

## مطالعه روشهای عددی گسسته‌سازی در تحلیل جمله غیرخطی جریان کانال در روش شبیه‌سازی عددی مستقیم DNS

الهام رجبی، محمدرضا کاویانپور<sup>\*۱</sup>

۱- دانشجوی دکترای عمران آب، دانشکده عمران، دانشگاه خواجه نصیر طوسی

۲- دانشیارگروه مهندسی آب، دانشکده عمران، دانشگاه خواجه نصیر طوسی

\* تهران، کد پستی ۱۹۹۶۷۱۵۴۳۳

kavianpour@kntu.ac.ir

**چکیده**- از میان نمونه‌های متداول در تحلیل جریانهای هیدرولیکی به روش شبیه‌سازی عددی مستقیم DNS، می‌توان حل جریان کانال مسطح را نام برد. در این مقاله روشهای رایج گسسته‌سازی جمله غیرخطی در معادله ناویر استوکس در این جریان با توجه به تحلیل جریان با استفاده از روش شبه‌طیفی بررسی شده است. در این روش پس از استخراج معادلات در فضای فوریه و چپیشف، شش ساختار مختلف معادل با جمله غیرخطی  $\mathbf{u}_{tot} \cdot \nabla \mathbf{u}_{tot}$  شامل (ساختار چرخشی، ساختار متقارن انحرافی، ساختار انتقالی، ساختار واگرایی، عبارت خطی شده و روش متناوب) معرفی و نتایج حاصل از تحلیل جریان در نوعی کانال با توجه به ساختارهای فوق ارائه شد. مطالعه عددی در میدان جریان  $\Omega = [0, 4\pi] \times [-1, 1] \times [0, 2\pi]$  در شبکه‌ای از  $128 \times 65 \times 128$  نقطه و عدد رینولدز اصطکاکی  $Re_{\tau} = 175$  تحلیل و ارائه شده است.

با توجه به نتایج ارائه شده برای مقادیر آشفتگی به‌ویژه شدت آشفتگی میانگین‌گیری شده  $\overline{uu}$ ،  $\overline{vv}$ ،  $\overline{ww}$ ، انتخاب ساختار جمله غیرخطی چرخشی و الگوی عبارت خطی شده در مقایسه با سایر روشها در این شش ساختار، به‌ویژه الگوی متقارن انحرافی مناسبتر به‌نظر می‌رسد. هر چند الگوی عبارت خطی شده با توجه به حفظ نشدن ویژگی بقای انرژی و در نتیجه نبود تضمین پایداری این ساختار، گزینه مناسبی در تمامی شرایط نیست. لذا ساختار چرخشی در روش شبه‌طیفی به‌عنوان الگوی مناسب انتخاب می‌شود که علاوه بر پایداری و دقت، موجب کاهش قابل ملاحظه زمان اجرا و صرفه‌جویی زمانی برابر ۶۲٪ در مقایسه با سایر روشها می‌شود. در نتیجه نوع ساختار جمله غیرخطی به‌کار رفته برای انتخاب الگوی مناسب در تحلیل جریان در میدانهای بزرگتر و با اعداد رینولدز بالاتر را می‌توان عامل مؤثر بر کاهش زمان اجرای روش دانست. این نتیجه گامی مهم در راستای کاهش زمان و هزینه محاسبات در تحلیل جریان بر اساس روش شبیه‌سازی مستقیم است.

**کلیدواژگان:** شبیه‌سازی عددی مستقیم DNS، روش شبه‌طیفی، جریان کانال، ساختار عبارت غیرخطی.

## ۱- مقدمه

معادلات ناویر-استوکس به دلیل غیرخطی بودن، گستره‌ای وسیع از مقیاس‌های زمانی و مکانی آشفتگی را پوشش می‌دهد و لذا حل این معادله در تمامی مقیاس‌های موجود در جریان (در شبیه‌سازی عددی مستقیم) انجام می‌شود. در تحلیل جریان به روش DNS بسیاری از روش‌های عددی را می‌توان به‌کار برد. هر چند برای حل عددی جریان آشفته در این روش، به روش‌های عددی پایدار و بدون اتلاف عددی ناشی از گسسته‌سازی نیاز است. به این منظور گسسته‌سازی با حفظ بقای جرم و اندازه حرکت و انرژی جنبشی به‌عنوان قیود مکمل در این روشها مورد استفاده قرار می‌گیرد (Boyd, 2000). اولین شبیه‌سازی عددی مستقیم (DNS) توسط (Orszag (1972 و Patterson با به‌کارگیری روش طیفی گالرکین برای آشفتگی همسانگرد برای شبکه  $32 \times 32$  انجام شد. با توجه به ظرفیت مورد نیاز در شبیه‌سازی عددی مستقیم در جریان‌های با دیواره مرزی، شبیه‌سازی‌ها در این زمینه دیرتر از جریان همگن (۱۵ سال پس از اولین تلاش برای شبیه‌سازی عددی مستقیم) صورت گرفت. در این زمینه می‌توان به مطالعه کانال‌های منحنی توسط (Moser (1987 و Moin و کانال تخت توسط (Kim (1987 و همکاران با عدد رینولدز اصطکاکی  $Re_\tau=180$  (عدد رینولدز بر پایه سرعت اصطکاکی) اشاره کرد. پس از آن، شبیه‌سازی‌های عددی مستقیم با اعداد رینولدز اصطکاکی متفاوت ناشی از هندسه ساده و طبیعت بنیادی جریان کانال برای درک سازوکار انتقال انجام شده است. (Kuroda (1989 و همکاران و (Kasagi (1992 و همکاران شبیه‌سازی عددی جریان را با عدد رینولدز اصطکاکی اندکی پایین‌تر ( $Re_\tau=150$ ) انجام دادند. در سال ۱۹۹۰ با توجه به پیشرفت کامپیوتر، (Kim (1990 از شبیه‌سازی عددی

مستقیم با افزایش عدد رینولدز اصطکاکی تا  $Re_\tau=395$  جریان را مجدداً تحلیل کردند. (Kim و Antonia (1994 به مقایسه نتایج حاصل از این دو شبیه‌سازی ( $Re_\tau=180, 395$ ) پرداخته و کمیت‌های مختلف آشفتگی را در ناحیه مجاور دیواره ارائه کردند. (Kawamura (1999, 1998 و همکاران آزمایشهایی را برای اعداد رینولدز اصطکاکی  $Re_\tau=180, 395$  با اعداد مختلف پرانتل نیز انجام دادند. از آن پس نیز شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان کانال با اعداد رینولدز اصطکاکی بالاتر انجام شد و همزمان، ارائه روشهایی برای تحلیل این جریانها -با توجه به رشد امکانات سخت افزاری و همچنین راه‌های نرم افزاری برای کاهش هزینه محاسبات، مانند استفاده از الگوریتمهای پردازش و محاسبات موازی- هدف محققان بوده است. برای مثال می‌توان به تحقیقات (Kawamura (1998 و (1999) و Moser و همکاران با  $Re_\tau=590$ ، تحلیل جریان با استفاده از روش اختلاف محدود FDM با عدد رینولدز اصطکاکی  $Re_\tau=640$  توسط (Moin (2001 و Kim اشاره کرد. در میان پژوهشهای جدید، برای نمونه می‌توان به تحقیقات (Iwamoto (2005 و همکاران در دانشگاه توکیو در یک شبکه به ابعاد  $2048 \times 1025 \times 2304$  با عدد رینولدز اصطکاکی  $Re_\tau=2320$  و همچنین شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان کانال در اعداد رینولدز اصطکاکی  $Re_\tau=2000$  در یک شبکه  $4608 \times 2336 \times 6144$  در سال ۲۰۰۶ در مؤسسه DEISA اروپا اشاره کرد. در تحلیل جریانهای هیدرولیکی به روش DNS، از روش‌های طیفی و شبه‌طیفی استفاده می‌شود؛ زیرا با شبکه‌بندی مشابه، دقت بسیار بالاتری نسبت به سایر روشها دارد (Gresho, 1991). این نیاز ناشی از آن است

دارد. در روش طیفی گالرکین و در هر چهار الگو، ساختار بقایی معادلات پیوستگی، اندازه حرکت و انرژی جنبشی همواره حفظ می‌شود. در حالی که در روش شبه‌طیفی فقط در دو ساختار چرخشی و ساختار متقارن انحرافی ساختار بقایی دو مقدار اندازه حرکت خطی  $\int u dv$  و انرژی جنبشی  $\int \frac{1}{2} |u|^2 dV$  حفظ می‌شود (Gresho, 1991). همچنین محاسبهٔ شش عبارت مشتق شده در شکل چرخشی در مقایسه با نه عبارت شکل انتقالی از نظر اقتصادی برتر است. بر طبق گزارشهای ارائه شده، دقت ساختار متقارن انحرافی در صورت حذف نشدن خطای همانندسازی مناسبتر است، هر چند در این روش به تحلیل ۱۸ عبارت مشتق شده نیاز است.

در گزارشهای Zang (1991, 1990) نتایج حاصل از تحلیل جریان به روش شبه‌سازی عددی مستقیم با استفاده از روش گالرکین و شبه‌طیفی PS در ساختارهای متقارن انحرافی و چرخشی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. اما عملکرد روش شبه‌طیفی در تحلیل جریان کانال با توجه به ساختارهای ممکن جایگزین جمله جابه‌جایی در معادلات ناویر-استوکس و حذف خطای همانندسازی (به روش قانون 2/3) به‌طور مستقل مطالعه نشده است. لازم است ذکر شود که اعمال قانون 2/3 در راستای حذف فرکانس یک سوم بالایی طیف در فضای فوریه صورت می‌گیرد. در رابطه با جریان کانال گزارشهای Horiuti, Itami (1998) و Zang (1991) مبنی بر کاهش دقت الگوی چرخشی پس از گسسته‌سازی به روشهای معمول عددی (اعم بر اختلاف محدود و طیفی)، علی‌رغم ویژگیهای ممتاز بقایی و مزایای الگوریتمی ارائه شده است. این کاهش دقت به‌ویژه در نواحی مجاور جداره بر اثر افزایش خطای همانندسازی در روش‌های گالرکین و

که در صورت استفاده از روش عددی کم‌دقت در DNS، خطاهای عددی موجب تحریک جریان شده و جوابی غیر از جواب درست مسأله را به دست خواهد داد. تقریباً در تمامی تحقیقات اولیه DNS، به دلیل محدودیتهای سخت‌افزاری از روشهای طیفی استفاده شده است. برای گسسته‌سازی در فضای فیزیکی جریان کانال به روش DNS نیز به دلیل دامنه گسترده مقیاس‌های مکانی، استفاده از روشهای با مرتبه بالا مورد نیاز است. همچنین از آنجا که در اینجا وابستگی به زمان مطرح بوده و تاریخچه زمانی دقیق مورد نیاز است، لذا روش‌های گسسته‌سازی زمانی که برای جریان‌های ثابت طراحی می‌شوند، نمی‌توانند بدون اصلاح به کار روند و روش پیشروی زمانی باید برای مراحل زمانی انتخاب شده پایدار باشد. معمولاً در DNS این روشها از مرتبه دوم یا چهارم دقت استفاده می‌شوند. انتخاب ساختار جایگزین در تحلیل عبارت غیرخطی در معادله اندازه حرکت (جمله جابه‌جایی) با توجه به روش عددی به کار برده شده در تحلیل مسأله انجام می‌شود. به‌طور معمول چهار ساختار متفاوت برای گسسته‌سازی این عبارت وجود دارد: ساختار چرخشی<sup>۱</sup>، ساختار متقارن انحرافی<sup>۲</sup>، ساختار انتقالی<sup>۳</sup> و ساختار واگرایی<sup>۴</sup>. هر یک از روش‌های بالا به دلایل متفاوتی در تحلیل‌های عددی استفاده می‌شوند. برای مثال مزایای الگوریتمی و ویژگی‌های بقایی برتر (بقای معادله انرژی جنبشی) و پایداری عددی در روش چرخشی، این روش را به‌ویژه برای تحلیل‌های حجم‌های محدود (FVM)، تفاضلات محدود (FDM) و روشهای اجزاء محدود (FEM) به یک الگوی متداول تبدیل کرده است. البته پایداری عددی در این روشها به روش گسسته‌سازی و شبکه‌بندی بستگی

1. Rotational
2. Skew Symmetric
3. Convection
4. Divergence

شبه‌طیفی دیده شده است (Olshanskii, 2009). اما تاکنون گزارش مستقلی از نحوه عملکرد روش شبه‌طیفی در صورت حذف خطای همانندسازی (با استفاده از قانون ۲/۳) میان الگوهای متفاوت گسسته‌سازی عبارت غیرخطی جابه‌جایی ارائه نشده است. در این مقاله علاوه بر چهار روش متداول، از دو ساختار عبارت خطی شده جمله جابه‌جایی بر اساس جریان پایه و روش متناوب (ترکیب متناوب و اگرایی و انتقال) در تحلیل جریان کانال به روش شبه‌طیفی استفاده شده و ویژگیهای آماری آشفتگی جریان در کانال در صورت استفاده از روش "قانون ۲/۳" برای حذف خطای هم اثرسازی<sup>۱</sup> در هر شش الگو ارائه شده است.

مقادیر شرایط مرزی تعیین شده در جهات متناوب جریان در راستای  $x$  و  $z$  بوده و ارتفاع کانال  $2h = b - a$  برابر دو واحد است. ابعاد فیزیکی میدان جریان حاصل از یک شبکه  $128 \times 65 \times 128$  از نقاط است و عدد رینولدز محاسباتی اولیه با ارائه لزجت اولیه برابر  $\nu = 1/4000$  تعریف می‌شود. عدد رینولدز محاسباتی اولیه ( $Re_L = hU/\nu$ ) با توجه به سرعت متوسط در قسمت میانی کانال، لزجت مصنوعی اولیه و نصف ارتفاع کانال برابر  $Re_L = 4000$  تعیین شده است. لازم است ذکر شود که در این شبکه‌بندی ابعاد مقیاس شده  $\Delta x^+, \Delta y_c^+, \Delta z^+$  با توجه به سرعت برشی دیواره  $u_\tau$  به ترتیب برابر  $16/4, 8/5$  و  $8/2$  بوده و حداقل‌های لازم را برای تحلیل جریان به روش شبه‌سازی عددی مستقیم با توجه به مقادیر ذکر شده توسط Moser و Abe (2001) و et al. (1999) برآورده می‌کند ( $\Delta y_c^+$  در میانه کانال) و لذا دقت گسسته‌سازی مکانی مورد نیاز در تحلیل جریان به روش DNS در این میدان برآورده می‌شود. عدد رینولدز اصطکاکی با رابطه  $Re_\tau = hu_\tau/\nu$  و بر پایه سرعت برشی دیواره  $u_\tau$  و نصف ارتفاع کانال محاسبه می‌شود که در این مساله  $Re_\tau \approx 175.8$  است.

معادلات جریان شامل معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر با شرایط مرزی متناوب در راستای  $x$  و  $z$  به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{tot}}{\partial t} + \mathbf{u}_{tot} \cdot \nabla \mathbf{u}_{tot} = -\nabla p_{tot} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_{tot} \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{u}_{tot} = 0 \quad (2)$$

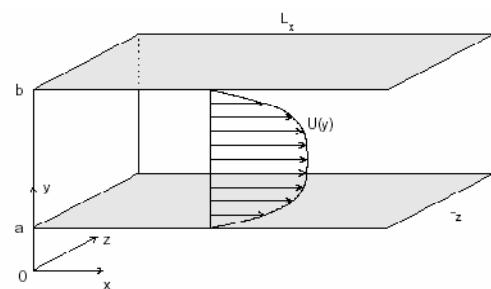
در این روابط  $\mathbf{u}_{tot}(x;t)$  سرعت کل میدان جریان و  $p_{tot}(x;t)$  فشار کل در میدان جریان است. شرط مرزی نبود لغزش در جداره بالایی و پایینی برای سرعت ارضا می‌شود ( $\mathbf{u} = 0$  در  $y = a, b$ ). شرایط مرزی برای

شبه‌طیفی دیده شده است (Olshanskii, 2009). اما تاکنون گزارش مستقلی از نحوه عملکرد روش شبه‌طیفی در صورت حذف خطای همانندسازی (با استفاده از قانون ۲/۳) میان الگوهای متفاوت گسسته‌سازی عبارت غیرخطی جابه‌جایی ارائه نشده است. در این مقاله علاوه بر چهار روش متداول، از دو ساختار عبارت خطی شده جمله جابه‌جایی بر اساس جریان پایه و روش متناوب (ترکیب متناوب و اگرایی و انتقال) در تحلیل جریان کانال به روش شبه‌طیفی استفاده شده و ویژگیهای آماری آشفتگی جریان در کانال در صورت استفاده از روش "قانون ۲/۳" برای حذف خطای هم اثرسازی<sup>۱</sup> در هر شش الگو ارائه شده است.

## ۲- روش عددی DNS

### ۲-۱- میدان محاسباتی و معادلات جریان

هندسه جریان در شکل ۱ نشان داده شده است. در این شکل دیده می‌شود که جریان سیال بین دو دیواره صلب ساکن برقرار است، که در  $y=b, y=a$  واقع شده‌اند.



شکل ۱ جریان در کانال

$a$  و  $b$  به ترتیب برابر  $-1$  و  $1$  تعیین می‌شود. سیال در جهت  $x$  با فرض وجود جریان پایه سهموی حرکت می‌کند. میدان محاسباتی جریان عبارت است از  $\Omega = [0, L_x] \times [a, b] \times [0, L_z]$  که  $L_x = 4\pi$  و

1. Aliasing

$$u(x,y,z) = \sum_{k_x=-N_x/2+1}^{N_x/2} \sum_{k_z=-N_x/2+1}^{N_x/2} \hat{u}(k_x, y, k_z) e^{2\pi i(k_x x/L_x + k_z z/L_z)} \quad (7)$$

که در اینجا  $N_x$  و  $N_z$  به ترتیب تعداد نقاط در جهت  $x$  و  $z$ ،  $\hat{u}$  ضرایب بسط فوریه و  $k_x$  و  $k_z$  به ترتیب طول میدان حل در جهات  $x$  و  $z$  است.  $\hat{u}$  تابعی از  $y$  بوده و با استفاده از تبدیل چبیشیف به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{u}(k_x, y, k_z) = \sum_{n=0}^{N_y} \tilde{u}(k_x, n, k_z) T_n(y) \quad (8)$$

$T_n(y)$  جملات چند جمله‌ای چبیشیف در  $y$  مربوط و  $\tilde{u}$  ضرایب این چند جمله‌ای‌ها و  $N_y$  تعداد نقاط در جهت  $y$  است. در جهت‌های  $x$  و  $z$  شبکه به صورت یکنواخت در نظر گرفته شده است.

با توجه به  $y \in [-1, 1]$ ، نقاط در این جهت به صورت زیر بر اساس  $y_n$  نقطه  $n$ -ام در جهت  $y$  تعریف می شوند:

$$y_n = \cos\left(\frac{n\pi}{N_y}\right) \quad n \in (0, N_y) \quad (9)$$

روشهای مختلفی را که در گسسته‌سازی زمانی به کار رفته‌اند می‌توان به دو گروه اصلی روش لغزشی و روشهای کوپل (مونولیتیک) دسته‌بندی کرد. روشهای نیمه‌ضمنی جزئی از روشهای کوپل هستند که در آنها تحلیل جریان در یک سیستم مرکب از معادلات پیوستگی همراه با جملات گرادیان فشار و جملات لزج معادلات اندازه حرکت در هر گام زمانی به صورت ضمنی انجام می‌شود. استفاده از گسسته‌سازی زمانی پیشرو اولر مرتبه یک برای جملات صریح و گسسته‌سازی زمانی پسرو اولر مرتبه سه برای جملات ضمنی، روش مد نظر این مقاله است. در این الگوریتم از روش کوپل استفاده می‌شود. در این رابطه معادله اندازه حرکت به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

سرعت در جهت‌های  $x$  و  $z$  به صورت شرایط متناوب در نظر گرفته شده است. سرعت و فشار کل میدان به دو بخش ثابت و نوسانی تقسیم شده و بنابراین میدان سرعت برابر است با حاصل جمع سرعت پایه و سرعت نوسانی (و فرض  $e_x$  به عنوان بردار پایه در راستای  $x$ ):

$$u_{tot}(x;t) = U(y)e_x + u(x;t) \quad (3)$$

میدان فشار کل برابر است با حاصل جمع عبارت خطی فشار در راستای  $x$  و فشار نوسانی:

$$p_{tot}(x;t) = x \frac{dP}{dx}(t) + p(x;t) = \Pi_x(t)x + p(x;t) \quad (4)$$

گرادیان میدان فشار برابر است با حاصل جمع گرادیان میدان فشار پایه و گرادیان فشار نوسانی:

$$\nabla p_{tot}(x;t) = \Pi_x(t)e_x + \nabla p(x;t) \quad (5)$$

و با جایگذاری از روابط ۳ و ۵ در رابطه ۱ داریم:

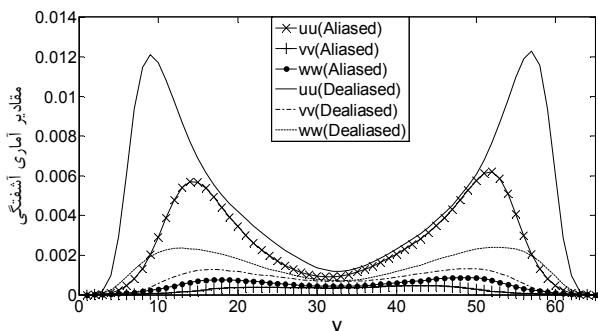
$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = \nu \nabla^2 u - u_{tot} \cdot \nabla u_{tot} + \left[ \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \Pi_x \right] e_x \quad (6)$$

### ۳- گسسته‌سازی مکانی و زمانی

انتخاب روش گسسته‌سازی مکانی در روش طیفی با توجه به هندسه مسأله و شرایط مرزی صورت می‌گیرد. به‌طور کلی در شرایط مرزی متناوب از سری فوریه و در محدوده‌های متناهی با شرایط غیرمتناوب از چندجمله‌ای چبیشیف استفاده می‌شود. از عوامل مؤثر بر انتخاب نحوه گسسته‌سازی زمانی نیز می‌توان دقت، پایداری، حجم ذخیره‌سازی و کارایی عملی روش را نام برد. در روش شبه طیفی گسسته‌سازی مکانی در جهت‌های افقی با استفاده از بسط سری فوریه و در جهت عمود بر دیواره با استفاده از بسط چبیشیف صورت می‌گیرد. به این ترتیب برای هر یک از توابع سرعت با توجه به تبدیل میدان سرعت از فضای فیزیکی به فضای طیفی در راستای  $x$  و  $z$  با استفاده از تبدیل فوریه داریم:

در راستای افقی و بسط چپیشیف در جهت عمود بر دیواره انجام و در گسسته‌سازی زمانی نیز روش SBDF3<sup>۱</sup> استفاده شد. نتایج حاصل بصورت مقادیر آشفتگی میانگین گیری شده در این روش ها ارائه شده است.

چنانچه در مقدمه نیز اشاره شد در تحلیل جریان به روشهای طیفی و شبه‌طیفی، تولید خطای همانندسازی و راهکار حذف آن همواره مد نظر پژوهشگران بوده است. در این تحقیق حذف همانندسازی با اعمال قانون ۲/۳ صورت گرفت. در این راستا برای نمونه، مقادیر آماری آشفتگی در تحلیل جریان با استفاده از ساختار چرخشی در حالت عادی (بدون حذف همانندسازی) و همچنین پس از اعمال قانون ۲/۳ در شکل ۲ نشان داده شده است. تفاوت این مقادیر در برخی موارد به حدود ۹۰ درصد نیز می‌رسد.



شکل ۲ مقایسه تأثیر همانندسازی در مقادیر آماری آشفتگی در الگوی چرخشی

در ادامه مقادیر آماری آشفتگی در شش ساختار پیشنهادی با اعمال قانون ۲/۳ ارائه شده است. در شکل ۳ تغییرات اندکی در مقادیر حداکثر و حداقل شدت آشفتگی  $\overline{uu}$  مشاهده میشود.  $\overline{uu}$  معرف میانگین مربعات نوسان سرعت در راستای جریان (x) در امتداد ارتفاع کانال (y) است. در محاسبه این مقادیر (شدت آشفتگی) از مؤلفه

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla q = \nu \nabla^2 u - N(u) + \left[ \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \Pi_x \right] \quad (10)$$

که در آن  $q \triangleq p + 1/2 u \cdot u$  است و همچنین عملگر خطی L و ثابت C به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L u \triangleq \nu \nabla^2 u$$

$$C \triangleq \left[ \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \Pi_x \right] e_x \quad (11)$$

و جمله غیرخطی  $u_{tot} \cdot \nabla u_{tot}$  در شش ساختار زیر نوشته می‌شود:

$$N(u) \triangleq \begin{cases} (\nabla \times u) \times u + U \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} e_x & \text{Rotational,} \\ u_{tot} \cdot \nabla u_{tot} & \text{Convection} \\ \nabla \cdot (u_{tot} u_{tot}) & \text{Divergence,} \\ \frac{1}{2} u_{tot} \cdot \nabla u_{tot} + \frac{1}{2} \nabla \cdot (u_{tot} u_{tot}) & \text{Skew-symmetric} \\ U \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} e_x & \text{Linearized,} \end{cases}$$

Alternating form (: equation 10 and 11 on alternating time steps)

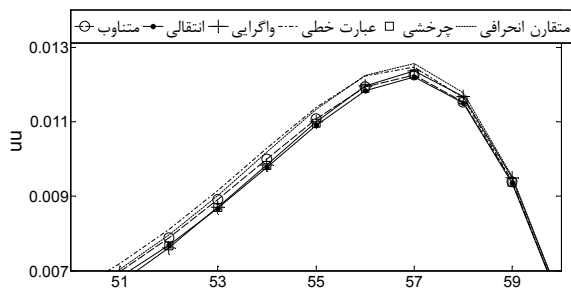
$$(12)$$

#### ۴- ارائه و تحلیل نتایج

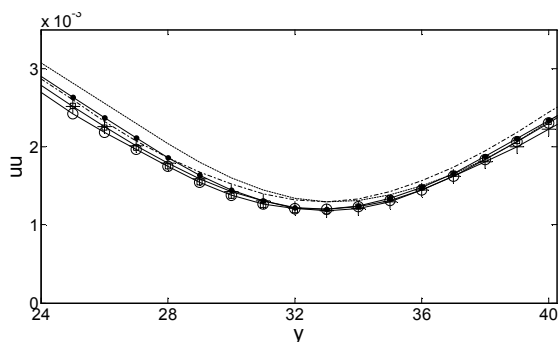
در این پژوهش تحلیل جریان سیال بین دو دیواره صلب ساکن<sup>۱</sup> با فرض وجود جریان پایه سهموی با استفاده از حل مستقیم معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر و شرایط مرزی متناوب در راستای x و z به روش DNS انجام شده است. زمان لازم برای تحلیل جریان با توجه به معیار گفته شده در Abe (2001) و همکاران برابر  $T = 300s$  (۱۵۰۰۰ گام زمانی) و میدان محاسباتی جریان  $\Omega = [0, 4\pi] \times [-1, 1] \times [0, 2\pi]$  که در شبکه نقاط  $128 \times 65 \times 128$  شبکه‌بندی شده، در نظر گرفته شد. گسسته‌سازی مکانی به روش شبه‌طیفی، در شش ساختار مختلف جمله غیرخطی و با استفاده از بسط سری فوریه

2. Third Order Backwards Difference Scheme

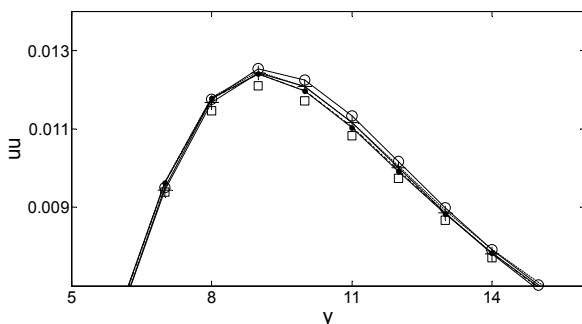
1. Poiseuille flow



الف - محدوده a

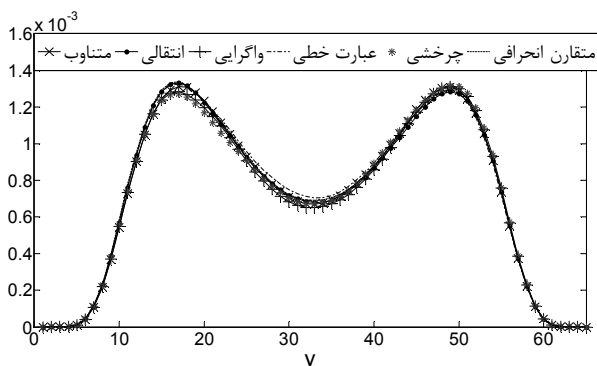


ب - محدوده b



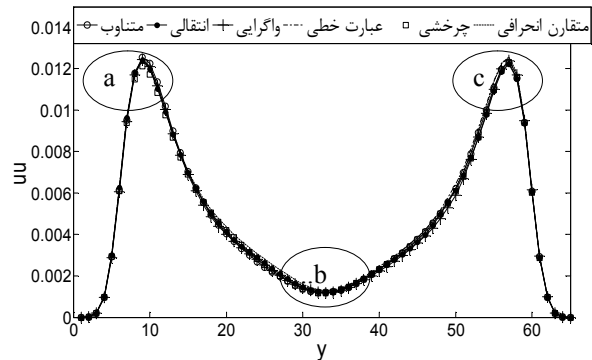
ج - محدوده c

شکل ۳ بزرگنمایی شدت آشفتگی در راستای جریان  $\overline{uu}$



شکل ۴ بزرگنمایی شدت آشفتگی در راستای قائم  $\overline{vv}$

آماري انحراف نسبي با میانگین گیری از نتایج کل شش ساختار، و ارائه حداکثر اختلاف از آن میانگین در هر روش استفاده شده است.



شکل ۳ شدت آشفتگی در راستای جریان  $\overline{uu}$

شکل ۴ بزرگنمایی در محدوده نقاط کلیدی c,b,a مربوط به شکل ۳ را برای وضوح بیشتر نشان می‌دهد. در شکل‌های ۵ و ۶ مقادیر آماری  $\overline{vv}$ ,  $\overline{ww}$  مربوط به شش ساختار فوق ارائه شده است.

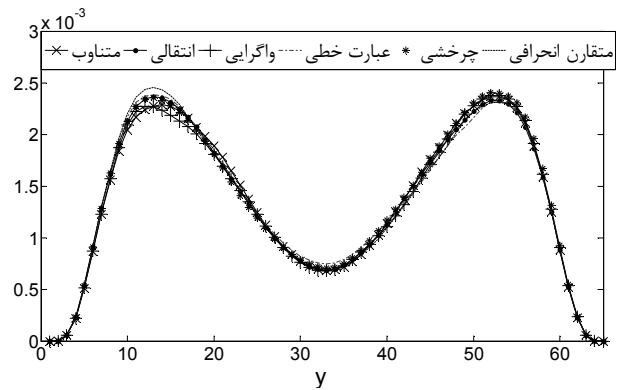
اختلاف بین مقادیر حداکثر و حداقل شدت آشفتگی  $\overline{uu}$  و  $\overline{vv}$ ,  $\overline{ww}$  و انحراف از میانگین مربوطه در جدول ۱ آورده شده است. بدین ترتیب بیشترین اختلاف حاصل در مقدار  $\overline{uu}$  در ساختار متقارن انحرافی در بخش میانی کانال برابر ۹۸/۹٪ در مقایسه با نتایج سایر روشها است. روش انتقالی با ۲/۱٪ حداقل اختلاف از میانگین مربوط را دارد. همچنین حداکثر اختلاف در مقدار  $\overline{vv}$  در روش متناوب برابر  $3.44e-05$  (۴/۶۳٪) است.

در حالی که حداقل اختلاف از میانگین در روش انتقالی برابر  $2.4e-05$  (۲/۰۱ درصد) است، ارزیابی مقدار  $\overline{ww}$  در مقطع کانال نیز نشان می‌دهد که در روش واگرایی با حداکثر اختلاف از میانگین ۴/۷۵٪ برابر ۰.۰۰۰۱۱ مشاهده شده و حداقل اختلاف از میانگین در روش انتقالی برابر  $4.4e-05$  (۲/۰۷ درصد) است.

در جدول ۲ نتایج مربوط به زمان انجام محاسبات، سرعت برشی دیواره، انرژی مقیاس شده کل و انحراف معیار سرعت ارائه شده است. با توجه به این جدول بیشترین مقادیر انرژی مقیاس شده کل و انحراف معیار استاندارد حاصل مربوط به ساختار متقارن انحرافی است. تفاوت مقادیر در این روش با سایر روشها در انرژی مقیاس شده کل، حداکثر حدود ۱/۵٪ و در انحراف معیار حداکثر برابر ۱/۲٪ است. مقادیر سرعت برشی دیواره در این روش تفاوت کمتری را حداکثر در حدود ۰/۵٪ نشان می‌دهد. با توجه به نتایج حاصل در ستون اول جدول ۲ همچنین مشاهده می‌شود که زمان انجام محاسبات در ساختار متقارن انحرافی تفاوت قابل ملاحظه‌ای با سایر الگوها (حدود دو برابر روشهای دیگر) دارد.

## ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، تحلیل جریان کانال مسطح با جریان پایه سهموی و با استفاده از الگوی شبیه‌سازی عددی مستقیم معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر و با توجه به روشهای متفاوت بسط جمله غیرخطی جابه‌جایی صورت گرفته است.



شکل ۶ شدت آشفتگی در راستای عرضی جریان  $WW$

جدول ۱ مقادیر اختلاف از میانگین شدت آشفتگی در الگوهای مختلف

الگو	$uu$	$vv$	$ww$
چرخشی	۲/۴۶٪ 2.96E-4	4/12% 4.8E-5	2/8% 6.3E-5
متقارن انحرافی	۹/۹۸٪ 2.32E-4	2/63% 3.12E-5	4/49% 1.05E-4
انتقالی	2/08% 2.08E-4	2/01% 2.4E-5	2/07% 4.4E-5
واگرایی	4/29% 2.64E-4	4/49% 3.2E-5	4/75% 1.1E-4
متناوب	3/02% 3.01E-4	4/63% 3.44E-5	4/14% 8.9E-5
عبارت خطی	2/16% 2.40E-4	2/29% 2.5E-5	4/33% 9.8E-5

جدول ۲ پارامترهای محاسبه شده آشفتگی و زمان اجرا در الگوهای مختلف

الگو	زمان محاسبات (s)	سرعت برشی دیواره (ut)	انحراف معیار استاندارد	انرژی مقیاس شده کل (u)
چرخشی	2.137e+04	0.0439775	0.104729	0.019676
متقارن انحرافی	5.65e+04	0.0441783	0.105915	0.0199884
انتقالی	3.278e+04	0.0440739	0.10466	0.019753
واگرایی	3.126e+04	0.0439704	0.10503	0.0196342
متناوب	3.636e+04	0.0439517	0.104943	0.0196932
عبارت خطی	1.874e+04	0.0440862	0.105426	0.0199947



عددی مستقیم به روش شبه‌طیفی با حذف همانندسازی پیشنهاد می‌شود.

### ۶- فهرست علائم

$C(u)$	عملگر ثابت معادله ناویر استوکس
$dt$	گام زمانی
$k_x$	طول میدان حل در جهت X در فضای طیفی
$k_z$	طول میدان حل در جهت Z در فضای طیفی
$L(u)$	عملگر خطی معادله ناویر استوکس
$N(u)$	عملگر غیرخطی معادله ناویر استوکس
$N_x$	تعداد نقاط در جهت X در فضای طیفی
$N_z$	تعداد نقاط در جهت Z در فضای طیفی
$p_{tot}(x;t)$	فشار کل میدان جریان
$p(x; t)$	فشار نوسانی متناوب
$q$	فشار اصلاحی
$Re_L$	عدد رینولدز اولیه
$Re_\tau$	عدد رینولدز اصطکاکی
$T_m$	m-امین جمله بسط چیشیف
$u(x)$	بردار سرعت
$u_{tot}(x;t)$	سرعت کل میدان جریان
$\hat{u}(k_x, y, k_z)$	ضرایب بسط فوریه سرعت $u$
$\tilde{u}(k_x, y, k_z)$	ضرایب بسط چیشیف سرعت $u$
$U(y)$	سرعت پایه
$u(x; t)$	سرعت نوسانی
$y_n$	نقطه n-ام در جهت Y
$\Pi_x(t)$	گرادیان میدان فشار پایه
$\Omega$	میدان محاسباتی
$\nu$	لزجت

### ۷- منابع

Abe, H., Kawamura, H., and Matsuo, Y. (2001). "Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to the Reynolds

با توجه به نتایج ارائه شده برای شدت آشفتگی، سرعت برشی دیواره، انرژی مقیاس شده کل و انحراف معیار مشاهده می‌شود که فقط در شدت آشفتگی نرمال  $\overline{uu}$  در الگوی متقارن انحرافی، تفاوت قابل ملاحظه‌ای با نتایج سایر ساختارها (در حدود ۱۰٪) مشاهده می‌شود و در سایر موارد این اختلاف کمتر از ۵٪ است. همچنین زمان اجرای این روش نیز با توجه به جدول ۲ بسیار بیشتر از سایر ساختارها است. لذا در صورت استفاده از شبه‌طیفی با حذف همانندسازی، ساختار متقارن انحرافی مزیتی بر سایر الگوها نداشته و فقط هزینه اجرایی بیشتری خواهد داشت

با توجه به زمان اجرای ساختارهای مختلف، روشهای چرخشی و عبارت خطی شده در مقایسه با سایر روشها، به‌ویژه الگوی متقارن انحرافی مناسبتر به نظر می‌رسد. با توجه به مقادیر مشابه پارامترهای محاسبه شده آشفتگی و مقادیر آشفتگی میانگین‌گیری شده  $\overline{uv}, \overline{vw}, \overline{uw}$  در این شش ساختار (جدول‌های ۱ و ۲) معیار انتخاب الگوی مناسب، حجم حافظه مورد نیاز و به بیانی دیگر زمان اجرای برنامه است. این زمان در روش متقارن انحرافی حداکثر بوده و در روش عبارت خطی شده حداقل است. از آنجا که پایداری روش عبارت خطی شده تضمین شده نیست و در این ساختار ویژگی بقایی انرژی حفظ نمی‌شود، گزینه مناسبی در تمامی شرایط نیست. لذا روش چرخشی با زمان اجرای  $2.137e+04$  ثانیه مد نظر قرار می‌گیرد. استفاده از این الگوریتم در مقایسه با الگوریتم متقارن انحرافی موجب صرفه‌جویی زمانی ۶۲٪ می‌شود. در حالت کلی الگوی چرخشی از نظر اقتصادی، پایداری و به‌علت ویژگیهای ممتاز بقایی انرژی و مزایای الگوریتمی، به‌عنوان ساختار مناسب برای شبیه‌سازی

- Kawamura, H., Abe, H., and Matsuo, Y. (1999). "Direct numerical simulation of turbulence by parallel computation", *Parallel Computational Fluid Dynamics*, Lin et al., eds., North-Holland, Amsterdam, pp. 3–9.
- Kim, J. (1990). "Collaborative testing of turbulence models," *Data Disk*. No. 4.
- Kim, J., Moin, P., Moser, R. (1987). "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number", *J. Fluid Mech.*, 177, pp. 133-166.
- Kuroda, A., Kasagi, N., and Hirata, M. (1989). "A direct numerical simulation of the fully developed turbulent channel flow at a very low Reynolds number", *Int. Symp. Computational Fluid Dynamics*, Nagoya, pp. 1174–1179.
- Moser R.D., Moin P. (1987). "The effects of curvature in wall-bounded turbulent flows", *J. Fluid Mech.*, 175, pp. 479–510.
- Moser, R. D., Kim, J., and Mansour, N. N. (1999). Direct numerical simulation of turbulent channel flow up to  $Re_\tau=590$ ", *Phys. Fluids*, 11, pp. 943–945.
- Olshanskii, M., Layton, W., Manica, C.C., Neda, M. and G.Rebholz, L. (2009). "On the accuracy of the rotation form in simulations of the Navier-Stokes equations", *Journal of Computational Physics*, 228, pp. 3433–3447.
- Patterson, G. S., Orszag, S. A. (1972). "Numerical simulation of three dimensional homogeneous isotropic turbulence", *Phys. Rev. Lett.*, 28, pp. 76–79.
- Zang, T. A. (1991). "On the rotation and skew-symmetric forms for incompressible flow simulations", *Appl. Num. Math.*, 7, pp. 27–40.
- Zang, T. A. (1990). "Spectral methods for simulations of transition and turbulence", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 80(1-3).
- number dependence", *J. Fluid Engineering*, 123, pp. 382–393.
- Antonia, R. A., and Kim, J. (1994). "Low-Reynolds-Number effects on nearwall turbulence", *J. Fluid Mech.*, 276, pp. 61–80.
- Boyd, J.P. (2001). *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Dover Pub., Mineola.
- Gresho, P.M. (1991). "Some current CFD issues relevant to the incompressible Navier-Stokes equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 87(2-3), pp. 201-252.
- Horiuti, K., Itami, T., (1998). "Truncation error analysis of the rotation form of convective terms in the Navier–Stokes equations." *J. Comput. Phys.*, 145, 671–692.
- Hoyas, S. and Jim'enez, J. (2006). "Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re_\tau = 2000$ ", *Phys. of Fluids.*, 18, p. 01172
- Iwamoto, K., Kasagi, N., Suzuki, Y. (2005). "Direct numerical simulation of turbulent channels Flow at  $Re_\tau = 2320$ ", *Proc 6<sup>th</sup> Symposium Smart Control of Turbulence*, Tokyo.
- Kasagi, N., Tomita, Y., and Kuroda, A. (1992). "Direct numerical simulation of passive scalar field in a turbulent channel flow", *ASME J. Heat Transfer*, 114, pp. 598–606.
- Kawamura, H., Ohsaka, K., Abe, H., and Yamamoto, K. (1998). "DNS of turbulent heat transfer in channel flow with low to medium-high Prandtl number fluid", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 19, pp. 482–491.
- Kawamura, H., Abe, H., and Matsuo, Y. (1999). "DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects", *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 20, pp. 196–207.
- Kawamura, H., (1998). "Direct numerical simulation of turbulence by parallel computation." *Proc. 10th Int. Conf. Parallel CFD*, 19–21.