

# حل تحلیلی و عددی معادلات آبهای کم عمق با ناپیوستگی های متمرکز در بستر

محبوبه جمعه زاده<sup>۱</sup>، محمدرضا جعفرزاده<sup>۲\*</sup>

۱- دانش آموخته کارشناسی ارشد عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- دانشیار گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

\* مشهد، صندوق پستی ۹۱۸۸۵-۱۱۱۱

jafarzad@ferdowsi.um.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله تأثیر ناپیوستگی های متمرکز بستر (بالا آمدگی یا پایین افتادگی) بر حل مسأله ریمن در معادلات آبهای کم عمق مطالعه می شود. بدین منظور ابتدا حل تحلیلی مسأله شکست سد یک بعدی بر بستر تخت بدون اصطکاک و سپس بر بستر با ناپیوستگی متمرکز (پله) مرور می شود. در این کار از معادلات جرم- مومنتم در محلهای پیوسته و از معادلات جرم- انرژی در ناپیوستگی ها استفاده می شود. آن گاه برای اولین بار مسأله شکست سد بر روی سکو به صورت تحلیلی حل می شود. در قسمت بعدی معادلات جرم- مومنتم بر سکو به صورت عددی حل می شود. در جداسازی این معادلات بر بستر تخت پیوسته، روش حجم محدود Roe-TVD با محدود کننده شیب minmod به کار برده می شود. اما در محل ناپیوستگی معادلات جرم- انرژی جداسازی می شود. جوابهای حل عددی، به حل تحلیلی بسیار نزدیک است. در پایان مسأله شکست سد در حفره نیز به صورت مشابهی به روشهای تحلیلی و عددی بررسی و مقایسه می شود.

**کلید واژگان:** جملات چشمه، حجم محدود، شیب بستر متمرکز، روش جرم- انرژی، آبهای کم عمق.

## ۱- مقدمه

سیستم معادلات هذلولی با جملات چشمه هندسی در حل بسیاری از مسائل فیزیکی مانند معادلات آبهای کم عمق همراه با توپوگرافی بستر استفاده می شود. دقت روشهای عددی با وجود این جملات در محاسبه حالت ماندگار، به علت لزجت عددی مرتبه اول استفاده شده در ناپیوستگی ها کاهش می یابد.

به الگوهایی که لزجت عددی را کاهش می دهند الگوهای متوازن<sup>۱</sup> گفته می شود، (Greenberg and Le Roux, 1996) و (Jin, and Wen, 2004): یکی از ویژگی های الگوهای متوازن آن است که تعادل بین شار عددی با جمله چشمه وجود دارد. در این صورت حل عددی حالت ماندگار را با دقت حداقل از مرتبه دو مدل می کند.

1. Well-Balanced Schemes

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} = T \quad (2)$$

که در آن  $U$  بردار متغیرهای بقا،  $F(U)$  بردار شار و  $T$  بردار جملات چشمه است و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 0 \\ -ghz_x \end{bmatrix} \quad (3)$$

در حالت غیر بقا سیستم معادلات (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = T \quad ; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ gh - u^2 & 2u \end{bmatrix} \quad (4)$$

که در آن  $A = \partial F(U) / \partial U$  ماتریس ژاکوبین بردار شار است.

سیستم معادلات (۱) با دستکاری‌های جبری به سیستم معادلات جرم-انرژی زیر تبدیل می‌شود، (Shi and Xin, 2002):

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 & (5-الف) \\ u_t + (\frac{1}{2}u^2 + gh + gz)_x = 0 & (5-ب) \end{cases}$$

در صورتی که هر یک از توابع عمق، سرعت یا تراز بستر در سیستم معادلات (۱) یا (۵) هموار نباشد، این دو سیستم هم‌ارز به حساب نمی‌آیند. مثلاً از سیستم جرم-انرژی (سیستم معادلات (۵)) در جایی که پرش هیدرولیکی وجود داشته باشد نمی‌توان استفاده کرد و سیستم جرم-مومنتم در مواردی که تابع بستر ناپیوسته است به کار نمی‌رود، (Shi and Xin, 2002).

### ۳- الگوی متوازن

در معادله (۱-ب)، برای حالت ماندگار، جمله شار با جمله چشمه مساوی است. در صورتی که در روش عددی، بین جملات شار و چشمه، اختلافی از دقت مرتبه

الگوهای متوازن متعددی در سالهای اخیر پیشنهاد شده است؛ به‌عنوان مثال می‌توان الگوهای تخفیفی<sup>۱</sup> (Delis and Katsaounis, 2003)، الگوی HLLC (Delis, 2003)، الگوهای مرکزی<sup>۲</sup> (Kurganov and Levy, 2002) و الگو بر پایه روش گرادیان سطح<sup>۳</sup> (Zhou et al., 2001) را نام برد. در بیشتر روشهای مذکور لازم است شار عددی اصلاح شود، (Shi and Xin, 2002). به تازگی دو الگوی متوازن جدید "جرم-انرژی" و "شکل کامل" که در آنها نیاز به اصلاح شار وجود ندارد، معرفی شده است، (Shi and Xin, 2002). الگوهای اخیر فقط در نقاط ناپیوستگی متمرکز به کار می‌روند. در سایر نقاط می‌توان از مدل‌های عددی دیگر استفاده کرد.

در این مقاله برای اولین بار مسأله شکست سد بر سکو به روش تحلیلی با استفاده از سیستم معادلات جرم-انرژی حل می‌شود. برای جداسازی جملات چشمه در محل ناپیوستگی‌های متمرکز از الگوی جرم-انرژی و در سایر نقاط از روش Roe-TVD استفاده می‌شود.

### ۲- معادلات آبهای کم عمق

معادلات یک‌بعدی بقای جرم-مومنتم در آبهای کم عمق با تغییرات تراز بستر و با صرف نظر کردن از اصطکاک به صورت زیر نوشته می‌شوند (Shi and Xin, 2002):

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 & (1-الف) \\ (hu)_t + (hu^2 + \frac{1}{2}gh^2)_x = -ghz_x & (1-ب) \end{cases}$$

که در آن  $h$  ارتفاع آب،  $u$  سرعت متوسط،  $g$  شتاب جاذبه و  $z(x)$  تابع تراز بستر است.

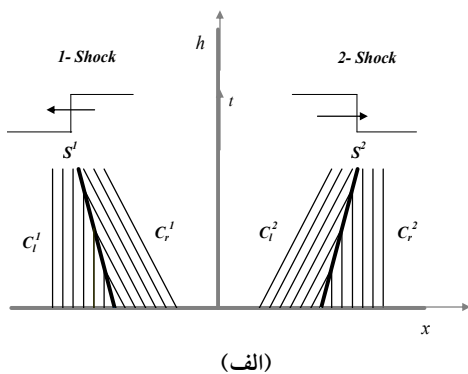
رابطه (۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

1. Relaxation Schemes
2. Central Schemes
3. Surface Gradient Method
4. Mass Energy
5. Complete Form

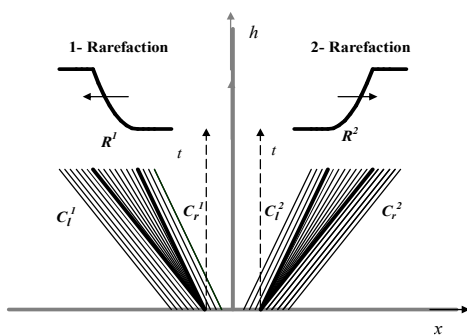
$$C_{l,r}^i : \frac{dx}{dt} = \lambda_{l,r}^i \quad (7)$$

زیر نویس های  $l$  و  $r$  مربوط به خطوط مشخصه چپ و راست موج هستند.

در معادلات آبهای کم عمق یک بعدی دو نوع موج ضربه و انبساطی<sup>۱</sup> شکل می گیرند. به طور قراردادی، موج های ضربه ای با حرکت به چپ یا راست را با  $S^1$  یا  $S^2$  و موج های انبساطی با حرکت به چپ یا راست را با  $R^1$  یا  $R^2$  نشان داده می شوند. ضربه  $S^i$  از تلاقی خطوط مشخصه خانواده  $C_l^i$  با  $C_r^i$  به وجود می آید. در شکل ۱- الف، ضربه های  $S^1$  و  $S^2$  و رابطه آنها با خانواده خطوط مشخصه مربوط نشان داده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۱ الف) چگونگی تشکیل دو موج ضربه

ب) چگونگی تشکیل دو موج انبساطی

اول به وجود آید، آن را ناشی از لزجت عددی مرتبه اول می نامند، (Greenberg and Le Roux, 1996). در این حالت روش عددی مذکور غیر متوازن است.

در حالت جریان ماندگار، سیستم معادلات (۵) به شرح زیر انتگرال گیری می شود:

$$hu = c_1 \quad (6-الف)$$

$$\left\{ \frac{1}{2}u^2 + gh + gz = c_2 \quad (6-ب) \right.$$

$c_1$  و  $c_2$  ثابت های معادلات است. سیستم معادلات انتگرال گیری شده (۶) نه تنها در نواحی هموار، بلکه در محل ناپیوستگی های بستر نیز معتبر است، (Shi and Xin, 2002). یکی از ویژگی های بعضی از الگوهای عددی معادلات آبهای کم عمق، خاصیت "متوازن" بودن آنها در موقعیت ناپیوستگی ها است. به چنین روشهایی الگوهای با خاصیت متوازن یا "الگوهای متوازن" گفته می شود. بر طبق تعریف روش عددی، اگر سیستم معادلات (۶) را دقیقاً یا با دقت حداقل از مرتبه دوم ارضا کند، حتی وقتی که تابع بستر  $z(x)$  ناپیوسته باشد، منطبق بر الگوی متوازن است. روش جرم- انرژی، الگویی متوازن است که در ادامه تشریح می شود، (Shi and Xin, 2002).

#### ۴- حل تحلیلی مسأله ریمن بر بستر تخت

##### پیوسته

هنگامی که بستر تخت، پیوسته و بدون اصطکاک باشد، جمله چشمه در سیستم معادلات جرم- مومنتم (۱) برابر صفر می شود. اگر خانواده خطوط مشخصه  $C^i$  مربوط به مقدار ویژه  $i$  - ام ماتریس ژاکوبین بردار شار  $(\lambda^i = u \mp \sqrt{gh}, i = 1, 2)$  تعریف شوند؛ معادله خطوط مشخصه این خانواده عبارت است از (Leveque, 2002):

$$R_{l,r}^i: \quad \frac{x}{t} = \lambda_{l,r}^i \quad (12)$$

مجموعه حالت‌های  $U$  که به حالت معلوم  $U_0$  توسط موج انبساطی  $i$  مرتبط می‌شوند با  $R^i(U_0)$  نشان داده می‌شوند. در این صورت سرعت جریان و عدد فرود به صورت تابعی از عمق آب از حالت‌های  $R^i(U_0)$  به دست می‌آید.

$$u^i = u_0 \pm 2(\sqrt{gh_0} - \sqrt{gh}) \quad (13-الف)$$

$$Fr^i = \frac{u_0}{\sqrt{gh}} \pm 2\left(\sqrt{\frac{h_0}{h}} - 1\right) \quad (13-ب)$$

همان طور که در شکل (۱-ب) مشاهده می‌شود، در سمت راست و چپ موج انبساطی  $R^i$ ، خانواده خطوط مشخصه  $C_r^i$  و  $C_l^i$  واقع شده و سرعت‌های  $V_{R_r^i}$  و  $V_{R_l^i}$  در دو لبه موج انبساطی مطابق با مقادیر ویژه متناظر هستند.

$$V_{R_{l,r}^i} = \lambda_{l,r}^i \quad (14)$$

برای آنکه موج انبساطی از نظر فیزیکی قابل قبول باشد، باید شرط‌های زیر برقرار باشند:

$$\lambda^1(U_l) < \lambda^1(U) \quad (15-الف)$$

$$\lambda^2(U) < \lambda^2(U_r) \quad (15-ب)$$

در روابط (۱۵-الف) و (۱۵-ب) حالت  $U = (h_l, h_l u_l)^T$  لبه چپ موج انبساطی و حالت  $U_r = (h_r, h_r u_r)^T$  لبه راست موج انبساطی را نشان می‌دهد و  $U = (h, hu)^T$  بردار مجموعه حالت‌های موج انبساطی است. بنابراین حل مسأله ریمن استاندارد برای معادلات آبهای کم عمق یک‌بعدی چنین است که حالت چپ  $U_l = (h_l, h_l u_l)^T$  را توسط موج  $W^1$  (ضربه یا انبساطی) به حالت میانی  $U_m = (h_m, h_m u_m)^T$  و حالت میانی را توسط موج  $W^2$  به حالت راست  $U_r = (h_r, h_r u_r)^T$  مرتبط می‌سازد و می‌توان آن را به صورت زیر نشان داد (Alcrudo and Benkhaldon, 2001):

$$U_l \xrightarrow{W^1} U_m \xrightarrow{W^2} U_r \quad (16)$$

مکان هندسی هیوگونوات<sup>۱</sup> برای حالت معلوم اولیه  $U_0 = (h_0, h_0 u_0)^T$  عبارت است از مجموعه حالت‌های  $U = (h, hu)^T$  که توسط ضربه به دست آمده از خطوط مشخصه به  $U_0$  متصل می‌شوند. این مکان هندسی را با  $(S^i(U_0), i=1, 2)$  نشان می‌دهند و رابطه زیر برای آن برقرار است، (Leveque, 2002):

$$S^i(U_0): \quad V_{s^i} = \frac{F(U) - F(U_0)}{(U - U_0)} \quad (8)$$

$V_{s^i}$  سرعت موج ضربه است. برای حالت‌های اولیه  $S^i(U_0)$ ، سرعت جریان و عدد فرود  $(Fr = u/\sqrt{gh})$  به صورت تابعی از عمق آب ( $h$ ) بیان می‌شوند (Leveque, 2002).

$$u^i = u_0 \mp \sqrt{\frac{g}{2}(h-h_0)^2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_0}\right)} \quad (9-الف)$$

$$Fr^i = \frac{u_0}{\sqrt{gh}} \mp \sqrt{\frac{1}{2h}(h-h_0)^2\left(\frac{1}{h} + \frac{1}{h_0}\right)} \quad (9-ب)$$

و نیز سرعت موج ضربه برابر است با (Leveque, 2002):

$$V_{s^i} = u_0 \mp \sqrt{\frac{g}{2}(h+h_0)\frac{h}{h_0}} \quad (10)$$

در معادلات (۹) و (۱۰) علامت منفی مربوط به  $i=1$ ،  $(Fr^l, V_{s^1}, u^l)$  و علامت مثبت مربوط به  $i=2$  است. باید توجه داشت که ضربه از نظر فیزیکی، نوعی پرش است و برای وجود آن لازم است شرط انتروپی برقرار باشد (Leveque, 2002):

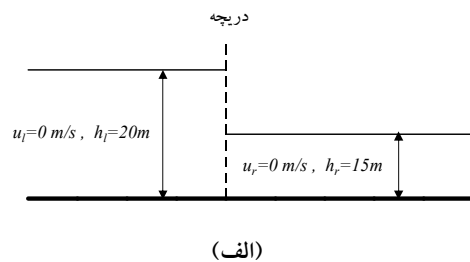
$$\lambda_l^i \geq V_{s^i} \geq \lambda_r^i \quad (11)$$

بدیهی است که بسته به مقدار  $i=1$  یا  $i=2$  موج ضربه به سمت چپ یا راست حرکت می‌کند.

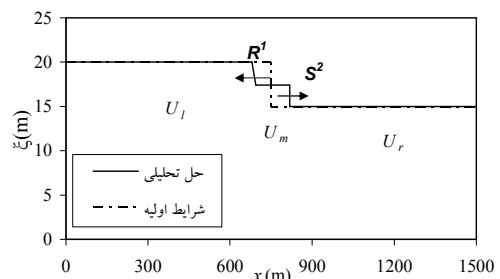
موجهای انبساطی از خانواده  $i$ -ام به صورت  $R^i$  نوشته می‌شوند (شکل ۱-ب) و بر لبه‌های چپ و راست آنها نسبت  $\frac{x}{t}$  مساوی مقدار ویژه  $i$ -ام ماتریس ژاکوبین بردار شار یعنی  $\lambda^i$  است، (Leveque, 2002):

### ۵- مسأله شکست سد بر بستر تخت پیوسته

مسأله شکست سد، حالت خاصی از مسأله ریمن بدون سرعت اولیه جریان است (Leveque, 2002). به عنوان مثال، مطابق شکل ۲- الف دریچه‌ای را که در دو سمت آن، آب ساکن با عمقهای  $h_l = 20\text{ m}$  و  $h_r = 15\text{ m}$  ایستاده در نظر بگیرید.



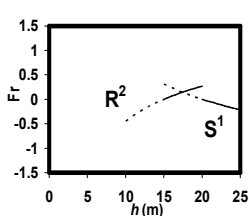
(الف)



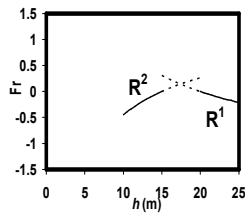
(ب)

شکل ۲ الف) شرایط اولیه مسأله شکست سد بر بستر تخت  
ب) نمودار سطح آب برای مسأله شکست سد در زمان  $t = 5\text{ s}$

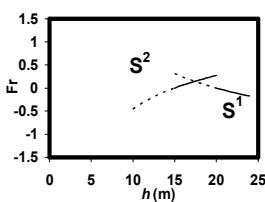
و خطچین‌ها مناطقی هستند که جواب با توجه به شرطهای (۱۱) و (۱۵) از نظر فیزیکی قابل قبول نیست. همان طور که مشاهده می‌شود فقط در حالت (ج) نقطه برخورد دو منحنی  $S^2$  و  $R^1$  در موقعیت قابل قبول جواب قرار دارد بنابراین فقط این حالت جواب مسأله است و مقادیر  $h_m = 17.4\text{ m}$  و  $u_m = 1.88\text{ m/s}$  به دست می‌آید. پروفیل جریان با استفاده از حل تحلیلی در زمان  $t = 5\text{ s}$  در شکل ۲- ب ترسیم شده است.



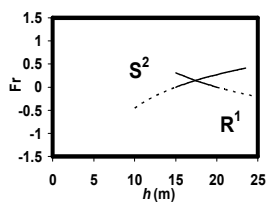
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

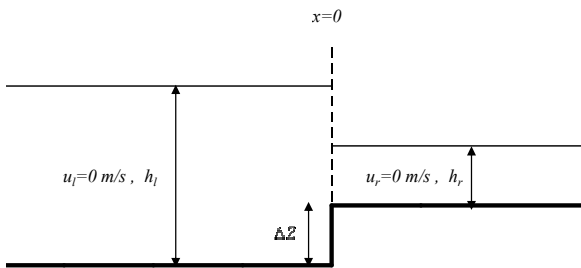
شکل ۳ حل تحلیلی - ترسیمی مسأله شکست سد در

مختصات  $(Fr-h)$

### ۶- گام ثابت انتقالی

هنگامی که در بستر کانال، ناپیوستگی متمرکزی مانند پله وجود داشته باشد، تابع تراز بستر  $z$  در محل پله مشتق پذیر نیست، زیرا شرط اولیه مشتق پذیر بودن تابع، پیوسته بودن آن است؛ بنابراین جمله شامل  $z_x$  در معادله مومتم یعنی رابطه (۱- ب) تعریف نشده باقی می‌ماند. در صورتی که از اتلاف انرژی صرف نظر شود، مقدار انرژی در واحد جرم  $(E = \frac{1}{2}u^2 + gh + gz)$  در عبور از پله، پیوسته و

هنگامی که دریچه برداشته می‌شود، موج ضربه  $S^2$  به طرف پایین دست و موج انبساطی  $R^1$  به طرف بالادست حرکت می‌کند. حل تحلیلی برای به دست آوردن اطلاعات حالت میانی  $U_m$  با تلاقی منحنی‌های  $R$  و  $S$  به صورت  $(R^1-R^2)$ ،  $(S^1-S^2)$ ،  $(R^1-S^2)$  و  $(S^1-R^2)$  از روابط (۹- ب) و (۱۳- ب) به دست می‌آید. در شکل ۳ حل تحلیلی - ترسیمی این مسأله برای چهار حالت مذکور در صفحه  $Fr-h$  نشان داده شده است. خطوط توپر مناطق قابل قبول



شکل ۴ شرایط اولیه مسأله ریمن با پله (  $t=0$  ).

روشن است که حل مسأله در صورت وجود پله در محل سد در دو طرف ناپیوستگی و خیلی نزدیک به آن ( $x = 0^\pm$ ) نیز در تمامی زمانها ثابت است (Alcrudo and Benkhaldon, 2001)، زیرا:

$$U(x,t) = f\left(\frac{x}{t}\right) \Rightarrow U(0^\pm, t) = f\left(\frac{0^\pm}{t}\right) = f(0^\pm) \quad (18)$$

در این صورت، اگر چه  $U(0^-, t) \neq U(0^+, t)$ ، اما دو حالت چپ و راست ( $0^-, 0^+$ ) را می توان توسط گام ثابت انتقالی (SST) به یکدیگر ارتباط داد. به بیان دیگر با ایجاد ناپیوستگی متمرکز در بستر، حالت میانی  $U_m$  به حالت های ثابت چپ  $U_2$  و راست  $U_3$  در مجاورت پله تبدیل می شود و داریم:

$$\begin{aligned} U_2 &= U(0^-, t) = f(0^-) \quad ; \\ U_3 &= U(0^+, t) = f(0^+) \Rightarrow \\ U_3 &= SST(U_2) \end{aligned} \quad (19)$$

از روابط (۶) استنباط می شود که حالت  $U_3$  متناوب حالت  $U_2$  در عبور از گام ثابت انتقالی است. خارج از محدوده پله، تابع بستر ثابت است و حالت های ثابت اولیه  $U_r$  و  $U_l$  در فواصل دور در چپ و راست پله در تمامی زمانها برقرار است. الگوریتم حل به صورت زیر نوشته می شود، (Alcrudo and Benkhaldon, 2001):

$$U_l \xrightarrow{R^1} U_2 \xrightarrow{SST} U_3 \xrightarrow{S^2} U_r \quad (20)$$

مشتق پذیر است. به همین دلیل در محل پله معادلات جرم-انرژی، یعنی مجموعه معادلات (۵) در حالت غیرماندگار و سیستم معادلات (۶) در حالت ماندگار به کار برده می شود.

استفاده از این معادلات در موقعیت پله، موجب ناپیوستگی در سطح آب می شود. به این ناپیوستگی گام ثابت انتقالی<sup>۱</sup> (SST) گفته می شود. در این صورت در محل پله دو ناپیوستگی به وجود می آید، یک ناپیوستگی مربوط به بستر (پله) است و یک ناپیوستگی نیز در سطح آب تولید می شود (Alcrudo and Benkhaldon, 2001).

## ۷- حل تحلیلی مسأله شکست سد در موقعیت ناپیوستگی متمرکز در بستر

مسأله شکست سد با شرایط اولیه و تابع بستر با ناپیوستگی متمرکز به صورت زیر برای سیستم معادلات بقای (۲) نوشته می شود (شکل ۴) (Alcrudo and Benkhaldon, 2001):

$$U(x,0) = \begin{cases} U_l & x < 0 \\ U_r & x > 0 \end{cases}, \quad z(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \Delta z & x > 0 \end{cases} \quad (17)$$

در این مسأله پله ای به ارتفاع  $\Delta z = 1$  m در موقعیت  $x = 0$  واقع شده و شرایط اولیه در سمت چپ آن با بردار  $U_l = \begin{bmatrix} h_l \\ 0 \end{bmatrix}$ ، با فرض  $h_l = 4$  m و در سمت راست

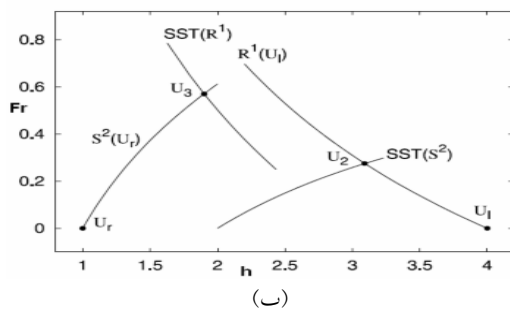
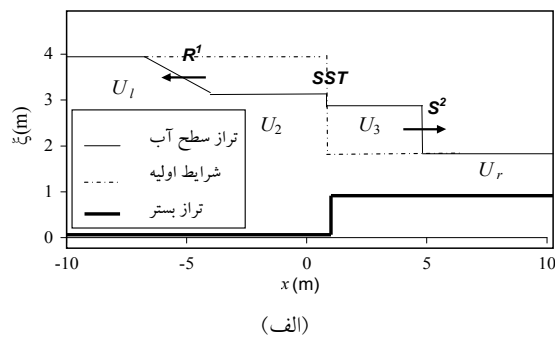
آن با بردار  $U_r = \begin{bmatrix} h_r \\ 0 \end{bmatrix}$ ، با فرض  $h_r = 1$  m نشان داده

می شود و نیز سرعت جریان در دو طرف پله برابر صفر فرض می شود ( $u_l = u_r = 0$ ). همان طور که ملاحظه شد حل مسأله شکست سد در  $x = 0$  یعنی محل سد، برای حالتی که پله وجود ندارد، به صورت کلی

$$U(x,t) = f\left(\frac{x}{t}\right) = f(0)$$

1. Stationary Step Transition (SST)

دو طرف سکویی به ارتفاع ۸ متر ایستاده است. سد در وسط سکو قرار گرفته و شرایط اولیه  $h_r = 15\text{m}$  و  $h_l = 20\text{m}$  بر قرار است.



شکل ۵ الف- موقعیت حالت‌های  $U_1, U_2, U_3$  و  $U_r$

ب- حل در مختصات  $(h, Fr)$

(Alcrudo and Benkhaldon, 2001)

بر اثر شکست سد بر سکو مطابق شکل ۶- الف موج ضربه  $S^2$  به سمت راست و یک موج انبساطی  $R^1$  به سمت چپ به راه می‌افتند. در این صورت حالت میانی  $U_m$  با  $u_m = 2.5725\text{m/s}$  و  $h_m = 9.3230\text{m}$  مشابه شکل

۳- ج در بین دو حالت چپ و راست  $U_r$  و  $U_l$  شکل می‌گیرد. هنگامی که موج ضربه  $S^2$  به پله پایین دست واقع در سمت راست سد می‌رسد، مطابق شکل ۶- ب موج ضربه  $S^2$  به سمت راست و موج انبساطی  $R^1$  به سمت چپ به وجود می‌آید. بین دو حالت  $U_r$  و  $U_m$  یک گام ثابت انتقالی با حالت‌های  $U_2$  و  $U_3$  به وجود می‌آید که

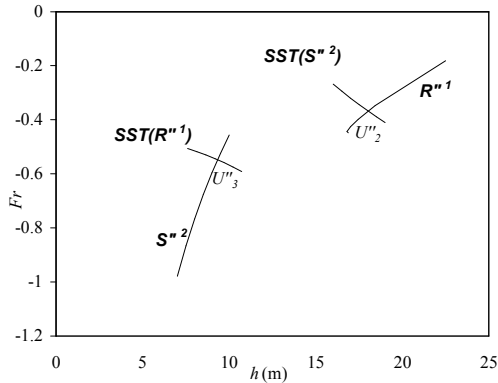
به بیان دیگر از حالت معلوم  $U_l$  با موج انبساطی  $R^1$  به حالت  $U_2$  و از آن با گام ثابت انتقالی  $SST$  به حالت  $U_3$  و از آنجا توسط موج ضربه  $S^2$  به حالت معلوم  $U_r$  می‌رسیم. حالات مجهول میانی  $U_2$  و  $U_3$  از حل سیستم معادلات (۶)، (۹-ب) و (۱۳-ب) با رعایت ملزومات تشکیل امواج ضربه و انبساطی یعنی ارضای شرط‌های (۱۱) و (۱۵) به دست می‌آیند.

در شکل ۵- الف تراز سطح آب  $(z = h + z_B)$  در مقابل  $x$  در زمان  $t=1\text{s}$  ترسیم شده است. شرایط اولیه با خط چین و تابع بستر با خط ضخیم نشان داده شده است. در شکل ۵- ب روش ترسیمی حل مسأله در صفحه  $(Fr - h)$  نشان داده شده است. مطابق این شکل، منحنی  $R^1(U_l)$  مکان هندسی تمامی نقاطی است که طبق معادله (۱۳-ب)، به حالت معلوم  $U_l$  و منحنی  $S^2(U_r)$  مکان هندسی تمامی نقاطی است که بر طبق معادله (۹-ب)، به حالت معلوم  $U_r$  مربوط می‌شوند. به ازای هر نقطه بر منحنی  $R^1(U_l)$ ، به کمک معادلات جرم-انرژی (۶)، منحنی  $SST(R^1)$  ترسیم می‌شوند. این منحنی مکان هندسی تمامی حالت‌های متناوب  $U_2$  است و از تلاقی آن با  $S^2(U_r)$  جواب  $U_3$  مسأله با  $h_3 = 1.9\text{m}$  و  $u_3 = 2.4619\text{m/s}$  به دست می‌آید. به روشی مشابه، از تلاقی  $SST(S^2)$  که منحنی مکان هندسی تمامی حالت‌های متناوب  $U_3$  است با منحنی  $R^1(U_l)$  جواب  $U_2$  مربوط با  $h_2 = 3.0922\text{m}$  و  $u_2 = 1.5127\text{m/s}$  حاصل می‌شود.

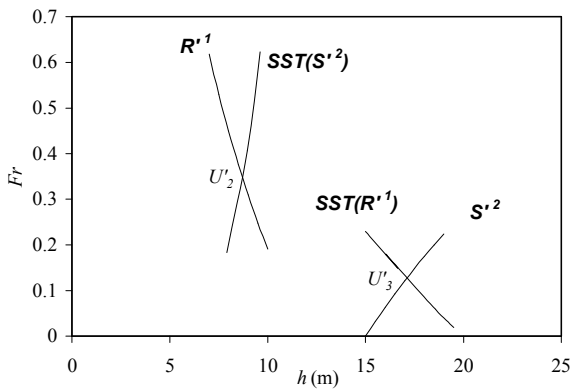
## ۸- حل تحلیلی مسأله شکست سد بر سکو

در حالت کلی سکو از ترکیب دو پله به وجود می‌آید. در این مقاله برای اولین بار مسأله شکست سد بر سکو با استفاده از مسأله شکست سد بر پله حل می‌شود. برای مثال مطابق شرایط اولیه در شکل ۶- الف آب ساکن در

۷- ب حل تحلیلی-ترسیمی در حالت رسیدن موج انبساطی به پله بالادست نشان داده شده است.



الف- برخورد موج ضربه به پله پایین دست



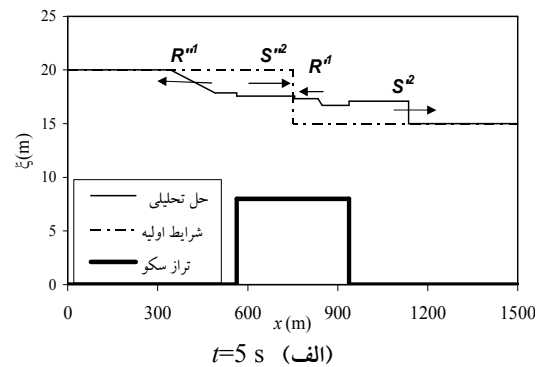
ب- برخورد موج انبساطی به پله بالادست

شکل ۷ حل تحلیلی- ترسیمی

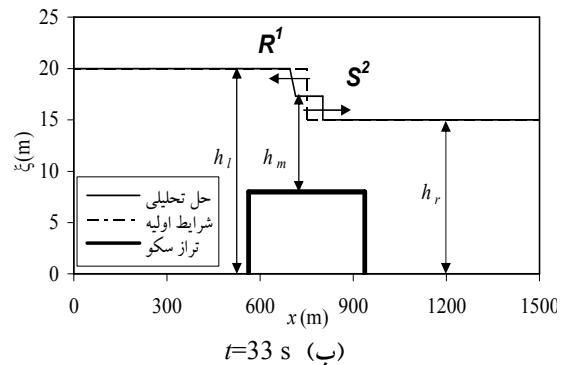
### ۹- روش عددی Roe-TVD

از مدل خطی سازی Roe برای جداسازی بخش همگن سیستم (۱) استفاده می‌شود ( Garcia Navarro and Vazquez Cendon, 2000). در این صورت ماتریس تقریبی  $\tilde{A}$  که دارای مقادیر ویژه  $\tilde{\lambda}_K$  و بردارهای ویژه  $\tilde{r}_k$  است، ایجاد می‌شود. برای هر جفت نقطه  $(i, i+1)$  در شبکه محاسباتی یک بعدی روابط زیرنوشته می‌شود:

مشابه مسأله پله حل می‌شود و  $h_2' = 8.7011$  m و  $u_3' = 1.6397$  m/s و  $h_3' = 17.0931$  m،  $u_2' = 3.2212$  m/s به دست می‌آید. همچنین هنگامی که موج انبساطی  $R^1$  ناشی از شکست سد به پله بالادست واقع در سمت چپ سد می‌رسد، موج ضربه  $S^2$  به سمت راست و موج انبساطی  $R^1$  به سمت چپ شکل می‌گیرد. بین دو حالت  $U_1$  و  $U_m$  نیز یک گام ثابت انتقالی دیگر به وجود می‌آید و  $h_2'' = 9.5886$  m،  $u_2'' = 1.5244$  m/s،  $h_3'' = 17.8821$  m و  $u_3'' = 2.8429$  m/s محاسبه می‌شود. در شکل‌های ۶-الف و ۶-ب حل مسأله، در دو زمان  $t=5$  s و  $t=33$  s با خط پر نشان داده شده است.



الف)  $t=5$  s



ب)  $t=33$  s

شکل ۶ حل تحلیلی شکست سد بر سکو

در شکل ۷-الف حل تحلیلی-ترسیمی این مسأله در حالت رسیدن موج ضربه به پله پایین دست و در شکل



$$\tilde{u} = \frac{u_L \sqrt{h_L} + u_R \sqrt{h_R}}{\sqrt{h_L} + \sqrt{h_R}} ; \tilde{h} = \sqrt{h_L h_R} ; \quad (30)$$

$$\tilde{c} = \sqrt{g \frac{h_L + h_R}{2}}$$

برای رسیدن به دقت مرتبه دو از روش MUSCL استفاده می‌شود. در این روش متغیرهای اولیه در هر سلول به صورت تابعی خطی تعریف می‌شوند. برای کنترل نوسانها در جواب، از الگوریتم کاهشی مجموع تغییرات (TVD) با محدودسازی شیب استفاده می‌شود.

در این مقاله از محدودکننده شیب minmod استفاده شده است. به روشهایی که دارای خصوصیت فوق باشند، روشهای با قدرت تفکیک بالا<sup>۱</sup> گفته می‌شود. بنابراین در راستای  $x$  مقادیر  $U$  به شرح زیر تعریف می‌شوند (Leveque, 2002).

$$U_n(x, t_n) = \tilde{U}_i^n + \sigma_i^n (x - x_i) \quad (31)$$

$$x_{i-\frac{1}{2}} < x < x_{i+\frac{1}{2}}$$

$$x_i = x_{i-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \Delta x$$

$$\sigma_i^n = \min \text{mod} \left( \frac{\tilde{U}_i^n - \tilde{U}_{i-1}^n}{\Delta x}, \frac{\tilde{U}_{i+1}^n - \tilde{U}_i^n}{\Delta x} \right) \quad (32)$$

$$\min \text{mod}(a, b) = \begin{cases} a & \text{if } |a| < |b| \text{ and } ab > 0 \\ b & \text{if } |b| < |a| \text{ and } ab > 0 \\ 0 & \text{if } ab \leq 0 \end{cases}$$

$\tilde{U}_i^n$  متوسط بردار متغیرهای بقا است که در هر گام حل عددی به دست می‌آید.

### ۱۰- روش عددی جرم-انرژی

این الگو بر پایه رابطه جرم-انرژی، سیستم معادلات (۵)، برای متغیرهای اولیه<sup>۲</sup> معادلات آب های کم عمق ابداع شده است. به بیان دیگر در مجاورت ناپوستگی بستر

$$\Delta U_{i+\frac{1}{2}} = U_{i+1} - U_i = \sum_k (\tilde{\alpha}_k \tilde{r}_k)_{i+\frac{1}{2}} \quad (21)$$

$$\Delta F_{i+\frac{1}{2}} = F_{i+1} - F_i = \tilde{A}_{i+\frac{1}{2}} \Delta U_{i+\frac{1}{2}} \quad (22)$$

$$\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}} \Delta U_{i+\frac{1}{2}} = \sum_k (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{r}_k)_{i+\frac{1}{2}} \quad (23)$$

بنابراین:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ (\tilde{\lambda}_1^- \tilde{\alpha}_1 \tilde{r}_1)_{i+\frac{1}{2}} + (\tilde{\lambda}_2^- \tilde{\alpha}_2 \tilde{r}_2)_{i+\frac{1}{2}} + (\tilde{\lambda}_1^+ \tilde{\alpha}_1 \tilde{r}_1)_{i-\frac{1}{2}} + (\tilde{\lambda}_2^+ \tilde{\alpha}_2 \tilde{r}_2)_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (24)$$

با استفاده از تعریف  $\tilde{\lambda}_k^\pm = \frac{1}{2} (\tilde{\lambda}_k \pm |\tilde{\lambda}_k|)$  و جایگزینی در معادله فوق داریم:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[ \sum_k (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{r}_k)_{i+\frac{1}{2}} + \sum_k (\tilde{\lambda}_k \tilde{\alpha}_k \tilde{r}_k)_{i-\frac{1}{2}} - \sum_k (|\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k \tilde{r}_k)_{i+\frac{1}{2}} + \sum_k (|\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k \tilde{r}_k)_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (25)$$

معادله (۲۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+\frac{1}{2}}^* - f_{i-\frac{1}{2}}^*) \quad (26)$$

که در آن تابع شار عددی،  $f^*$  عبوری از هر وجه برابر است با:

$$f_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2} (F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_k (|\tilde{\lambda}_k| \tilde{\alpha}_k \tilde{r}_k)_{i+\frac{1}{2}} \quad (27)$$

پارامترهای  $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2, \tilde{r}_{1,2}, \tilde{\lambda}_{1,2}, \tilde{u}, \tilde{h}, \tilde{c}$  در معادله (۲۵) به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{\Delta h}{2} - \frac{1}{2\tilde{c}} [\Delta(uh) - \tilde{u}\Delta h] ; \quad (28)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \frac{\Delta h}{2} + \frac{1}{2\tilde{c}} [\Delta(uh) - \tilde{u}\Delta h]$$

$$\tilde{r}_{1,2} = (1, \tilde{u} \pm \tilde{c})^T ; \tilde{\lambda}_{1,2} = \tilde{u} \pm \tilde{c} \quad (29)$$

1. High Resolution Methods  
2. Primitive Variables

### ۱۱- حل عددی مسأله شکست سد بر سکو

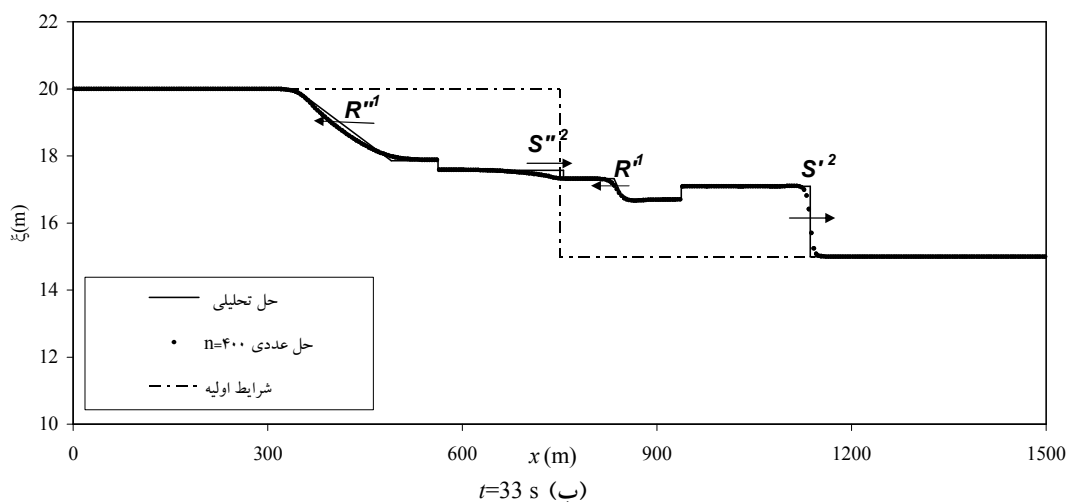
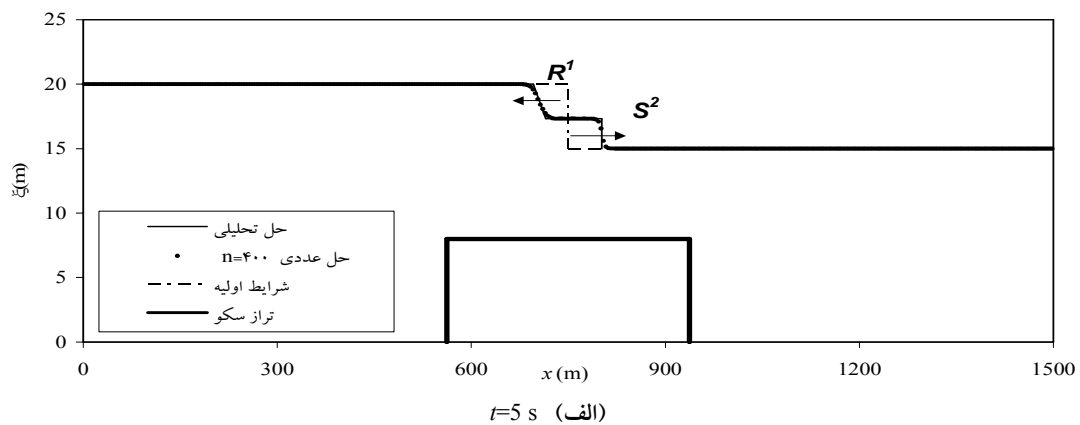
با استفاده از مدل Roe-TVD مسأله شکست سد بر سکو با شرایط اولیه مطابق شکل ۶-الف مدل سازی شد. محاسبات در زمانهای  $t=5s$  و  $t=33s$  در شبکه ۴۰۰ سلولی در شکل‌های ۸-الف و ۸-ب همراه با حل تحلیلی نشان داده شده است.

همان طوری که ملاحظه می‌شود در شکل ۸-الف در زمان  $t=5s$  امواج ضربه و انبساطی به موقعیت پله‌های بالادست و پایین دست نرسیده است و حل عددی به جواب تحلیلی بسیار نزدیک است.

روش عددی جرم-انرژی به صورت زیر نوشته می‌شود (Shi and Xin, 2002):

$$\partial_t h_i + \frac{(h_{i+\frac{1}{2}} u_{i+\frac{1}{2}}) - (h_{i-\frac{1}{2}} u_{i-\frac{1}{2}})}{\Delta x} = 0 \quad (۳۳-الف)$$

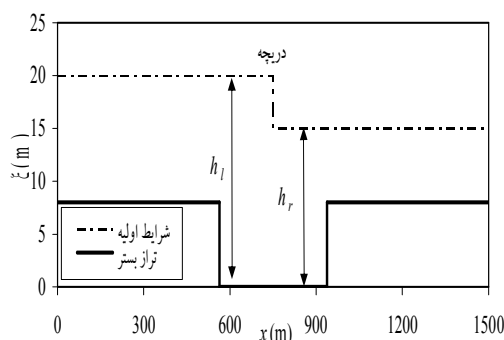
$$\partial_t u_j + \frac{(\frac{1}{2} u_{i+\frac{1}{2}}^2 + gh_{i+\frac{1}{2}} + gz_{i+\frac{1}{2}})}{\Delta x} - \frac{(\frac{1}{2} u_{i-\frac{1}{2}}^2 + gh_{i-\frac{1}{2}} + gz_{i-\frac{1}{2}})}{\Delta x} = 0 \quad (۳۳-ب)$$



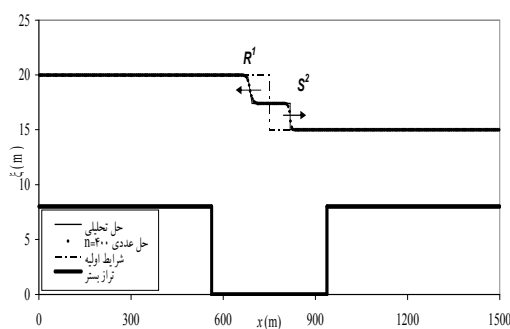
شکل ۸ مقایسه حل عددی Roe-TVD و حل تحلیلی شکست سد بر سکو

$h_2' = 17.8800 \text{ m}$ ,  $u_2' = 1.5260 \text{ m/s}$ ,  $h_3' = 9.5856 \text{ m}$ ,  
 $u_3' = 2.8464 \text{ m/s}$   
 $h_2'' = 8.6998 \text{ m}$ ,  $u_2'' = 3.2226 \text{ m/s}$ ,  $h_3'' = 17.0922 \text{ m}$ ,  
 $u_3'' = 1.6403 \text{ m/s}$

در شکل ۱۱ علاوه بر جواب تحلیلی، حل عددی مسأله نیز در زمان  $t=25\text{s}$  نشان داده شده است. مطابق شکل موقعیت و مقدار امواج در هر دو روش تحلیلی و عددی کاملاً سازگار است.



شکل ۹ مسأله شکست سد در حفره



شکل ۱۰ حل تحلیلی شکست سد در پایین افتادگی در زمان  $t=5$

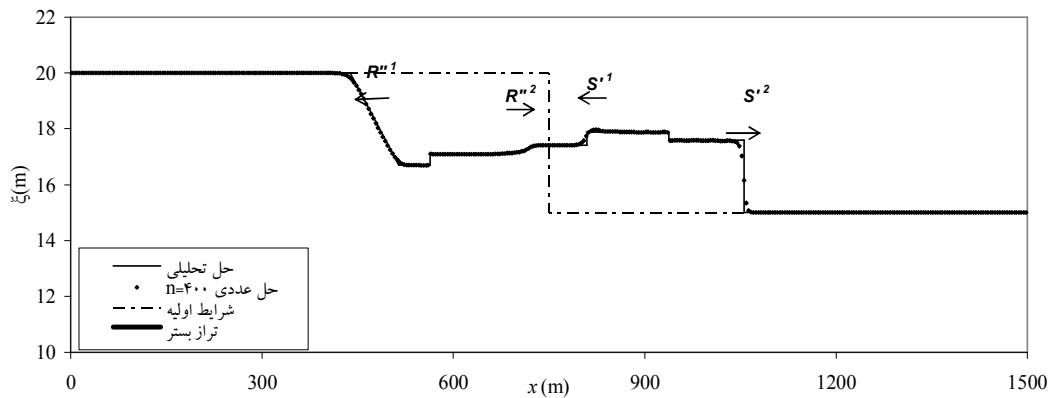
### ۱۳- نتیجه گیری

۱- حل تحلیلی- ترسیمی مسئله شکست سد یک بعدی بر بستر با نا پیوستگی‌های متمرکز نظیر پله یا سکو با استفاده از معادلات جرم- انرژی در محل ناپیوستگی و معادلات جرم- ممتوم در سایر نقاط انجام می‌شود.

در زمان  $t=33\text{s}$  امواج ضربه و انبساطی از هر دو پله گذشته‌اند؛ موقعیت و عمق امواج ضربه و انبساطی حاصل از برخورد موج ضربه اولیه به پله پایین دست به خوبی شبیه‌سازی شده، اما پخشیدگی عددی امواج ضربه و انبساطی حاصل از برخورد موج انبساطی اولیه به پله بالادست، پروفیل عددی  $S''^2$  را کمی بیشتر از جواب تحلیلی گسترده کرده است.

### ۱۲- شکست سد در حفره

به پایین افتادگی ناگهانی بستر کانال، حفره گفته می‌شود. حفره از ترکیب دو پله به وجود می‌آید. بنابراین مسأله شکست سد در حفره مشابه شکست سد بر پله حل می‌شود. در شکل ۹ دریاچه در وسط حفره‌ای به عمق ۸ متر واقع شده است. آب در دو طرف دریاچه به ارتفاع  $h_l = 20\text{m}$  و  $h_r = 15\text{m}$  ایستاده است. با برداشته شدن دریاچه، مسأله شکست سد اتفاق می‌افتد و موج ضربه ( $S^2$ ) به سمت راست و موج انبساطی ( $R^1$ ) به سمت چپ به راه می‌افتند (شکل ۱۰). در این صورت مشخصات حالت میانی به روشی مشابه آنچه در مورد سکو به دست آمد، محاسبه می‌شود و داریم  $u_m = 1.8782\text{m/s}$  و  $h_m = 17.4077\text{m}$  ضربه  $S^2$  به پله پایین دست واقع در سمت راست سد می‌رسد، به خلاف حالت سکو، دو موج ضربه  $S'^1$  به سمت چپ و  $S'^2$  به سمت راست شکل می‌گیرند و مطابق شکل ۱۱ یک گام ثابت انتقالی با حالتهای  $U_2'$  و  $U_3'$  به وجود می‌آید. همچنین بر اثر رسیدن موج انبساطی ( $R^1$ ) به پله سمت چپ، دو موج انبساطی  $R''^1$  و  $R''^2$  با حالتهای میانی  $U_2''$  و  $U_3''$  تشکیل می‌شود. بر اساس حل تحلیلی مشخصات جریان به صورت زیر محاسبه می‌شود:



شکل ۱۱ مقایسه حل عددی Roe-TVD و حل تحلیلی شکست سد در پایین افتادگی در  $t=25s$

$R$	موج انبساطی	۲- حل عددی همین مسئله با جداسازی معادلات جرم-ممتوم و استفاده از الگوی حجم محدود Roe-TVD همراه با محدود کننده شیب minmod انجام می‌شود. در این صورت باید در محل ناپیوستگی‌ها از روش عددی جرم-انرژی استفاده شود.
$\tilde{r}$	بردارهای ویژه در روش Roe	۳- نتایج حل عددی با جواب تحلیلی در یک شبکه ۴۰۰ سلولی مقایسه شدند. پخشیدگی امواج تیز رفت و برگشتی و اختلاف فاز بسیار کم بود.
$S$	موج ضربه	۴- حل تحلیلی و عددی مسئله شکست سد یک بعدی در یک حفره نیز با روش مشابه امکان پذیر است.
$SST$	گام ثابت انتقالی	
$t$	زمان	
$T$	بردار جملات چشمه	
$u$	سرعت متوسط	
$U$	بردار متغیرهای بقا	
$\tilde{u}$	سرعت متوسط در روش Roe	
$\tilde{U}$	بردار مقدار متوسط متغیرهای بقا در روش Roe	
$V_s$	سرعت ضربه	
$V_{R_i}$	سرعت لبه چپ موج انبساطی	
$V_{R_r}$	سرعت لبه راست موج انبساطی	
$W$	موج (ضربه یا انبساطی)	
$x$	فاصله جبری از مبدأ محور طولی مختصات	
$z$	تابع تراز بستر	
$\lambda$	مقدار ویژه ماتریس ژاکوبین بردار شار	
$\tilde{\lambda}$	ویژه ماتریس ژاکوبین در روش Roe	
$\xi$	تراز سطح آب شامل تراز بستر و ارتفاع آب	
$U_{l,r}$	شاخص $l$ و $r$ مربوط به شرایط اولیه چپ و راست $U$	
$U_x$	مشتق $U$ نسبت به $x$	
$U_t$	مشتق $U$ نسبت به $t$	
		۱۴- فهرست علائم
		$A$ ماتریس ژاکوبین بردار شار
		$\tilde{A}$ ماتریس ژاکوبین روش Roe
		$c$ ثابت انتگرال‌گیری
		$C$ خطوط مشخصه
		$F$ بردار شار معادلات جرم-انرژی
		$Fr$ عدد فرود
		$f^*$ تابع شار عددی در روش Roe
		$g$ شتاب جاذبه
		$h$ ارتفاع آب
		$\tilde{h}$ ارتفاع آب در روش Roe

Jin, S. and Wen, X. (2004). "An efficient method for computing hyperbolic systems with geometrical source terms having concentrations", *J. Comp. Math.*, 22, pp. 230-249.

Kurganov, A. and Levy, D. (2002). "Central-upwind schemes for the Saint-Venant system", *Math. Model. Num. Anal.*, 36(3), pp. 397-425.

Leveque, R.J. (2002). "Finite Volume methods for hyperbolic problems", Cambridge University press, New York, USA, 558 p.

Shi, J. and Xin W. (2002). "Two interface type numerical methods for computing hyperbolic systems with geometrical source terms having concentrations", Research Project, Tsinghua University.

Zhou, J.G. Gauson, D.M. Mingham, C.G and Ingram, D.M. (2001), "The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow water equations", *J. Comp. Phys.*, 168, pp. 1-25.

## ۱۵- منابع

Alcrudo, F. and Benkhaldon, F. (2001). "Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with a bottom step", *Computers and Fluids*, 30, pp. 643-671.

Delis, A.I. (2003). "Improved application of the HLLC Riemann solver for the shallow water equations with source terms", *Commun. Numer. Meth. Engng.*, 19, pp.59-83.

Delis, A.I. and Katsaounis, Th. (2003). "Relaxation schemes for the shallow water equations", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 41, pp. 695-719.

Garcia Navarro, P. and Vazquez Cendon, M.E. (2000). "On numerical treatment of the source terms in shallow water equations", *Comput. Fluids*, 29, pp. 951-979.

Greenberg, J.M. and Le Roux, A.Y. (1996). "A well-balanced scheme for the numerical processing of source terms in hyperbolic equations", *J. Num. Anal.*, 33, pp. 1-16.