. با حل معادله‌ها مقادیر سرعت و عمق و در نتیجه دبی جریان در هر لحظه و در هر نقطه از محیط متخلخل محاسبه شد. جدول ۳ خطای دبی محاسبه‌شده را برای دو حالت حل نشان می‌دهد. در این جدول مقادیرهای کمینه و بیشینه هیدروگراف ورودی با مقادیرهای متناظر آن در هیدروگراف در نقطه ۶ سانتی‌متر مقایسه شده است. لازم به یادآوری است که نقطه ۶ سانتی‌متری نزدیکترین نقطه به ابتدای محیط متخلخل می‌باشد از این رو می‌توان مقادیرهای ثابت شده در این نقطه را معادل هیدروگراف ورودی قلمداد کرد.

$$(V_P - V_S) - 2(c_P - c_S) = g\Delta t(S_0 - S_{fS}) \quad (17)$$

$$(V_P - V_R) - 2(c_P - c_R) = g\Delta t(S_0 - S_{fR}) \quad (18)$$

۵- نتایج و بحث

عمق ورودی ثبت شده در جریان آزمایش به عنوان یکی از شروط مرزی بالادست استفاده شد. همچنین با توجه به هیدروگراف ورودی به محیط متخلخل می‌توان مقادیرهای سرعت در بالادست در هر لحظه را محاسبه نموده و به عنوان دیگر شرط مرزی بالادست در نظر گرفت. عمق خروجی جریان از محیط متخلخل نیز از جمله شرط‌های مرزی پایین‌دست لحاظ شده و از رابطه (۱۷) به عنوان دیگر شرط مرزی پایین‌دست بهره گرفته شد.

دیگر عامل اساسی حل عددی مقادیرهای بهینه dx و dt می‌باشد. در این پژوهش معادله‌ها با دامنه گسترده‌ای از این فراسنجه‌ها حل شد که در پایان مقادیرهای $dt=0.001$ s و $dx=0.01$ m به عنوان مقادیرهای بهینه مورد استفاده شد. همچنین شرط عدد کورانت از جمله عامل‌های اصلی کنترل‌کننده صحت محاسبه در هر لحظه ارزیابی شده است. بر این اساس dt باید به گونه‌ای انتخاب شود که در

جدول ۳ درصد خطای نسبی برای هیدروگراف محاسبه‌شده در دو حالت ضریب‌های ثابت و متغیر

Table 3 Relative error percent for computational hydrograph in both constant and varied coefficients

| | Entrance hydrograph | Computational hydrograph with fixed coefficients | Computational hydrograph with variable coefficients |
|--|---------------------|--|---|
| Maximum of discharge | 21.26 | 24.10 | 20.80 |
| Relative error percentage of the maximum discharge | - | 13.36 | 2.16 |
| Minimum of discharge | 10.00 | 7.80 | 9.90 |
| Relative error percentage of the minimum discharge | - | 22.00 | 1.00 |

می‌دهد) این در حالی است که مقدار متناظر برای حالت محاسبه با ضریب‌های متغیر تنها ۱ درصد می‌باشد. ملاحظه می‌شود استفاده از ضریب‌های متغیر رابطه فورشه‌ایمر به صورت تابع‌هایی از دبی می‌تواند مقادیرهای خطای نسبی را در نقطه اوج هیدروگراف تا ۱۱ درصد و در نقطه کمینه آن تا ۲۱ درصد کاهش دهد. از این رو در ادامه بررسی‌ها از نتایج به دست آمده از حل معادله‌های سنت‌ونانت با استفاده از مقادیرهای متغیر استفاده شده است. شکل ۷ مقادیرهای مختلف دبی در هر لحظه را برای برخی

بررسی مقدار خطاها نشان می‌دهد خطای دبی محاسبه‌شده بیشینه دبی (که در نقطه اوج هیدروگراف رخ داده) در حالت ضریب‌های فورشه‌ایمر ثابت ۱۳/۳۶ درصد می‌باشد که حدود ۳ لیتر بر ثانیه بیشتر از هیدروگراف واقعی است. این در حالی است که در هیدروگراف محاسبه‌شده با ضریب‌های متغیر دبی بیشینه تنها ۲/۱۶ درصد خطا دارد. این مهم در کمینه هیدروگراف نیز دارای اهمیت می‌باشد. به طوری که مقدار خطا در هیدروگراف محاسبه‌شده با ضریب‌های ثابت دارای ۲۲ درصد خطا است (کمینه هیدروگراف در آغاز رخ

بیشترین دبی اوج در نقطه $x=6$ سانتی‌متر و کمترین دبی اوج در $x=206$ سانتی‌متر رخ داده است. همچنین زمان رخداد بیشینه دبی در نخستین نقطه حدود ۲۰۰ ثانیه و در آخرین نقطه این مقدار در زمان حدود ۳۰۰ ثانیه رخ داده است.

از نقطه‌ها در حالت محاسبه با ضریب‌های متغیر نشان می‌دهد. همانطور که قابل انتظار بود بیشینه مقدار دبی در نقطه‌های پایین‌دست در زمان‌های جلوتری اتفاق می‌افتد و مقدار بیشینه دبی هر چه به نقطه‌های پایانی طول محیط متخلخل نزدیک می‌شویم کمتر می‌شود. به طوری که

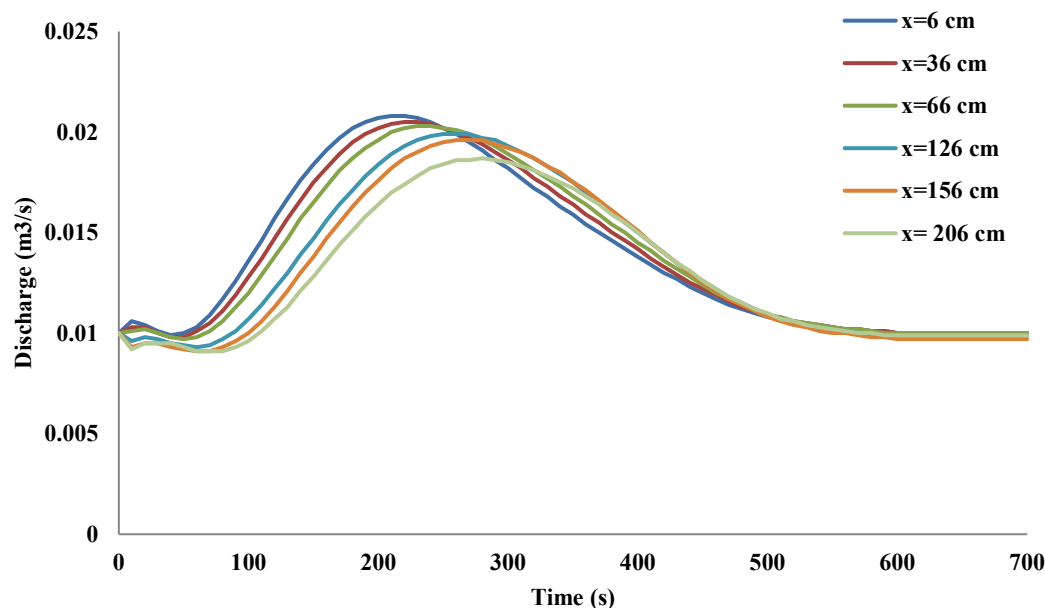


Fig. 7 Flow rates at any moment and at different points along the porous medium

شکل ۷ مقادیرهای دبی در هر لحظه و در نقطه‌های مختلف در طول محیط متخلخل

بیشترین سرعت و بیشترین زاویه ایجاد می‌شود و در نتیجه بیشترین اختلاف نیز رخ می‌دهد و همچنین در زمان مربوط به اوج هیدروگراف که حداکثر سرعت در آن رخ می‌دهد نیز شاهد بیشینه اختلاف دو نیمرخ مشاهده‌شدنی و محاسبه‌شدنی هستیم.

جدول ۴ مقدار درصد خطاهای نسبی را برای نیمرخ‌های مشاهده‌شدنی و محاسبه‌شدنی جریان در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که اشاره شد بیشینه خطا در بین همه زمان‌ها و همه نقطه‌ها در زمان ۴۰۰ ثانیه و در نقطه پایانی نیمرخ مشاهده می‌شود. جدول ۵ نیز مقادیرهای میانگین درصد خطاهای نسبی را نشان می‌دهد که معادل ۴/۸۸، ۳/۹۰، ۸/۰۵، ۱۳/۲۰، ۸/۴۶ و ۹/۹۳ درصد، و به ترتیب برای زمان‌های ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ و ۶۰۰ ثانیه می‌باشند.

به منظور کنترل صحت عملکرد محاسبه‌های صورت گرفته عمق محاسبه‌شدنی و عمق مشاهده‌شدنی با یکدیگر مقایسه شده‌اند. تصویرهای شکل ۸ نیمرخ سطح آب را در دو حالت مشاهده‌شدنی و محاسبه‌شدنی برای ۶ زمان ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ ثانیه نشان می‌دهند. همان‌طور که دیده می‌شود همواره نیمرخ محاسبه‌شدنی مقداری پایین‌تر از نیمرخ مشاهده‌شدنی می‌باشد که اختلاف این دو نیمرخ در زمان اوج هیدروگراف به بیشینه خود رسیده و سپس با فروکش کردن دبی دوباره اختلاف کم می‌شود. همچنین از دیدگاه دیگر می‌توان بیان داشت که در یک لحظه هر چه به انتهای محیط متخلخل نزدیک‌تر می‌شویم این میزان اختلاف بیشتر می‌شود. در واقع اختلاف نیمرخ‌های مشاهده‌شدنی و محاسبه‌شدنی با سرعت و زاویه خطوط جریان نسبت مستقیم دارد به طوری که در انتهای نیمرخ (در طول محیط متخلخل)

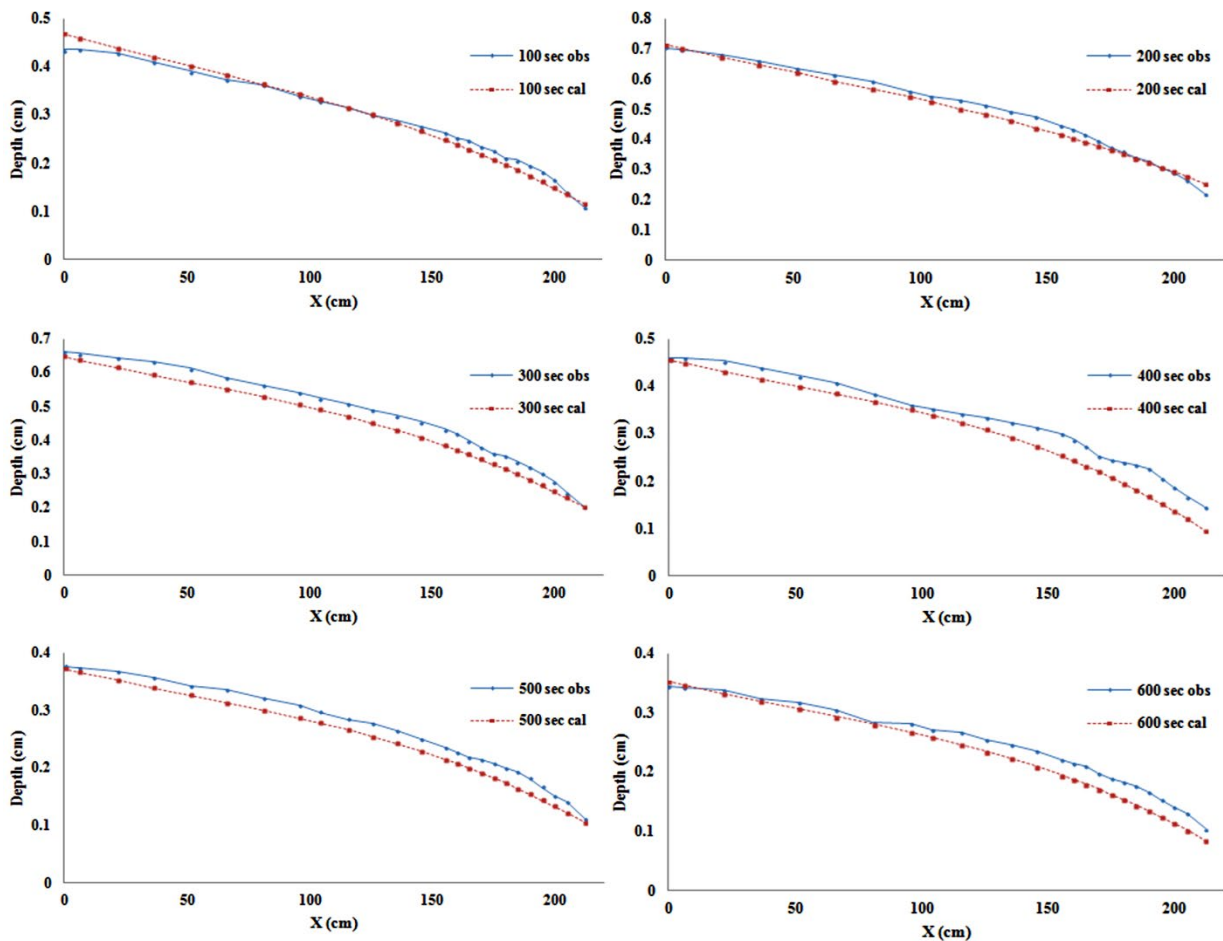


Fig. 8 Observational and computational flow profiles at different times

شکل ۸ نیمرخ‌های مشاهده‌شده‌ی و محاسبه‌شده‌ی جریان در زمان‌های مختلف

جدول ۴ میانگین درصد خطاهای نسبی برای زمان‌های مختلف

Table 4 Average percentage of relative error for different times

| Time (s) | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 |
|-----------------|------|------|------|-------|------|------|
| average error % | 4.88 | 3.90 | 8.05 | 13.20 | 8.46 | 9.93 |

انجام شد، مشخصه‌های جریان ثبت شد. در ادامه به منظور محاسبه‌شده‌ی عددی، از حل معادله‌های سنتونانت با استفاده از روش مشخصه‌ها استفاده شد. بررسی نتایج به شرح زیر به دست آمد:

۱- دبی محاسبه‌شده‌ی در نخستین نقطه محیط متخلخل ($x=6$ cm) به عنوان دبی ورودی به محیط در نظر گرفته شد. نتایج حل عددی در دو حالت ضریب‌های ثابت و متغیر نشان می‌دهند که درصد خطای نسبی محاسبه‌شده‌ی در دبی ورودی بیشینه برای حالت ضریب‌های ثابت ۱۳/۳۶ و در حالت ضریب‌های متغیر ۲/۱۶ درصد و در دبی ورودی کمینه برای حالت ثابت ۲۲

۶- نتیجه گیری

در این پژوهش به طور گسترده‌ای به بررسی آزمایشگاهی و عددی ویژگی‌های جریان در محیط متخلخل پرداخته شد. در بخش نخست آزمایش‌ها در حالت ماندگار با ۱۰ دبی (دبی ۸/۵۱ تا ۲۰/۶۲ لیتر بر ثانیه) صورت گرفته و مشخصه‌های جریان ثبت شد. بر این مبنا منحنی‌های سرعت میانگین در برابر گرادیان هیدرولیکی رسم شده و مقدار ضریب‌های رابطه‌ی فورشه‌ایمر برای هر یک از دبی‌ها به دست آمد. سپس با برآزش ضریب‌های a و b و دبی تابع‌هایی برای محاسبه‌ی این دو ضریب بر مبنای دبی ایجاد شد. در بخش دوم آزمایش‌ها که به صورت ناماندگار

(2009). Two-dimensional numerical models for overland flow simulations. In: River Basin Management V; WIT Press, Southampton, UK, 137-148.

Delestre, O. & James, F. (2008) Simulation of rainfall events and overland flow. In: Proceedings of the X International Conference Zaragoza-Pau on Applied Mathematics and Statistics, Jaca, Spain, 35, 125-135.

Elsanoose, A., Abobaker, E., Khan, F., Rahman, M.A., Aborig, A. & Butt, S.D. (2022). Characterization of a Non-Darcy Flow and Development of New Correlation of Non-Darcy Coefficient. *Energies*. 15, 7616, <https://doi.org/10.3390/en15207616>.

Engelund, F. (1953). On the laminar and turbulent flows of ground water through homogeneous sand. *Akad. for de Tekniske Videnskaber, Danmark*.

Ergun, S. (1952). Fluid flow through packed columns. *Chemical Engineering Progress*, 48(2), 88-94.

Ersoy, M., Lakkis, O. & Townsend, P. (2021). A Saint-Venant Model for Overland Flows with Precipitation and Recharge. *Mathematical and Computational Applications*, 26(1), 1, <https://doi.org/10.3390/mca26010001>.

Fiedler, F.R. & Ramirez, J.A. (2000). A numerical method for simulating discontinuous shallow flow over an infiltrating surface. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 32, 219-239.

Hager, W.H., Castro-Orgaz, O. & Hutter, K. (2019). Corresponding between De Saint-Venant and Boussinesq. 1: Birth of the Shallow Water Equation. *Computes Rendus Mecanique*, 347, 632-662.

Hansen, D., Garga, V.K. & Townsend, D.R. (1995). Selection and application of a one-dimensional non-Darcy flow equation for two dimensional flow through rockfill embankment. *Can. Geotech. J.*, 33, 223-232.

Hosseini, S.M. & Joy, D.M. (2007). Development of an unsteady model for flow through coarse heterogeneous porous media applicable to valley fills. *International Journal of River Basin Management*, 5(4), 253-265.

Lenc, A., Zeighami, F. & Di Fendevico, V. (2022). Effective Forchhymer Coefficient for Layered Porous Media. *Transport in Porous Media*, 144, 459-480.

Li, J. & Chen, C. (2020). Numerical Simulation of

و در حالت ضریب‌های متغیر ۱ درصد می‌باشد. با توجه به اختلاف زیاد خطاها، تابع‌های ضریب‌های فورشه‌ایمر برای حل معادله‌های سنت‌وانت استفاده شد.

۲- با حل معادله‌ها با ضریب‌های متغیر، هیدروگراف‌ها در نقطه‌های طول محیط متخلخل بررسی شدند. نتایج نشان می‌دهند بیشینه دبی هر چه در طول محیط متخلخل پیش می‌رویم مقدارهای کمتری می‌باشد و همچنین در زمان جلوتری رخ می‌دهد. به طوری که در نقطه ورودی اوج دبی ۲۰/۸ لیتر بر ثانیه و در زمان حدود ۲۰۰ ثانیه رخ داده است و در نقطه خروجی جریان اوج ۱۸ لیتر بر ثانیه در حدود ۳۰۰ ثانیه رخ داده است. در پایان پس از گذشت حدود ۶۰۰ ثانیه جریان مجدد به حالت ماندگار باز می‌گردد.

۳- مقدارهای عمق محاسبه‌شدنی در هر نقطه و در هر لحظه نیز مورد ارزیابی قرار گرفتند و با توجه به ثبت این مقدارها در آزمایشگاه امکان محاسبه‌ی مقدار خطاها وجود دارد. با بررسی‌های به عمل آمده مشخص شد متوسط خطای محاسبه‌شدنی عمق در زمان‌های ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰ ثانیه به ترتیب برابر ۴/۸۸، ۳/۹، ۸/۰۵، ۱۳/۲، ۸/۴۶ و ۹/۹۳ درصد می‌باشد. مشاهده می‌شود بیشترین خطای محاسبه‌شدنی در ۴۰۰ ثانیه رخ داده است و می‌توان گفت زمانی است که بیشترین سرعت را شامل می‌شود. همچنین تقریباً در همه نیمرخ‌های محاسبه‌شدنی عمق محاسبه‌شدنی کمتر از عمق مشاهده‌شدنی می‌باشد و از طرفی دیگر بیشینه خطا در هر یک از نیمرخ‌ها نیز در نقاط پایانی محیط متخلخل که سرعت دارای بیشترین مقدار و بیشترین زاویه است، رخ داده است.

۷- منابع‌ها

Ahmed, N. & Sunada, D.K. (1969). Nonlinear flow in porous media. *Journal of the Hydraulics Division*, 95(6), 1847-1858.

Cea, L. & Bladé, E. (2015). A simple and efficient unstructured finite volume scheme for solving the shallow water equations in overland flow applications. *Water Resour. Res.*, 51, 5464-5486.

Costabile, P., Costanzo, C. & Macchione, F.

- Stephenson, D.J. (1979) *Rockfill in Hydraulic Engineering*. Elsevier scientific publishing company, Distributors for the United States and Canada.
- Ward, J.C. (1964). Turbulent flow in porous media. *Journal of the Hydraulics Division*, 90(5), 1–12.
- Yang, B., Yang, T., Xu, Z., Liu, H., Shi, W. & Yang, X. (2018). Numerical Simulation of the Free Surface and Water Inflow of a Slope, Considering the Nonlinear Flow Properties of Gravel Layers: a Case Study. *R. Soc. Open SCI*, 5(2), 172109, <https://doi.org/10.1098/rsos.172109>.
- the Non-Darcy Based on Random Fractal Micronetwork Model for Low Permeability Sandstone Gas Reservoir. *Geofluids*, 2020, Article ID 8884885, <https://doi.org/10.1155/2020/8884885>.
- Norouzi, H., Bazargan, J., Taheri, S. & Karimipour, A. (2023). Investigation of unsteady non-Darcy flow through rockfill material using Saint–Venant equations and particle swarm optimization (PSO) algorithm. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, 37, 3657-3673.
- Sidiropoulou, M.G., Moutsopoulos, K.N. & Tsihrintzis, V.A. (2007). Determination of Forchheimer equation coefficients a and b. *Hydrological Processes*, 21(4), 534–554.