Iranian Hydraulic Association
Journal of Hydraulics

Research Article
https://doi.org/

A second order well-balanced and entropy consistent numerical scheme for one-dimensional shallow water equations

Majid Akbari[1], Bahareh Pirzadeh[2*]

1. PhD Student, Water and Hydraulic Structures Engineering, Department of Civil Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran
2. Associate Professor, Department of Civil Engineering, University of Sistan and Baluchestan, Zahedan, Iran

Abstract

Introduction: The shallow water equations are a set of hyperbolic balance laws that describe the behavior of water flow in shallow regions such as rivers, lakes, and oceans. Solving hyperbolic balance laws poses significant challenges due to the presence of non-conservative terms, shocks and discontinuities. Analytical solutions are limited to simplified cases, so numerical methods are often used to solve these equations. Numerical schemes that solve the balance laws must ensure the well-balanced property (Bermudez and Vázquez 1994), meaning the discretized numerical fluxes must exactly balance by the approximated source terms. These types of numerical schemes use upwind/flux splitting techniques to handle wave propagation and discontinuities. Such well-balanced approaches work well for supercritical or subcritical regions but are known to struggle when Riemann problem includes both (LeFloch and Thanh 2011), (specifically in trans-critical flows and hydraulic jumps). To address this, various treatments, such as entropy fixes, shock fitting techniques and etc., have been proposed. Notably, Akbari and Pirzadeh (2022) introduced a set of shockwave fixes to cure the numerical slowly moving shock anomaly. Their proposed approach has the advantage of accurately capturing the hydraulic jump. However, such scheme is only first-order accurate, as higher-order schemes continue to advance, it becomes necessary to extend such technique to more accurate high-resolution schemes.

Methodology: A second order well balanced numerical scheme are designed for the shallow water equations using a semi-discrete MUSCL reconstruction. The first step in the semi-discrete finite volume method is to discretize the governing equations in space. For the one-dimensional shallow water equations, this involves dividing the computational domain into a set of control volumes and approximating the integral form of the conservation equations over each control volume. By considering the fluxes at the control volume interfaces and accounting for the source terms, a system of ordinary differential equations (ODEs) can be obtained. To ensure accurate and stable solutions, a second-order finite volume approach is employed for spatial discretization. The proposed approach is intended to exactly preserve all steady states of shallow water equations retaining the second order of accuracy. To achieve this, we extend a recently developed fully well-balanced scheme, called HLL-MSF, to higher-order of accuracy. To extend the first-order HLL-MSF scheme to second order with the same well-balanced property of the first order one, a MUSCL reconstruction approach with a suitable weighted technique is proposed. The weighted approach allows the numerical scheme to return to the first order scheme with shockwave fixes at hydraulic jumps or at trans-critical points. Appropriate flux limiters are also introduced to ensure the well-balanced property of

the numerical scheme in smooth steady state cases. The method's accuracy and stability are attributed to these carefully chosen flux limiters and weighted coefficients. The final step in the semi-discrete finite volume method involves time integration to advance the solution in time. In this paper, the third order explicit Runge-Kutta method is chosen as the time integration scheme. By combining the second-order finite volume spatial discretization and the third-order explicit Runge-Kutta time integration scheme, the proposed finite volume method ensures higher-order accuracy in both space and time.

Results and Discussion: To verify the well-balanced property and the second order of accuracy of the proposed numerical scheme several numerical examples and benchmarks contain in the literature including both steady and unsteady cases are presented. For numerical experiments that have analytical or reference solutions, numerical errors are obtained using L1 and L∞ norms. The first test case is devoted to the simulation of steady state at rest or the lake at rest situation. numerical errors show that the proposed scheme is exactly well-balanced in this case. The second test case is related to a smooth steady state of trans-critical flow over a bump. The proposed second order scheme is confirmed to capture the smooth steady state exactly (Table 1). We also conduct a trans-critical flow with hydraulic jump to see how the proposed scheme behaves when the solution contains a shock discontinuity. Unlike the traditional higher-order schemes which often use the pre-balanced shallow water formulation to achieve the exact conservation property on steady state cases at rest, the proposed second order scheme can capture both smooth and non-smooth (Hydraulic jump) parts exactly with no smears and oscillations (Table 1). A test case is also conducted to confirm the second order accuracy of the numerical scheme. Table 2. shows that the intended accuracy is clearly achieved. Finally, three numerical experiments are conducted in quasi-steady and unsteady conditions including slowly moving shocks over flat or discontinuous topography. The higher-order approximate solvers are known to achieve better accuracy for such flows than the first order counterparts.

Conclusion: In this paper a second order well-balanced numerical schemes are developed for the solution of one-dimensional shallow water equations. The approach is able to model different regimes of the flow accurately. The advantage of the proposed scheme over existing higher-order schemes is the fully well-balanced and entropy satisfying properties in which all steady states solutions are exactly preserved.

Keywords: Higher-order scheme, Shallow Water Equations, Steady States, Post-shock Oscillations, Hydraulic Jump.

انجمن هیدرولیک ایران
نشریه هیدرولیک

مقاله پژوهشی
https://doi.org/

ارائه یک روش عددی با دقت مرتبه دو کاملا متعادل و سازگار با شرایط آنتروپی برای دستگاه یک بعدی آب کم عمق

مجید اکبری[1]، بهاره پیرزاده[2*]

۱- دانشجو دکتری مهندسی آب و سازه های هیدرولیکی، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، ایران
۲- دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده مهندسی شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

چکیده: در این پژوهش، یک روش عددی با دقت مرتبه دو برای حل معادله‌های یک بعدی آب کم عمق با وجود جملات چشمه ناشی از تغییرات بستر توسعه داده شده است. برای حل عددی این معادله‌ها حفظ وضعیت های دائمی جریان بدور از نوسانات غیرفیزیکی اهمیت اساسی دارد چرا که بیشتر شبیه‌سازی های کاربردی از معادله‌های آب کم عمق شامل اغتشاش های جزئی از این وضعیت های دائمی هستند. در سال‌های اخیر تکنیک های متعدی برای حفظ جریان های دائمی پیشنهاد شده است. با این حال اکثر این روش‌ها قادر به حفظ تمام وضعیت دائمی نیستند و روش هایی هم که چنین ویژگی دارند حداکثر از مرتبه یک دقت می باشند. در این مقاله یک روش مرتبه دو که قادر به حفظ تمام وضعیت های دائمی است توسعه داده شد. آزمایش های متنوعی برای صحت سنجی روش پیشنهادی در شبیه سازی جریان های دائمی انجام شد. نتایج عددی نشان داد که روش عددی پیشنهادی قادر به حفظ تمام وضعیت های دائمی جریان است. روش مرتبه دو پیشنهادی همچنین از دقت بهتری به نسبت حل‌گرهای تخمینی مرتبه یک برای شبیه سازی جریان های شبه دائمی و غیر دائمی برخوردار می‌باشد.

کلیدواژگان: روش مراتب بالای دقت، معادله آب کم عمق، وضعیت های دائمی، نوسانات پسا شوک، پرش هیدرولیکی.

۱- مقدمه

دستگاه یک بعدی آب کم عمق یا همان سینت ونانت (Saint-Venant 1871) از دسته معادله‌های هذلولی قوانین پایستگی جرم و مومنتم است که برای مدل سازی جریان رودخانه ها، کانال ها، دریاچه ها و مخازن بکار می رود. کاربرد این معادله‌ها بطور مخصوص در مدل‌کردن جریان های متغیر سریع مانند پهنه بندی سیلاب ناشی از شکست سد (Valiani, Caleffi et al. 2002) و موج ناشی از سونامی (Sánchez-Linares, de la Asunción et al. 2015) در سواحل اقیانوس هاست. از آنجا که معادله‌های آب کم عمق حل تحلیلی فرم بسته ندارد اغلب از روش های عددی مانند روش‌های مبتنی بر شبکه اختلاف محدود و حجم محدود (Eslamloueyan and Amiri 2020) و یا روش‌های بدون شبکه مانند روش هیدرودینامیک ذرات هموار، تابع شعاعی (Mosavi Nezhad and Makouei 2021) برای حل آن‌ها استفاده می شود.

دستگاه های دیفرانسیل جزیی هذلولی دارای راه حل های پیوسته و ناپیوسته هستند. دستگاه هذلولی آب کم‌عمق همچنین یک دستگاه غیر همگن بدلیل وجود جملات چشمه است. جملات چشمه می تواند ناشی از نیروهای اصطحکاکی بستر، نیروی کوریولس و یا ناشی از تغییرات شیب بستر باشند. دستگاه‌های غیر همگن داری نوع خاصی از راه‌حل های دائمی هستند که در آن گرادیان شار با جملات چشمه در تعادل قرار می‌گیرد. حل وضعیت های دائمی از اهمیت بالایی بر خوردار است چرا که شبیه سازی-های مربوط به جریان آب کم عمق اغلب شامل اغتشاش‌های جزئی از این وضعیت های دائمی (جریان های شبه-دائمی) اند. حل چنین وضعیت هایی به‌طور عددی چندان ساده نیست و روش های که نتوانند به دقت چنین تعادلی را برقرار کنند ممکن است منجر به نوسانات غیر فیزیکی قابل توجهی در شبیه سازی جریان دائمی و شبه دائمی شوند. بزرگی این نوسانات اغلب رابطه مستقیمی با سایز شبکه گسسته سازی شده دارد و با ریز کردن شبکه مورد استفاده می توان این نوسانات را کاهش داد. با این حال ریز کردن شبکه گسسته شده برای شبیه‌سازی های گسترده نمی‌تواند

راه حل مناسبی تلقی گردد. با تعریف ارائه شده توسط Bermudez and Vázquez (۱۹۹۴) روش‌های عددی که جریان دائمی سکون آب (با دبی صفر) را مستقل از شبکه گسسته سازی حفظ کنند دارای مشخصه پایستگی هستند. تاکنون روش های گوناگونی برای حفظ مشخصه پایستگی توسعه داده شده است که از جمله می‌توان به بازسازی هیدرواستایکی (Audusse, Bouchut et al. 2004) و روش پیش توازن (Rogers, Borthwick et al. 2003) جملات چشمه اشاره کرد.

هرچند جنین تکنیک‌هایی می توانند جریان سکون آب را حفظ کنند اغلب، قابلیت حفظ دیگر وضعیت های دائمی جریان شامل جریان های دائمی با دبی غیر صفر، مانند جریان های گذاری بحرانی (با و بدون پرش هیدرولیکی) را ندارند. در سال های اخیر روش‌های متعادل عددی برای حفظ انرژی نیز توسعه داده شده‌اند که قابلیت حل دقیق جریان های دائمی پیوسته را دارند (Murillo and García-Navarro 2013). ایده اصلی این روش‌ها بر حفظ پایستگی توامان جرم و انرژی در مناطق پیوسته جریان است. با این حال تحقیقات کمتری در زمینه جریان های دائمی با وجود ناپیوستگی ها (پرش هیدرولیکی) انجام شده است. اغلب حل ناپیوستگی‌ها با روش های معمول حجم محدود همراه با اتلاف عددی بالا و یا نوسانات غیر فیزیکی است. بزرگی این نوسانات غیر فیزیکی معمولا با ریزکردن شبکه نیز از بین نمی روند.

روش‌های عددی حجم محدود شامل حل‌گرهای تقریبی ریمان اغلب برای شبیه سازی جریان های زیر بحرانی و فوق بحرانی دقت مطلوبی دارند. با این حال این روش ها وقتی که جریان های انتقالی (گذرای بحرانی از حالت زیر بحرانی به فوق بحرانی) و یا وقتی جریان های سریع تدریجی فوق بحرانی که به علت یک مانع به پرش هیدرولیکی ختم می‌شوند را مدل می کنند از دقت کمی برخوردار بوده و حتی ممکن است با نوسانات غیرفیزیکی و یا ناپایداری کامل حل همراه باشند. برای بهبود حل جریان های انتقالی تکنیک های گوناگونی توصیه شده که به تکنیک های اصلاح آنتروپی (Harten and Hyman 1983) مشهورند. از دیگر نقیصه ها موجود در حل می‌توان به نوسانات غیر فیزیکی روی پرش هیدرولیکی اشاره کرد که از آن‌ها به نوسانات پسا شوک نیز (Arora and Roe 1997) یاد می شود.

تاکنون روش‌های متنوعی برای کاهش نوسانات پسا شوک پیشنهاد شده است (Arora and Roe 1997, Zaide and Roe 2012). توسعه اغلب این تدابیر برای معادله‌های همگن هذلولی بوده است. در سال های اخیر تحقیقاتی در این زمینه برای معادله های غیر همگن نیز انجام شده است. از جمله این تحقیقات می توان به Navas-Montilla and Murillo (۲۰۱۹) و Akbari and Pirzadeh (۲۰۲۲) اشاره کرد. Navas-Montilla and Murillo (۲۰۱۹) با استفاده از خطی سازی رو در محل پرش نوسانات غیر فیزیکی پسا شوک با وجود بستر را به‌طور قابل توجهی کاهش داده‌اند با این حال این تکنیک تنها برای حل‌گر مرتبه یک رو قابل اعمال بوده و همچنین این نوع خطی سازی نمی‌تواند جریان دائمی بروی بستر با وجود پرش هیدرولیکی را دقیقا حل کند. Akbari and Pirzadeh (۲۰۲۲) دو دسته اصلاح موج شوک کند رونده و ایستا مجزا ارائه دادند. ایده این تکنیک باز تولید صحیح سرعت و بزرگی موج شوک درون معادله تعادل مومنتم بود. در این روش نه تنها نوسانات پسا شوک به طور قابل ملاحظه ای کاهش یافت بلکه با این شیوه از خطی سازی در وضعیت دائمی، حل دقیق پرش هیدرولیکی ایستا قابل دستیابی بوده است. گذشته از آن، این تکنیک قابل اعمال بروی حل‌گرهای مختلف مرتبه یک ریمان نیز می باشد. هرچند که این روش‌ها نیز از مرتبه یک دقت بوده است و برای جریان‌های شبه دائمی از دقت پایینی به نسبت روش‌های مرتبه بالا بر خوردار می باشند.

واضح است که برای حل دستگاه‌ها و معادله‌های هذلولی نیازمند روش های تسخیر شوک بالاسوی هستیم. مبنای طرح‌های بالاسوی رویکرد گودونوف می باشد که در آن یک مساله ریمان در مرز سلولی حل می شود (Toro 2009). روش اصلی گودونوف نیازمند بدست آوردن حل مساله ریمان از طریق تکرار است. وجود تکرار در حل‌گرهای دقیق ریمان هزینه محاسباتی را به میزان قابل توجهی افزایش می دهد. این حجم از محاسبات معمولا برای دستگاه های بزرگ و پیچیده توجیه پذیر نیست. در مقابل روش های تخمینی غیر تکرار ریمان نتایجی قابل قبول در سطح اهداف عددی تولید می نمایند. با این حال بعضی از این روش های تخمینی هرچند بسیار ساده هستند از دقت کافی برای یک

حل مطلوب برخوردار نمی باشند. در رویکرد گودونوف مقادیر درون سلولی به صورت یکنواخت در نظر گرفته می-شوند. چنین روشی نوعی بازسازی داده‌ها به شیوه بالاسوی با دقت مرتبه یک است. van Leer (۱۹۷۹) رویکرد گودونوف را با در نظر گرفتن مقادیر درون سلولی به صورت خطی به جای استفاده از حالت یکنواخت (ثابت) به رویکرد با مراتب بالای دقت پیشنهادی خود با نام MUSCL توسعه داد. از آن‌جایی که حل‌گرهای دقیق ریمان نیازمند صرف هزینه و زمان قابل توجهی هستند حل‌گرهای تخمینی با رویکرد MUSCL می توانند جایگزین مناسبی برای رسیدن به دقت های بالاتر باشند. رویکرد MUSCL با حل‌گرهای تقریبی از نظر محاسباتی نه تنها ارزان بلکه کارایی بهتری دارند. به عنوان مثال حل‌گر های مرتبه بالای دقت برای شبیه سازی پهنه های گسترده که نیاز به نقاط کمتر گسسته سازی برای کاهش هزینه محاسباتی دارند از بازده بهتری برخوردارند. با این حال روش‌های با مراتب دقت بالا نمی‌توانند راه حلی بدور از نوسان را در تمام نقاط شبیه سازی تضمین نمایند. یکی از راه‌های متداول برای برطرف کردن این مشکل استفاده از روش‌های ترکیبی است که در آن حل‌گرهای تخمینی مختلفی با هم ترکیب می شوند تا دقت مورد نظر حاصل گردد. در شبیه سازی یک میدان جریان معمولا بیشتر نقاط حل مساله از قسمت های پیوسته تشکیل می شوند. با این حال گرادیان های شدید نزدیک موج های شوک شکل می گیرند. در این نقاط است که اغلب حل‌گرهای تخمینی ساده می توانند نتایج بسیار ضعیفی داشته و در مقابل حل‌گرهای با مراتب بالای دقت ممکن است باعث نوسانات غیر فیزیکی و در نتیجه ناپایداری کامل روش عددی گردند. ایده اصلی روش های ترکیبی استفاده از حل‌گرهای تخمینی ساده تر با دقت کم (با دقت مرتبه یک) در مناطق ناپیوسته جریان و حل‌گرهای با دقت بیشتر در دیگر نقاط است. یکی از این رویکردهای ترکیبی نام آشنا برای حفظ پایداری روش‌های با مراتب بالای دقت رویکرد نام آشنای TVD است. در رویکرد کاهش تغییرات کل یا به اختصار TVD ارائه شده توسط Harten (۱۹۸۳) ناپیوستگی ها با برگشت به مرتبه یک دقت در محل گرادیان های شدید بدور از نوسانات غیرفیزیکی حل می‌شوند. این رویکرد در نتیجه اجازه می دهد در قسمت های پیوسته حل از مراتب بالای دقت استفاده شود تا مشخصات جریان را به‌توان با جزییات بیشتری حل نمود. در مقابل برای جلوگیری از نوسانات غیر فیزیکی در نزدیکی گرادیان های بزرگ از روش های تخمینی ریمان مرتبه یک استفاده می گردد.

از آن‌جا که تحقیقات کمتری در زمینه روش‌های با مراتب بالای دقت که قادر به حفظ تمام وضعیت های دائمی جریان باشند انجام شده است، در این پژوهش یک روش عددی مرتبه دو دقت برای معادله‌های غیر همگن آب کم عمق با استفاده از بازسازی داده های MUSCL توسعه داده شده-است. روش پیشنهادی در این تحقیق به غیر از حفظ مرتبه دو دقت دارای سه ویژگی افزوده شده زیر می باشد:

۱. حفظ وضعیت‌های دائمی در نواحی پیوسته جریان
۲. حفظ وضعیت‌های دائمی در نواحی ناپیوسته جریان (پرش هیدرولیکی)
۳. کاهش نوسان‌های پسا شوک در جریان غیر دائمی

در نهایت برای صحت سنجی روش عددی پیشنهادی چندین آزمایش در وضعیت جریان‌های دائمی و غیر دائمی انجام شده است. تست‌های عددی نشان از بهبود چشمگیر حل مسائل همراه با بستر متغیر برای این روش دارد. همچنین برای روش پیشنهادی متغیرهای پایستار مساله شامل دبی و سطح آزاد آب جریان بر روی بستر متغیر با و یا بدون وجود موج شوک ایستا (پرش هیدرولیکی) کاملاً پایستار باقی می‌ماند که اغلب حفظ چنین ویژگی برای روش های عددی با مراتب بالای دقت دشوار گزارش‌شده است. روش کار و نتایج در ادامه مقاله ذکر میشوند.

۲- معادله‌های حاکم

معادله‌های آب کم عمق یا همان سنت ونانت (Saint-Venant 1871) رفتار آب در یک کانال یک بعدی برروی بستر نامسطح را توصیف می‌کنند. با صرف‌نظر از اصطکاک بستر دستگاه یک بعدی آب کم عمق را می‌توان به فرم فشرده (قوانین تعادل جرم و مومنتم) زیر نوشت.

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x}=\mathbf{S} \qquad (1)$$

که در آن، $\mathbf{U}$ بردار متغیر های پایستار، $\mathbf{F}$ بردار شار و $\mathbf{S}$ بردار جملات چشمه به دلیل تغییرات بستر است که هر یک به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند.

$$\mathbf{U}=(h,q)^T,\quad \mathbf{F}(\mathbf{U})=\left(q,\frac{q^2}{h}+\frac{1}{2}gh^2\right)^T,$$

$$\mathbf{S}=\left(0,-gh\frac{\partial z}{\partial x}\right)^T \qquad (2)$$

در روابط بالا $h(x,t)\geq 0$ ارتفاع غیر منفی سطح آزاد آب و $q(x,t)$ دبی میانگینی جریان است. g شتاب گرانشی ناشی از زمین و $z(x)$ نیز تابع توپوگرافی به دلیل تغییرات بستر است. برای تحلیل مشخصات، دستگاه (۱) را همچنین می توان به فرم شبه خطی زیر بازنویسی کرد

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\mathbf{J}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x}=0 \qquad (3)$$

که در آن، $\mathbf{J}$ ماتریس ژاکوبی دستگاه است. مقادیر ویژه ماتریس ضرایب که با علامت λ مشخص می‌شود ریشه چند جمله ای مشخصه زیر است.

$$p(\lambda)=|\mathbf{J}-\lambda\mathbf{I}|=0 \qquad (4)$$

ریشه های این چند جمله ای شامل سه مقدار ویژه از قرار زیر می باشد.

$$\lambda^1=u-c,\quad \lambda^2=u+c \qquad (5)$$

که در آن، متغیر u اشاره به سرعت میانگینی (اینرسی) دارد به صورتی که داشته باشیم $q=uh$ و c نیز سرعت فازی (صوت) ناشی از گرانش است که برابر $c=\sqrt{gh}$ می‌باشد. هنگامی که سرعت ناشی از اینرسی کمتر از سرعت ناشی از گرانش باشد جریان زیر بحرانی است، هرزمان مساوی بود بحرانی و هرزمان بیشتر شد جریان را فوق بحرانی می نامند. این سه وضعیت جریان را معمولا با عدد بی‌بعد فرود نشان می دهند.

$$Fr=\frac{u}{\sqrt{gh}} \qquad (6)$$

۱-۲- حالت دائمی جریان

دستگاه (۱) همچنین دارای حل‌های مستقل از زمان دائمی است که با صفر گذاشتن جمله های دیفرانسیل زمانی قابل محاسبه اند.

$$\frac{d\mathbf{F}(\mathbf{U})}{dx}=\mathbf{S} \qquad (7)$$

در حالت کلی می‌توان حل پیوسته جریان دائمی (۷) را از طریق پایستگی جرم و انرژی بدست آورد.

$$q\equiv \text{cts},\qquad E:=\frac{q^2}{2h^2}+g(h+z)\equiv \text{cts} \qquad (8)$$

که در آن، E انرژی مکانیکی مخصوص است. به ازای $q=0$ در رابطه (۸) شرایط دائمی جریان سکون آب را داریم. دستگاه (۱) حل‌های ناپیوسته را نیز در خود قبول می کند که نیازمند تعریف حل ضعیف (Toro 2009) از طریق فرم انتگرالی و نه دیفرانسیلی قوانین تعادل است.

۳- روش عددی

در این پژوهش، روش عددی حجم محدود برای حل قوانین تعادل جرم و مومنتم (۱) توسعه داده شد. برای این منظور ابتدا دامنه مکانی درون سلول های $I=[x_{i-1/2},x_{i+1/2}]$ با ابعاد یکسان Δx گسسته سازی گردید. فرم نیمه گسسته حجم محدود حاصل را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=-\frac{1}{\Delta x}\left(\mathbf{F}_{i+1/2}-\mathbf{F}_{i-1/2}+\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}\mathbf{S}(x)dx\right) \qquad (9)$$

روش نیمه گسسته (9) نیازمند تعیین شار عددی و محاسبه انتگرال جملات چشمه است. با انتگرال‌گیری از (۷) بروی $[x_i,x_{i+1}]$ برای حفظ تمام وضعیت های دائمی جریان (۸) در سطح گسسته سازی می بایست تساوی زیر برقرار باشد:

$$\mathbf{F}_{i+1}-\mathbf{F}_i=\int_{x_i}^{x_{i+1}}\mathbf{S}(x)dx \qquad (10)$$

رابطه (۱۰) نشان‌دهنده تعادل بین تغییرات شار و انتگرال جملات چشمه در دو سلول مجاور است. می‌توان رابطه (۱۰) را همچنین به صورت زیر ساده سازی نمود:

$$\delta\mathbf{F}-\int_{x_i}^{x_{i+1}}\mathbf{S}(x)dx=\mathbf{H}_{i+1/2}=0 \qquad (11)$$

که در آن، $\delta(\cdot)=(\cdot)_{i+1}-(\cdot)_i$ و $\mathbf{H}_{i+1/2}$ نیز برداری شامل تغییرات شار عددی و انتگرال جملات چشمه است. فرم کوپل بدست آمده منجر به رابطه جدیدی برای شار عددی افزون یافته با جملات چشمه در فرم کلی زیر می‌شود:

$$\mathbf{F}^{\pm}=\mathbf{F}^{\pm}\left(\mathbf{F}_{i+1},\mathbf{F}_i,\int_{x_i}^{x_{i+1}}\mathbf{S}(x)dx\right) \qquad (12)$$

با جایگزینی شار جدید در روش نیمه گسسته (۹) خواهیم داشت:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=-\frac{1}{\Delta x}\left(\mathbf{F}^-_{i+1/2}-\mathbf{F}^+_{i-1/2}\right) \qquad (13)$$

۳-۱- شار عددی HLL

در این تحقیق از نوعی از حل‌گر بالاسوی HLL برای محاسبه بردار شار عددی استفاده می‌شود (Harten, Lax et al. 1983). شار عددی HLL مساله ریمان را به سه وضعیت ثابت که با دو موج از هم جدا می شوند تبدیل می‌نماید. بنابراین این روش برای مسائل با ساختار دو موج نتایج عددی مناسبی ارائه می‌دهد. از آن‌جا که شار عددی HLL برای دستگاه های همگن ارائه شده است نیازمند

اصلاح این شار عددی برای حل مسائل با وجود یک موج سوم به دلیل جملات چشمه هستیم. با توجه به پیشنهاد Akbari and Pirzadeh (۲۰۲۲) برای حل قوانین تعادل (۱) شار عددی اصلاح شده به صورت زیر است:

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{-}=\mathbf{F}_i+\lambda^{-}\left(\mathbf{U}^{hll-\sigma}-\boldsymbol{\sigma}\mathbf{U}_i\right),$$
$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{+}=\mathbf{F}_{i+1}-\lambda^{+}\left(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{U}_{i+1}-\mathbf{U}^{hll-\sigma}\right) \qquad (14)$$

که در آن، $\mathbf{U}^{hll-\sigma}$ وضعیت میانی HLL برای دستگاه غیر همگن و $\boldsymbol{\sigma}$ بردار اصلاح بزرگی پرش است که به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\mathbf{U}^{hll-\sigma}=\boldsymbol{\sigma}\frac{\lambda^{+}\mathbf{U}_{i+1}-\lambda^{-}\mathbf{U}_i}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}-\frac{\mathbf{H}_{i+1/2}}{\lambda^{+}-\lambda^{-}} \qquad (15)$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\left(\sigma^h,1\right),\quad \sigma^h=1+\frac{g\tilde{h}\delta z}{\tilde{q}^2\delta\left(\frac{1}{h}\right)+g\tilde{h}\delta h} \qquad (16)$$

مقدار محدود کننده شار σ^h همیشه بین صفر و یک در نظر گرفته می‌شود. همچنین برای جلوگیری از خطای نقاط بحرانی از اصلاح آنتروپی پیشنهادی زیر استفاده می شود.

اگر $p_i(\lambda)<0,\ \ p_{i+1}(\lambda)>0,\ \&\ \ q>0$

$$\sigma_{i+1/2}^h=\max(\sigma_{i+1/2}^h,\sigma_{i+3/2}^h) \qquad (17)$$

در غیر اینصورت

$$\sigma_{i+1/2}^h=\sigma_{i+1/2}^h \qquad (18)$$

به همین ترتیب برای دبی منفی هم اصلاح مشابهی قابل انجام است. با توجه به پیشنهاد Einfeldt (۱۹۸۸) سرعت های تخمینی نیز از طریق زیر قابل محاسبه اند:

$$\lambda^{+}=\max(0,u_i+c_i,u_{i+1}+c_{i+1})$$
$$\lambda^{-}=\min(0,u_i-c_i,u_{i+1}-c_{i+1}) \qquad (19)$$

۳-۲- جملات چشمه

برای ارضا (۸) در نواحی پیوسته جریان باید انرژی مکانیکی پایستار باقی بماند. با توجه به پیشنهاد Navas-Montilla and Murillo (۲۰۱۵) برای تخمین جملات چشمه به وسیله برقراری تعادل انرژی می‌توان به جای یک رابطه خطی از یک رابطه وزنی به صورت زیر:

$$S=\int_{x_i}^{x_{i+1}}S(x)dx=(1-W_s)S^L+W_sS^R \qquad (20)$$

برای محاسبه انتگرال جملات چشمه بهره برد. که در آن S^R و S^L مقدار جمله چشمه در کران بالا و پایین (راست و چپ) دامنه محاسباتی $[i+1,i]$ است که به ترتیب به صورت زیر تعریف می شوند:

$$S^R=-gh_{i+1}\delta z,\quad S^L=-gh_i\delta z \qquad (21)$$

و سپس با استفاده از رابطه پیوستگی جرم انرژی و مومنتم (۸) ضریب وزنی را به صورت زیر محاسبه میشود:

$$W_s=\frac{\bar{q}^2\delta\left(\frac{1}{h}\right)-\bar{h}\bar{q}^2\delta\left(\frac{1}{2h^2}\right)+\bar{S}-S^L}{S^R-S^L} \qquad (22)$$

از آنجا که پایستگی انرژی در محل پرش هیدرولیکی (ناپیوستگی ها) مجاز نیست (انرژی بروی پرش پایسته نمی ماند بلکه اتلاف میشود) به جای استفاده از (۲۲) با پیشنهاد Akbari and Pirzadeh (۲۰۲۲) اگر $a_{i+1/2}<0,\ a_{i-1/2}>0,\ \&\ \ h_i<h_{i+1}$ یا $a_{i+3/2}<0,\ a_{i+1/2}>0,\ \&\ \ h_i<h_{i+1}$ بود مقدار ضریب وزنی جملات چشمه را برابر $W_s=0.5$ گذاشت. که در آن $a_{i+1/2}$ برابر زیر است:

$$a_{i+1/2}=\mathrm{sgn}\left(\det\left(\mathbf{J}\right)\big|_{i+1/2}\right) \qquad (23)$$

به این ترتیب، در محل پرش هیدرولیکی از حالت خطی جملات چشمه و در نواحی پیوسته جریان از فرم تعادلی انرژی-مومنتم آن استفاده میشود.

۳-۵-تکنیک عددی اصلاح موج شوک

۳-۵-۱- اصلاح عددی موج شوک کند رونده

در این پژوهش و زمانیکه موج شوک غیر ایستا است، از تکنیک پیشنهاد شده Akbari and Pirzadeh (۲۰۲۲) استفاده شده‌است. بر اساس این تکنیک، برای کاهش نوسانات غیر فیریکی پسا شوک بزرگی موج های بالاسو باید صفر شوند. معادله مومنتم با استفاده از اصلاح موج شوک غیر ایستا به فرم زیر قابل بازنویسی می باشد:

$$H_2^{MF}=\frac{q_{i+1}^2}{\dot{h}_{i+1}}-\frac{q_i^2}{\dot{h}_i}+\frac{g\left(\dot{h}_{i+1}^2-\dot{h}_i^2\right)}{2}-S^{MF} \qquad (24)$$

برای تخمین انتگرال جملات چشمه نیز به جای h_i در رابطه (۲۰) از $\dot{h}_i$ استفاده شد، که در آن $\dot{(\cdot)}_i$ برابر تابع زیر است:

اگر $\hat{a}_{i+1/2}<0$ و $\hat{a}_{i-1/2}>0$

$$\dot{(\cdot)}_i=\begin{cases}(\cdot)_{i-1} & \text{if} \quad \theta_{R,L}=-1\\ (\cdot)_{i+1} & \text{if} \quad \theta_{R,L}=+1\end{cases} \qquad (25)$$

در غیر اینصورت

$$\dot{(\cdot)}_i=(\cdot)_i \qquad (26)$$

که در آن

$$\hat{a}_{i+1/2} = \max\left(a_{i-1/2}, \min\left(\theta_{i+1,i},\ a_{i+1/2} \right) \right) \qquad (27)$$

در رابطه (۲۵) همچنین θ علامت سرعت موج است که به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\theta_{R,L} = \mathrm{sgn}\left(-\det\left(d\mathbf{F}/d\mathbf{U} - d\mathbf{S}/d\mathbf{U} \right)\Big|_{i+1,i-1} \right) = \mathrm{sgn}\left(\frac{\tilde{q}^2}{h_R h_L} - g\frac{1}{2}\left(h_R + h_L\right)\left(1 + \frac{Z_R - Z_L}{h_R - h_L}\right) \right) \qquad (28)$$

۳-۵-۱- اصلاح عددی موج شوک ایستا

در حالت موج شوک ایستا می بایست سرعت موج بر روی پرش صفر باشد. برای حفظ این شرط نیز از تکنیک پیشنهادی Akbari and Pirzadeh (۲۰۲۲) استفاده شد. بنابراین در وضعیت شوک ایستا اصلاح یک طرفه زیر بکار گرفته می شود:

$$H_2^{SF} = \frac{q_{i+1}^2}{h_{i+1}^L} - \frac{q_i^2}{h_i^R} + \frac{g\left(\left(h_{i+1}^L\right)^2 - \left(h_i^R\right)^2\right)}{2} - S^{SF} \qquad (29)$$

که در آن، $(\cdot)_i^R$ و $(\cdot)_i^R$ اصلاح یک طرفه به صورت زیر تعریف می گردد:

اگر $\hat{a}_{i+1/2} < 0$ و $\hat{a}_{i-1/2} > 0$

$$(\cdot)_i^R = \begin{cases} (\cdot)_i & \text{if} \quad \theta_{R,L} = -1 \\ (\cdot)_{i+1} & \text{if} \quad \theta_{R,L} = +1 \end{cases} \qquad (30)$$

$$(\cdot)_i^L = \begin{cases} (\cdot)_{i-1} & \text{if} \quad \theta_{R,L} = -1 \\ (\cdot)_i & \text{if} \quad \theta_{R,L} = +1 \end{cases} \qquad (31)$$

در غیر اینصورت

$$(\cdot)_i^R = (\cdot)_i^L = (\cdot)_i \qquad (32)$$

همچنین S^{SF} اصلاح انتگرال جمله چشمه (۲۰) است که در آن از $\delta z = \left(z^R - z^L\right)$ استفاده می شود. بالانویس SF هم مخفف اصلاح موج شوک ایستاست.

۳-۸- تکنیک وزنی اصلاح موج شوک

برای برخورد با شرایط مختلف موج شوک نیز، از تکنیک وزنی پیشنهاد شده توسط Akbari and Pirzadeh (۲۰۲۲) که به صورت زیر تعریف می‌شود استفاده شد:

$$H_2^{MSF} = wH_2^{MF} + (1-w)H_2^{SF} = M \qquad (33)$$

که در آن

$$M = \frac{q_-^2}{\dot{h}_{i+1}} - \frac{q_+^2}{\dot{h}_i} + \frac{g\left(\dot{h}_{i+1}^2 - \dot{h}_i^2\right)}{2} - S^{SF} \qquad (34)$$

که در آن، q_- از طریق شرایط پرش یعنی پیوستگی جرم و مومنتم برابر است با:

$$q_- = q_i \frac{\dot{h}_{i+1}}{\dot{h}_i} - \dot{h}_{i+1} \sqrt{\left(\frac{g\delta\left(\dot{h}\right) + 2S^{MF}}{2\dot{h}_{i+1}\dot{h}_i} \right)\delta\left(\dot{h}\right)} \qquad (35)$$

q_+ نیز به همین ترتیب برای جریان منفی قابل محاسبه است. با اصلاح معادله تعادل مومنتم می بایست محدود کننده (۱۶) هم بر همین اساس محاسبه شود. این تکنیک یک رابطه خطی وزنی بین (۲۴) و (۲۹) ایجاد می‌کند که هنگامی که سرعت موج غیر صفر است ضریب وزنی به مقدار 1 و هر زمان سرعت موج به صفر نزدیک شود به مقدار 0 تقلیل میابد. بنابراین شرایط مختلف موج با وجود بزرگی و سرعت های مختلف به بطور مناسب اصلاح می‌گردند.

۳-۹- توسعه روش مرتبه دو دقت MUSCL-HANCOOK برای قوانین تعادل جرم و مومنتم

روش MUSCL-Hancock که توسط van Leer (۱۹۷۹) ارائه شد، شناخته شده ترین نوع بازسازی MUSCL است که از دقت مرتبه دو برخوردار می‌باشد.. برای این منظور مقدار ثابت در هر سلول $I_i = \left[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}\right]$ با یک تخمین خطی چند ضابطه ای با توجه به مختصات محلی در کران چپ $x_{i-1/2}$ و راست $x_{i+1/2}$ این سلول، به صورت زیر جایگزین می شود:

$$\mathbf{U}_i^L = \mathbf{U}_i - \frac{1}{2}\Delta_i, \quad \mathbf{U}_i^R = \mathbf{U}_i + \frac{1}{2}\Delta_i \qquad (36)$$

این نوع از بازسازی داده‌ها مرتبه دو دقت در مکان را تولید می نماید. در گام دوم برای جلوگیری از ایجاد نوسانات غیر فیزیکی در نزدیک گرادیان های بزرگ از یک روش محدود کننده شیب (گرادیان) TVD استفاده می‌گردد. یکی از محبوب‌ترین این محدود کننده‌ها، محدود کننده minmod است (LeVeque 2002). این محدود کننده قادر است با حفظ مرتبه دو دقت یک حل TVD (بدور از نوسانات غیرفیزیکی) ارائه دهد. بردار شیب minmod برابر با:

$$\Delta_i = \mathrm{minmod}\left(\frac{\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{i-1}}{\Delta x}, \frac{\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i}{\Delta x} \right) \qquad (37)$$

است که در آن تابع minmod به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathrm{minmod}\left(a,b\right) =$$

$$\begin{cases} a & \text{if} \quad |a|<|b| \quad \& \quad ab>0 \\ b & \text{if} \quad |b|<|a| \quad \& \quad ab>0 \\ 0 & \text{if} \quad ab\le 0 \end{cases} \tag{38}$$

بعد از انتخاب یک محدود کننده مطلوب، حل‌گر تقریبی با مرتبه دو دقت MUSCL-Hancock در فرم نیمه گسسته زیر بدست می آید.

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=-\frac{1}{\Delta x}\left(\mathbf{F}^{-}\left(\mathbf{U}_i^R,\mathbf{U}_{i+1}^L\right)-\mathbf{F}^{+}\left(\mathbf{U}_{i-1}^R,\mathbf{U}_i^L\right)\right) \tag{39}$$

از آنجا که رویکرد MUSCL-Hancock ابتدا برای گسسته سازی معادله‌ها و دستگاه های قوانین پایستگی هذلولی (دستگاه های همگن) پیشنهاد شده، این شیوه از بازسازی متغییرهای پایستار نمی‌تواند تعادل بین جملات شار و جملات چشمه را برای معادلات قوانین تعادل (دستگاه های ناهمگن) از جمله معادلات غیر همگن آب کم عمق حفظ نماید. از این رو برای حفظ تعادل دقیق میان جملات شار و چشمه در حل کلی جریان دائمی پیشنهاد می‌شود به جای (۳۶) از فرم باسازی داده‌ای زیر برای متغیر های پایستار و بستر استفاده گردد:

$$h_i^L=h_i-\frac{1}{2}\Delta_i^h,\quad h_i^R=h_i+\frac{1}{2}\Delta_i^h \tag{40}$$

که در آن Δ_i^h محدود کننده شیب متغیر سطح آزاد پیشنهادی است که به صورت زیر تعریف میگردد.

$$\Delta_i^h=\text{minmod}\left(\frac{\sigma_{i-1/2}^h\delta h_{i-1/2}}{\Delta x},\frac{\sigma_{i+1/2}^h\delta h_{i+1/2}}{\Delta x}\right) \tag{41}$$

در رابطه بالا $\sigma_{i+1/2}^h$ برابر (۱۶) است. مقدار محدود کننده-های شار σ^h نباید از صفر کمتر و از یک بیشتر باشد. همچنین برای در نظر گرفتن حالت جریان دائمی با وجود پرش هیدرولیکی و جلوگیری از نوسانات پسا شوک در نزدیکی این نواحی پیشنهاد می‌شود از تکنیک وزنی زیر به جای فرم نیمه گسسته (۳۹) استفاده گردد:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=-\frac{1}{\Delta x}\Big[(1-w)\left(\mathbf{F}^{-}\left(\mathbf{U}_i,\mathbf{U}_{i+1}\right)-\mathbf{F}^{+}\left(\mathbf{U}_{i-1},\mathbf{U}_i\right)\right)$$
$$+w\left(\mathbf{F}^{-}\left(\mathbf{U}_i^R,\mathbf{U}_{i+1}^L\right)-\mathbf{F}^{+}\left(\mathbf{U}_{i-1}^R,\mathbf{U}_i^L\right)\right)\Big] \tag{42}$$

که در آن، w ضریب وزنی است که بین مرتبه دقت یک و دو در هنگام وجود ناپیوستگی (پرش هیدرولیکی) سوئیچ می کند. این ضریب وزنی به صورت زیر تعریف می شود:

$$w=\begin{cases} 0 & \text{if} \quad a_{i+1/2}a_{i-1/2}<0 \text{ or } a_{i+3/2}a_{i+1/2}<0 \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{43}$$

این شیوه بازسازی داده‌ها اجازه می‌دهد چنان چه جریان به وضعیت جریان دائمی رسید روش مرتبه دو دقت MUSCL نیز به حل‌گر تخمینی HLL-MSF تقلیل یابد چرا که حل‌گر تخمینی HLL-MSF برای تمام حالت‌های جریان دائمی دقیق بوده و می‌تواند شرایط تعادلی جریان را کاملا حفظ نماید. با این تفسیر ویژگی های روش مرتبه دو دقت پیشنهادی در این تحقیق حفظ شرایط تعادلی و سازگاری با شرایط آنتروپی برای وضعیت های دائمی حاصل حل دستگاه ناهمگن (۱) است.

۳-۱۰- گسسته سازی زمان

برای گسسته سازی زمانی در اینجا از روش رانگ کوتا مرتبه سوم استفاده شد. اگر فرض شود گسسته‌سازی مکانی برابر $L(\mathbf{U},t)$ باشد، یعنی:

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt}=L(\mathbf{U},t) \tag{44}$$

گسسته‌سازی زمانی از طریق رانگ کوتا مرتبه سوم به صورت زیر تعریف میشود:

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{(1)}=\mathbf{U}^n+\Delta tL\left(\mathbf{U}^n\right) \\ \mathbf{U}^{(2)}=\frac{3}{4}\mathbf{U}^n+\frac{3}{4}\mathbf{U}^{(1)}+\Delta tL\left(\mathbf{U}^{(1)}\right) \\ \mathbf{U}^{(n+1)}=\frac{1}{3}\mathbf{U}^n+\frac{2}{3}\mathbf{U}^{(1)}+\frac{2}{3}\Delta tL\left(\mathbf{U}^{(2)}\right) \end{cases} \tag{45}$$

۴- نتایج عددی

در این قسمت یک سری آزمایش‌ها برای برآورد کارایی روش عددی مرتبه دو پیشنهاد شده در حل دستگاه معادله های آب کم عمق تحت جریان‌های مختلف دائمی و غیر دائمی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای محاسبه خطا نتایج عددی مطالعه حال حاضر از نرم خطاها L^1 و L^∞ به‌صورت زیر استفاده می شود:

$$L^1=\sum_{j=1}^{N}\left|w_j-\hat{w}_j^n\right|\Delta x \tag{46}$$

$$L^\infty=\max\left|w_j-\hat{w}_j^n\right|\Delta x \tag{47}$$

که در آن، w_j و $\hat{w}_j^n$ به ترتیب مقادیر نقطه‌ای تحلیلی و عددی در گام زمانی n هستند که برای دستگاه آب کم عمق می‌تواند نماینده متغیر سطح آزاد آب یا دبی جریان باشند. همچنین با توجه به شرط پایداری کورانت (Courant, Friedrichs et al. 1967) گام زمانی Δt محاسبه می شود. در تمام آزمایش های عددی حال حاضر عدد کورانت برابر 0.4 است. مقایسه‌ها بین روش عددی پیشنهادی MUSCL-MSF و روش MUSCL-PB که با تکنیک

پیش توازن (PB) بطور عمده برای حل دستگاه آب‌کم عمق در تحقیقات استفاده می‌شود انجام شده است (Rogers, Borthwick et al. 2003, Lu and Xie 2016).

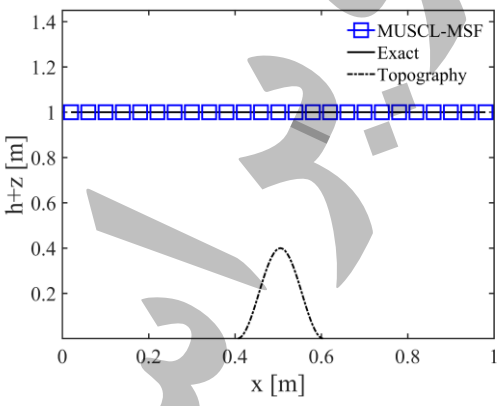

Fig. 1 Steady state at rest: comparison of analytical and numerical solution

شکل ۱ جریان دائمی سکون آب: مقایسه نتایج عددی با حل دقیق برای سطح آزاد

جدول ۱ خطای عددی برای جریان دائمی در نرم های L^1 و L^∞

¶Table 1 L^1 and L^∞ errors for steady state cases

		L^1		L^∞	
		h	q	h	q
جریان سکون آب	MUSCL-MSF	4.523e-12	8.171e-14	5.735e-14	4.522e-15
	MUSCL-PB	2.473e-11	7.421e-13	8.710e-14	6.721e-15
جریان گذرا بحرانی	MUSCL-MSF	1.168e-10	3.533e-12	1.168e-10	3.511e-15
	MUSCL-PB	0.0015	0.0028	0.0010	0.0027
جریان گذرا بحرانی با پرش هیدرولیکی	MUSCL-MSF	4.501e-9	1.250e-14	5.871e-10	4.201e-15
	MUSCL-PB	0.0045	0.0068	0.0013	0.0031

۴-۱- جریان دائمی

۴-۱-۱- جریان سکون آب

آزمایش عددی اول به شبیه سازی جریان دائمی در حال سکون یا به اصطلاح مساله دریاچه در حال سکون اختصاص دارد. شرایط اولیه سکون آب در دامنه ای به طول [0 1] به صورت زیر تعریف می گردد:

$$h(x,0)=1, \quad q(x,0)=0$$

شبیه سازی سکون آب بروی بستری با شیب پیوسته با تابع زیر انجام می‌شود:

$$z(x)=\begin{cases} 0.2\left(\cos\pi\left(\dfrac{x-\frac{1}{2}}{0.1}\right)+1\right) & \left|x-\dfrac{1}{2}\right|<0.1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

همچنین شرایط مرزی آزاد (نیومن با مقدار صفر) در دو سمت دامنه اعمال می گردد. دامنه درون 50 سلول گسسته شده و نتایج عددی حاصل تا زمان $t=5$ تانیه شبیه سازی می شود. در شکل ۱ نتایج عددی مساله سکون آب نشان داده شده است. همچنین خطای نرم L^1 و L^∞ در جدول ۱ گزارش شده‌اند. همان طور که از نتایج خطاها مشخص است خطا ها در محدوده گرد شده خطای ماشینی است بنابراین روش عددی قادر است خاصیت پایستگی به ازای جریان دائمی سکون آب را به دقت حفظ کند.

۴-۱-۲- جریان گذرا بحرانی بدون پرش هیدرولیکی

این آزمایش شامل یک جریان گذرای بحرانی بر روی یک بستر پیوسته است (LeVeque 1998). شرایط اولیه جریان در این حالت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h(x,0)=0.45, \quad q(x,0)=0$$

تابع بستر $z(x)$ این مساله نیز از قرار زیر است.

$$z(x)=\begin{cases} 0.2-0.05(x-10)^2 & \text{if} \quad 8\le x\le 12 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

برای تشکیل یک جریان گذرای بحرانی در مرز بالادست دبی $1.53\ m^2/s$ اعمال می گردد. در مرز پایین دست نیز شرایط مرزی آزاد فرض می شود. دامنه محاسباتی درون 100 سلول گسسته می شود و شبیه سازی تا رسیدن به جریان دائمی ادامه می آید. نتایج حاصل در شکل ۲ و خطاها در جدول ۱ گرد آوری شده است. با توجه به نتایج عددی بدست آمده روش حال حاضر قادر به محاسبه دقیق جریان دائمی گذرا بروی بستر پیوسته است. در صورتی روش عددی MUSCL-PB در حالت پیش بالاس (pre-balanced) نمی تواند چنین جریانی را بطور دقیق حل نماید.

۴-۱-۳- جریان گذرا بحرانی با یک پرش هیدرولیکی

شرایط این آزمایش عددی مشابه آزمایش قبلی است (LeVeque 1998). برای تشکیل یک پرش هیدرولیکی در روی بستر یک ارتفاع آزاد ثابت آب به مقدار 0.33 m در مرز پایین دست و دبی $0.18\ m^2/s$ در مرز بالادست اعمال می شود.

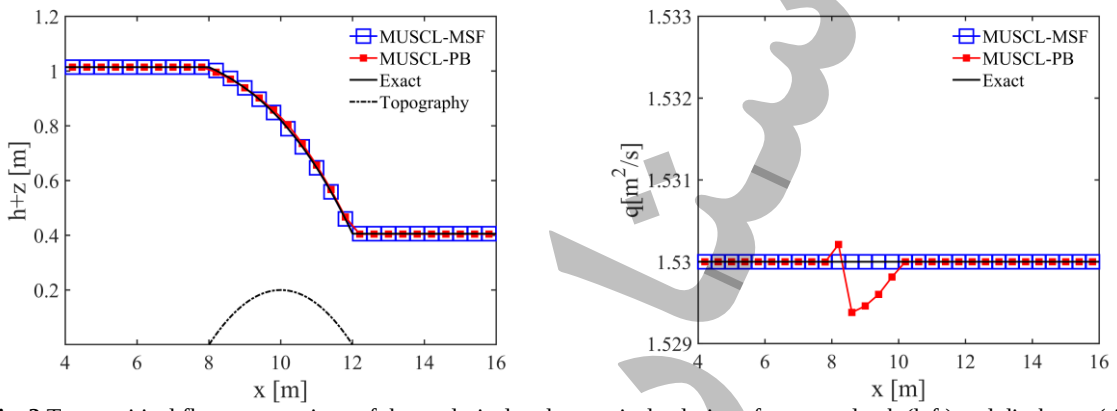

Fig. 2 Trans-critical flow: comparison of the analytical and numerical solutions for water depth (left) and discharge (right)

شکل ۲ جریان گذرای بحرانی: مقایسه نتایج عددی با حل دقیق برای سطح آزاد آب (سمت چپ) و دبی جریان (سمت راست)

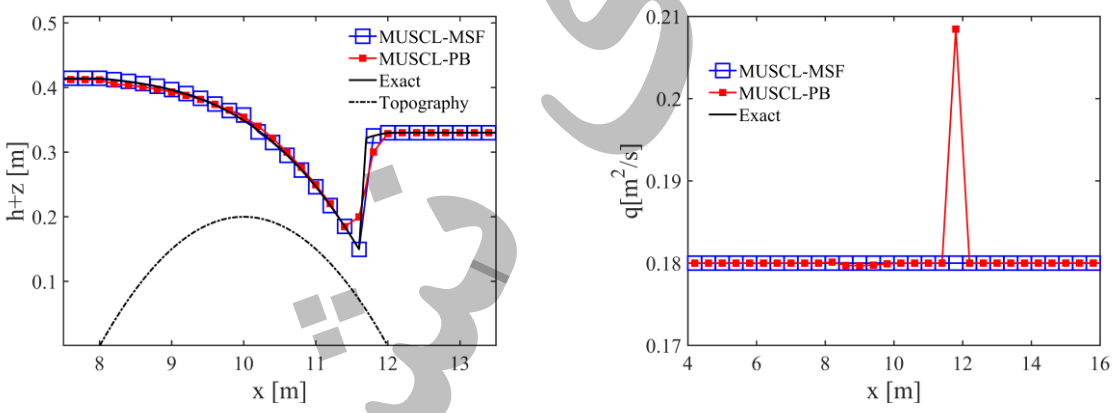

Fig. 3 Trans-critical flow with a hydraulic jump: comparison of the analytical and numerical solutions for water depth (left) and discharge (right)

شکل ۳ جریان گذرای بحرانی با پرش هیدرولیکی: مقایسه نتایج عددی با حل دقیق برای سطح آزاد آب (چپ) و دبی جریان (راست)

نتیجه یک جریان گذرای بحرانی با پرش هیدرولیکی در مکان x=11.65 است. حل تحلیلی از طریق معادله انرژی در قسمت های پیوسته و رابطه نیروی مخصوص در محل پرش قابل محاسبه است. نتایج حل عددی و تحلیلی برای این مساله همراه با خطا ها در شکل ۳ و جدول ۱ آمده است. با توجه به نتایج بدست آمده روش عددی مرتبه دو پیشنهادی قادر است جریان دائمی با پرش را به دقت مدلسازی کند. بلعکس روش معمول MUSCL-PB دارای خطاهای ناشی از نوسانات غیر فیزیکی در نزدیکی محل موج شوک و موج های تماسی است.

۴-۲- آزمایش برآورد مرتبه دقت

در آزمایش حال حاضر مرتبه دقت روش عددی بررسی می-شود برای این منظور شرایط اولیه و تابع بستر زیر در نظر گرفته میشود.

$$h(x,0)=5+e^{\cos(2\pi x)},\qquad q(x,0)=0$$
$$z(x)=\sin(\cos(2\pi x))$$

همچنین شرایط مرزی پریودیک در دو سمت دامنه اعمال می‌شود. جریان برای شبکه های مختلف در ثانیه t=0.1 شبیه سازی شده است. شبکه با سایز ۴۰۰۰ سلول به عنوان حل مرجع در نظر گرفته می‌گردد. نتایج خطا نسبت به حل مرجع برای شبکه های مختلف در جدول ۲ گزارش شده است. همان طور که از نتایج عددی مشخص است مرتبه دو دقت برای شبکه های ریز قابل دستیابی است.

جدول ۲ خطای عددی همراه با مرتبه دقت

¶Table 2 Numerical errors and order of accuracy

	L^2	
	h	*Order of accuracy*
50	6.851e−02	-
100	2.451e−02	1.48
200	7.568e−03	1.64
400	2.127e−03	1.81

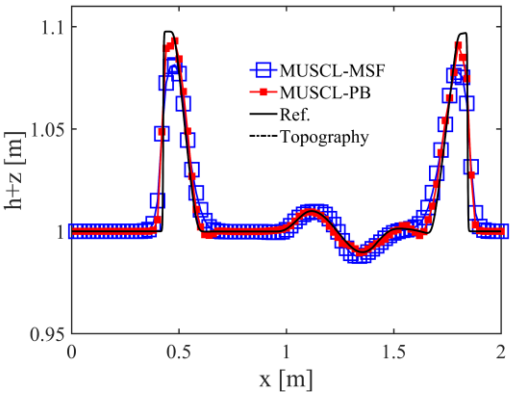

Fig. 4 Small perturbation of steady states: comparison of different numerical schemes

شکل ۴ آشفتگی (اغتشاش) جزیی جریان دائمی: مقایسه نتایج عددی روش های مختلف برای سطح آزاد آب

۴-۲- جریان غیر دائمی

۴-۲-۱- آشفتگی (اغتشاش) جریان دائمی

آزمایش عددی شبه-دائمی زیر ابتدا توسط (LeVeque 1998) پیشنهاد شد. این آزمایش برای بررسی قابلیت روش عددی در شبیه سازی جریان‌های متغیر سریع بر روی بستر پیوسته همراه با آشفتگی های کوچک و بزرگ در سطح آزاد جریان دائمی بکار گرفته می‌شود. تابع توپوگرافی بستر به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$z(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}\left(\cos\left(10\pi\left(x-1.5\right)\right)+1\right) & \text{if } 1.4\le x\le 1.6\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

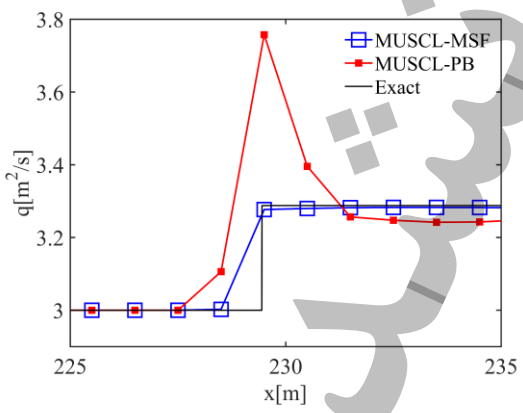

Fig. 5 Slowly moving shock: comparison of analytical and numerical solutions

شکل ۵ موج شوک کند رونده: مقایسه نتایج عددی با حل دقیق برای دبی جریان

شرایط اولیه جریان نیز از قرار زیر است:

$$\mathbf{U}(h,q)\begin{cases}(1-z(x)+\varepsilon,0) & \text{if } 1.4\le x\le 1.6\\ (1-z(x),0) & \text{otherwise}\end{cases}$$

که در آن، ε ثابت غیر صفر آشفتگی است که 0.1 در نظر گرفته می‌شود. شرایط مرزی آزاد نیز در دو سمت دامنه اعمال می‌گردد. در شکل ۵ نتایج عددی سطح آب آمده است. نتایج عددی جریان نیمه دائمی با دقت مناسب بدون نوسانات غیرفیزیکی حل شده و قابل مقایسه با نتایج عددی موجود در تحقیقات مشابه است.

۴-۲-۲- موج شوک کند رونده بر روی بستر مسطح

هدف این قسمت بررسی روش عددی مرتبه دو در شبیه سازی موج شوک نزدیک سکون است (Navas-Montilla and Murillo 2019). انتظار می‌رود اصلاح شوک پیشنهادی برای مرتبه یک دقت در برطرف کردن نوسانات غیر فیزیکی پسا شوک در مراتب دو نیز از کارایی مشابهی برخوردار باشد. شرایط مساله ریمان از قرار زیر است:

$$\mathbf{U}(h,q)=\begin{cases}(0.5,0.5) & x<255\\ (1.6,3.287878328168887) & x>255\end{cases}$$

پاسخ تحلیلی یک ناپیوستگی شوک با سرعت 0.261 m/s است (LeVeque 2002). در شکل ۵ و ۶ نتایج عددی در مقابل نتایج تحلیلی برای روش‌های با دقت مرتبه دو ترسیم شد. همان طور که از نتایج معلوم است نوسانات غیر فیزیکی پسا شوک برای روش عددیMUSCL-MSF بر خلاف MUSCL به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش داشت. برای روش اصلاح شوک تنها زمانی که موج شوک از مرز سلولی عبور می‌کند نوسان غیرفیزیکی کوچکی در نتایج دیده می‌شود. بلعکس بدون استفاده از اصلاح شوک این نوسانات در طول دامنه به شکل سینوسی متغیر است (شکل ۶). همچنین نتایج بدست آمده برای اصلاح شوک با مرتبه دو دقت MUSCL-MSF با نتایج مربوط به حالت مرتبه یک دقت در تحقیقات مشابه قابل مقایسه است.

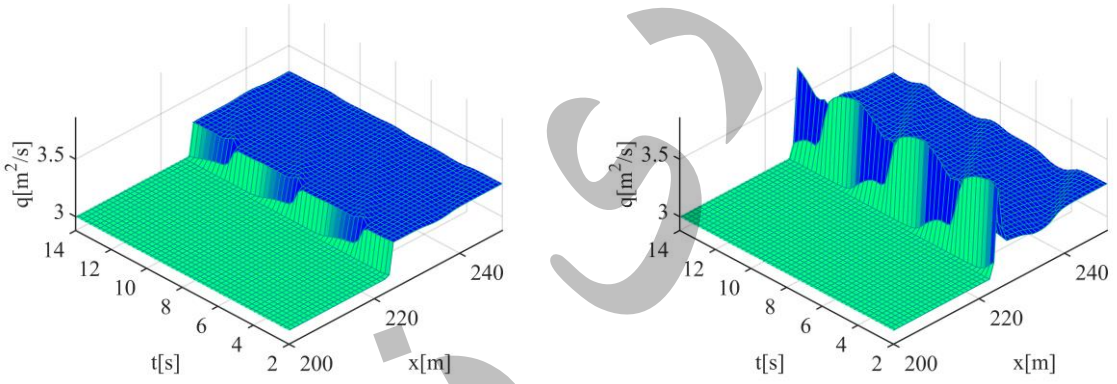

Fig. 6 Slowly moving shock: space time evolution of discharge for MUSCL-MSF (left) MUSCL-PB (right)

شکل ۶ موج شوک کند رونده: تغییرات دبی جریان برای MUSCL-MSF (چپ) و MUSCL-PB (راست) در زمان و مکان

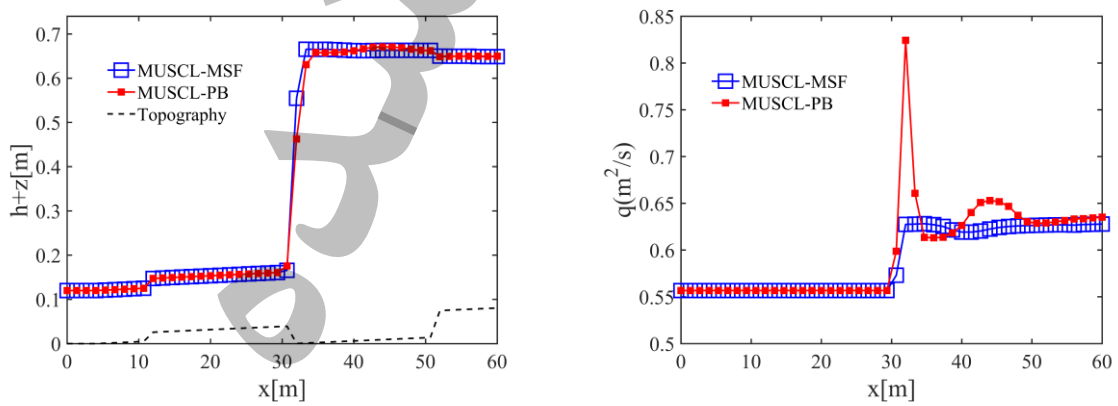

Fig. 7 Slowly moving shock over topography: numerical solutions for water depth (left) and discharge (right)

شکل ۷ موج شوک کند رونده بروی بستر: مقایسه نتایج عددی برای سطح آزاد آب (سمت چپ) و دبی جریان (سمت راست)

۴-۲-۴- موج شوک کند رونده بروی بستر معکوس

در این آزمایش کارایی روش پیشنهادی در حل موج کند رونده برروی بستر معکوس مورد ارزیابی قرار گرفته‌است (Navas-Montilla and Murillo 2019). تابع بستر برای این مساله به صورت زیر تعریف می شود:

$$z(x)=\begin{cases} 0.2/276\,(x-4)+g(x) & \text{if} \quad 4\le x\le 280 \\ 0.2-0.2/276\,(x-280) & \text{if} \quad 4\le x\le 280 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

که در آن، $g(x)$ تابع برای ایجاد بستر پلکانی در طول شیب اصلی بستر از قرار زیر است:

$$g(x)=\begin{cases} 0.02 & \text{if} \quad 12\le x\le 32 \\ -0.02 & \text{if} \quad 32\le x\le 52 \\ 0.04 & \text{if} \quad 52\le x\le 72 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

شرایط مرزی با دبی $0.6\ m^2/s$ در بالادست اعمال می‌شود. شبیه سازی عددی برای این مساله تا زمانی که جریان به حالت دائمی برسد ادامه می‌یابد. سپس شرایط مرزی با دبی $0.556749458405104\ m^2/s$ و ارتفاع آب $0.12\ m$ در بالادست اعمال می‌شود. تغییرات ارتفاع آب و دبی در مکان در شکل ۷ و تغییرات دبی جریان در زمان و مکان در شکل ۸ ترسیم شده است. همان طور که از نتایج عددی مشخص است بر خلاف روش عددی معمول مرتبه دو MUSCL-BP که در آن نوسانات غیر فیزیکی سینوسی شکلی در نزدیکی پرش ایجاد شده است (شکل ۸ سمت راست) در روش پیشنهادی MUSCL-MSF (شکل ۸ سمت چپ) حتی با وجود بستر ناپیوسته، نوسانات غیر فیزیکی پسا شوک بطور چشمگیری کاهش یافته است.

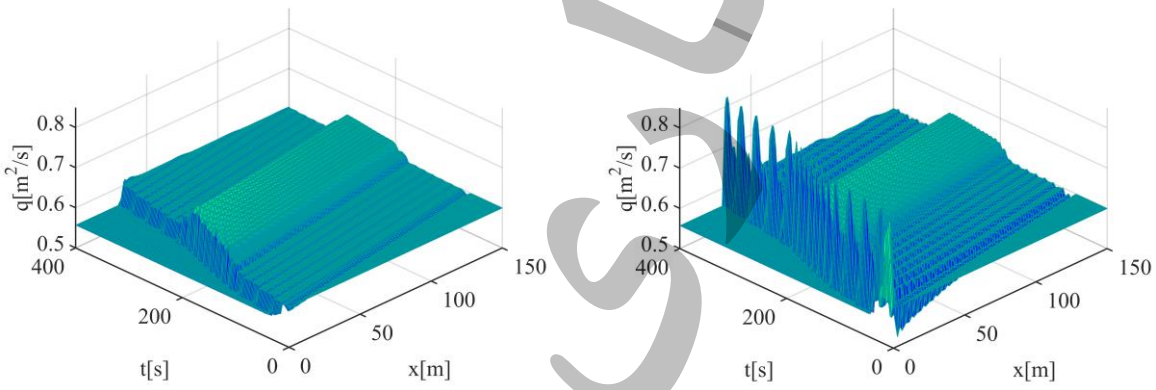

Fig. 8 Slowly moving shock: space time evolution of discharge for MUSCL-MSF (left) MUSCL-PB (right)

شکل ۸ موج شوک کند رونده بروی بستر: تغییرات دبی جریان برای MUSCL-MSF (چپ) و MUSCL-PB (راست) در زمان و مکان

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش یک روش عددی مرتبه دو دقت، کاملا متعادل و سازگار با شرایط آنتروپی برای دستگاه یک بعدی آب کم عمق با وجود جملات چشمه توسعه داده شده است. روش عددی پیشنهادی قادر به حفظ تمام وضعیت‌های دائمی جریان است. اغلب حفظ این وضعیت‌های دائمی برای روش‌های با مراتب بالای دقت دشوار گزارش شده‌است. نتایج عددی نشان داد که روش پیشنهادی قادر به حفظ مرتبه دو دقت در نواحی پیوسته جریان و بدور از نوسانات غیر فیزیکی در نقاط ناپیوسته بوده است. روش عددی پیشنهادی مرتبه دو دقت همچنین در مقایسه با حل گر های تخمینی ریمان متعارف قادر به کاهش قابل ملاحظه نوسانات پسا شوک ناشی از موج کند رونده بر روی بستر مسطح و شیب دار می باشد.

۶- فهرست علایم

ارتفاع آب (m)	h
دبی (ms^{-2})	q
سرعت میانگینی (ms^{-1})	u
سرعت فازی (ms^{-1})	c
شتاب گرانشی (ms^{-2})	g
مختصات مکانی	x
مختصات زمانی	t
عدد فرود	Fr

انرژی مکانیکی (m)	E
عملگر دیفرانسیل	d
عملگر دیفرانسیل جزئی	∂
بردار متغیرهای پایستار	$\mathbf{U}$
بردار شار	$\mathbf{F}$
جملات چشمه	$\mathbf{S}$
ماتریس ژاکوبی شار	$\mathbf{J}$
ماتریس واحد	$\mathbf{I}$
مقادیر ویژه	λ
بالانویس‌ها:	
اندیس گام زمانی	n
موج شوک غیر ایستا	MF
موج شوک ایستا	SF
موج شوک غیر ایستا و ایستا	MSF
زیرنویس‌ها:	
اندیس گام مکانی	i

۷-منابع

Akbari, M. and B. Pirzadeh (2022). Implementation of exactly well-balanced numerical schemes in the event of shockwaves: A 1D approach for the shallow water equations. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 94(7), 849-895.

Arora, M .and P. L. Roe (1997). On Postshock Oscillations Due to Shock Capturing Schemes in Unsteady Flows. Journal of Computational Physics, 130(1), 25-40.

Audusse, E., et al. (2004). A Fast and Stable Well-Balanced Scheme with Hydrostatic Reconstruction for Shallow Water Flows. SIAM Journal on Scientific Computing, 25(6), 2050-2065.

Bermudez, A. and M. E. Vázquez (1994). Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms. Computers & Fluids, 23(8), 1049-1071.

Courant, R., et al. (1967). On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics. IBM Journal of Research and Development, 11(2), 215-234.

Einfeldt, B. (1988). On Godunov-Type Methods for Gas Dynamics. SIAM Journal on Numerical Analysis, 25(2), 294-318.

Eslamloueyan, A. and S .M. Amiri (2020). Evaluation of Well-Balanced Form of Weighted Average Flux Scheme for Simulating Flow in Open Channels. Journal of Hydraulics 15(1), 143-155. (in Persion).

Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics, 49(3), 357-393.

Harten, A. and J. M. Hyman (1983). Self adjusting grid methods for one-dimensional hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics, 50(2), 235-269.

Harten, A., et al. (1983). On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws. SIAM Review, 25(1), 35-61.

LeFloch, P. G. and M. D. Thanh (2011). A Godunov-type method for the shallow water equations with discontinuous topography in the resonant regime. Journal of Computational Physics, 230(20), 7631-7660.

LeVeque, R. J. (1998). Balancing Source Terms and Flux Gradients in High-Resolution Godunov Methods: The Quasi-Steady Wave-Propagation Algorithm. Journal of Computational Physics, 146(1), 346-365.

LeVeque, R. J. (2002). Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. Cambridge University Press, Cambridge, 558.

Lu, X. and S. Xie (2016). Conventional versus pre-balanced forms of the shallow-water equations solved using finite-volume method. Ocean Modelling, 101, 113-120.

Mosavi Nezhad, S. M. and M. A. Makouei (2021). Lagrangian Approach in Simulating Dam Break Using Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method by Radial Basis Function. Journal of Hydraulics 16(1), 67-8. (in Persion).

Murillo, J. and P. García-Navarro (2013). Energy balance numerical schemes for shallow water equations with discontinuous topography.

Journal of Computational Physics, 236, 119-142.

Navas-Montilla, A. and J. Murillo (2015). Energy balanced numerical schemes with very high order. The Augmented Roe Flux ADER scheme. Application to the shallow water equations. Journal of Computational Physics, 290, 188-218.

Navas-Montilla, A. and J. Murillo (2019). Improved Riemann solvers for an accurate resolution of 1D and 2D shock profiles with application to hydraulic jumps. Journal of Computational Physics, 378, 445-476.

Rogers, B. D., et al. (2003). Mathematical balancing of flux gradient and source terms prior to using Roe's approximate Riemann solver. Journal of Computational Physics, 192(2), 422-451.

Saint-Venant, A. J. C. B. d. (1871). Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leurs lits. Comptes Rendus des séances de l'Académie des Sciences, 73, 147-157.

Sánchez-Linares ,C., et al. (2015). Multi-level Monte Carlo finite volume method for shallow water equations with uncertain parameters applied to landslides-generated tsunamis. Applied Mathematical Modelling, 39(23-24), 7211-7226.

Toro, E. F. (2009). Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 724.

Valiani, A., et al. (2002). Case Study: Malpasset Dam-Break Simulation using a Two-Dimensional Finite Volume Method. Journal of Hydraulic Engineering, 128(5), 460-472.

van Leer, B. (1979). Towards the ultimate conservative difference scheme. V. A second-order sequel to Godunov's method. Journal of Computational Physics, 32(1), 101-136.

Zaide, D. W. and P. L. Roe (2012). Flux functions for reducing numerical shockwave anomalies. ICCFD7. Big Island, Hawaii.