

الگوریتم عددی ضمنی بر روی شبکه منحنی الخط برای شبیه‌سازی جریانهای سطح آزاد

میترا جوان^۱، مسعود منتظری نمین^{۲*}، سید علی اکبر صالحی نیشابوری^۳

۱- دانشجوی دکتری دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

۲- استادیار دانشکده فنی، دانشگاه تهران

۳- استاد دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس

* تهران، صندوق پستی ۴۵۶۳ - ۱۱۱۵۵

naminmm@yahoo.com

چکیده- شبیه‌سازی عددی جریانهای با مرز آزاد در کاربردهای عملی مانند هیدرودینامیک کشتی از اهمیت خاصی برخوردار است. در این مقاله جزئیات توسعه یک مدل عددی دو بعدی در قائم، به منظور شبیه‌سازی جریانهای سطح آزاد دائمی و غیر دائمی با استفاده از توزیع فشار غیرهیدروستاتیک ارائه شده است. در این مدل معادلات رینولدز و شرط مرزی سینماتیکی سطح آزاد همزمان حل شده و تراز سطح آب و میدان فشار و سرعت با هم محاسبه می‌شوند. در فضای محاسباتی، مؤلفه‌های دکارتی سرعت و فشار در مرکز و شارهای حجمی در وسط وجوه حجم کنترل تعریف شده است. برای حل معادلات ممتد غیر دائمی از روش اصلاح فشار زیرمجموعه روش تجزیه زمانی و برای محاسبه شارها در وجوه حجم کنترل از روش Rhie and Chow (1983) استفاده شده و معادله پواسن اصلاح فشار ناشی از معادله پیوستگی با روش سیستم بلوکهای سه قطری حل شده است. جزئیات نتایج عددی شبیه‌سازی سطح آزاد موج به وجود آمده روی کانال باز با مانع در بستر و موجهای استوکس با دامنه کوتاه ارایه شده است. نتایج نشان می‌دهد که این الگوریتم عددی توانایی پیشگویی مناسب سطح آزاد را داشته و برای کاربردهای عملی قابل استفاده است.

کلید واژگان: سطح آزاد، شبیه‌سازی عددی، جریان غیر دائمی، جریان آشفته، روش تجزیه زمانی.

۱- مقدمه

شبیه‌سازی عددی جریانهای با مرز آزاد در کاربردهای عملی مانند هیدرودینامیک کشتیها (Alessandrini et al., 1994)، مسائل کیفیت آب رودخانه‌ها، خورها و سواحل و کاربردهای عملی دیگری مانند فناوری اندود (Sackinger, 1996) از اهمیت خاصی برخوردار است. روشهای عددی استفاده شده در مدل‌های موجود برای شبیه‌سازی سطح آزاد آب را می‌توان به دو دسته زیر تقسیم کرد:

الف- روشهای با شبکه ثابت که در آنها معادلات حاکم در فضای فیزیکی بر روی یک شبکه ثابت (معمولا دکارتی) انفصال یافته و سطح آزاد در درون شبکه حرکت می‌کند. در این روش با استفاده از یک کمیت اسکالر، محل سطح آزاد معین می‌شود. از میان روشهای به‌کار رفته در این دسته می‌توان به روشهای MAC (Welch & Harlow, 1965) و VOF (Hirt et al., 1981) اشاره کرد. در روش MAC از

به حل جریان وارد کار می‌شود (Hodges, 1997). به همین دلیل در ابتدا مدل‌های عددی با استفاده از روش صریح شبکه متحرک برای شبیه‌سازی سه‌بعدی سطح آزاد ارائه شد (Miyata et al., 1992 و Dommermuth, 1993). مدل‌های عددی بالا برای شبیه‌سازی تغییر شکلهای کوچک در سطح آزاد مناسب است. با توجه به پایداری عددی روش‌های ضمنی شبکه متحرک، تلاش‌هایی برای شبیه‌سازی میدان جریان و سطح آزاد با استفاده از این روش‌ها انجام شده است. (Farmer et al. (1994 یک مدل عددی سه‌بعدی دائمی را با استفاده از روش‌های ضمنی شبکه متحرک برای شبیه‌سازی میدان جریان و سطح آزاد ارائه کردند. (Loh (1987 و Rasmussen, Lugt (1992 و Ohring و Hino et al. (1993 مدل‌های عددی دو بعدی و غیر دائمی را با استفاده از روش‌های ضمنی شبکه متحرک برای شبیه‌سازی میدان جریان و سطح آزاد ارائه کردند که ظاهراً الگوریتم استفاده شده را در عمل نمی‌توان به مدل‌های سه‌بعدی توسعه داد (Hodges, 1997).

در راستای توسعه روش‌های ضمنی شبکه متحرک در مدل‌های سه بعدی غیر دائمی (Casulli (1998 و Stelling معادلات ناویر استوکس را در سیستم مختصات دکارتی و در یک شبکه جابه‌جا شده با استفاده از یک روش گام جزئی نیمه ضمنی در زمان برای شبیه‌سازی جریان‌های سطح آزاد با استفاده از روش ضمنی شبکه متحرک در دو مرحله حل کردند. (Casulli (1999 به منظور بهبود روش فوق به‌طور ضمنی شرط مرزی سینماتیکی سطح آزاد آب را در مرحله دوم نیز وارد کرد. دقت الگوریتم ارائه شده بالا بوده، اما نیازمند تلاش محاسباتی اضافی قابل توجهی است (Casulli, 1999). (Namin et al. (2001 یک الگوریتم عددی ضمنی و دوبعدی را برای شبیه‌سازی سطح آزاد با استفاده از روش ضمنی شبکه متحرک ارائه کردند که در آن پس از انفصال معادلات حاکم (معادلات ممتتم، پیوستگی و شرط مرزی سینماتیکی سطح آزاد) در سیستم مختصات دکارتی، انتگرال‌گیری ضمنی در زمان

ذرات مجازی برای تعیین سطح آزاد استفاده می‌شود. این ذرات مجازی در طی مراحل حل، در روی سیال باقی مانده و ردیابی آنها در هر لحظه، سطح آزاد را مشخص می‌سازد. در روش VOF کسر حجمی سیال، در هر سلول از طریق حل معادله انتقال برای یک کمیت اسکالر در کل میدان به دست می‌آید و بدین ترتیب در هر لحظه، محل سطح آزاد را می‌توان تعیین کرد. در این روش‌ها محدوده میدان حل بزرگتر از میدان سیال انتخاب می‌شود. روش VOF مشابه روش MAC علاوه بر هزینه محاسباتی زیاد، دارای محدودیت شدید پایداری است (Mayer et al., 1998 و Lin & Li, 2002)، بنابراین در مسائل با مقیاس بزرگ در زمان و مکان غیر قابل استفاده است.

ب- روش‌های با شبکه متحرک که در آنها سطح آزاد در یک مرز شبکه‌بندی قرار داده شده و با حرکت سطح آزاد در هر گام زمانی، مرز شبکه مطابق سطح آزاد تغییر می‌یابد. بنابراین در این روش‌ها نقاط شبکه در خارج از سیال وجود ندارد و شبکه بندی نیز در هر مرحله از محاسبات بازسازی می‌شود. روش‌های فوق به دو دسته ضمنی و صریح تقسیم شده است. در روش صریح شرط مرزی سینماتیکی در زمان، بدون مراجعه به سرعت گام زمانی $n+1$ انتگرال‌گیری می‌شود. بنابراین شرط مرزی سینماتیکی، فقط با مقادیر سرعت گام زمانی n حل می‌شود و به‌طور مؤثری حرکت سطح آزاد و تولید شبکه‌بندی از حل معادلات ناویر استوکس جدا شده است. اما روش ضمنی به‌طور همزمان مجموعه کوپل شده معادلات شامل معادلات ناویر استوکس، شرایط مرزی دینامیکی و سینماتیکی سطح آزاد را حل می‌کند. مزیت روش ضمنی آن است که حرکت سطح آزاد به وسیله شرط مرزی سینماتیکی اتصال یافته به حل جریان و شرط مرزی دینامیکی معین می‌شود. به همین علت این روش دقیق‌تر و به‌طور عددی پایدارتر است. اما پیچیدگی محاسباتی قابل توجهی در کوپل ضمنی حرکت سطح آزاد

پیوستگی حل و تراز سطح آب با میدان سرعت و فشار محاسبه شده است.

۲- معادلات حاکم

به منظور محاسبه میدان جریان از معادلات ممتنم و پیوستگی متوسط‌گیری شده رینولدز استفاده شده است. معادلات در حالت عمومی به صورت زیر است (Wu et al., 2000):

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i u_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \right) \quad (2)$$

که در آنها u_i ($i = 1, 2$) مؤلفه‌های سرعت: φ فشار به علاوه جملهٔ ثقل $(\varphi = P + \gamma \eta)$: ρ چگالی سیال است. تنشهای آشفتگی (τ_{ij}) از مدل آشفتگی $k - \varepsilon$ (Rodi, 1993) محاسبه شده است. این مدل آشفتگی برای محاسبه τ_{ij} از رابطه لزجت گردابه‌ای استفاده می‌کند:

$$\tau_{ij} = \rho v_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \quad \text{با } v_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3)$$

که در آن k انرژی جنبشی آشفتگی و ε میزان اتلاف آن است که از معادلات زیر محاسبه میشوند:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial u_j k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G - \varepsilon \quad (4)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial u_j \varepsilon}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + (c_{\varepsilon 1} G - c_{\varepsilon 2} \varepsilon) \frac{\varepsilon}{k} \quad (5)$$

که جمله $G = v_t \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)$ تولید انرژی جنبشی آشفتگی بوده و مقادیر استاندارد برای ضرایب مدل آشفتگی بشرح زیر است:

$c_\mu = 0.09, c_{\varepsilon 1} = 1.44, c_{\varepsilon 2} = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3$
 شکل بقایی معادلات حاکم در سیستم مختصات منحنی الخط به صورت زیر است:

برای معادله پیوستگی و جملات جابه‌جایی و پخش معادلات ممتنم و انتگرال‌گیری نیمه ضمنی در زمان را برای جمله فشار معادلات ممتنم و مؤلفه‌های سرعت در شرط سینماتیکی استفاده کردند. به علت استفاده از سیستم مختصات دکارتی در مدل‌های عددی ارائه شده، معمولاً سطح آزاد شبکه محاسباتی را قطع می‌کند که این سبب مشکلاتی در اعمال شرط مرزی فشار در روی سطح آزاد و در نتیجه اثر بر دقت سرعت‌های محاسبه شده نزدیک سطح آزاد می‌شود (Lin & Li, 2002). برای حل این مسأله سیستم مختصات سیگما یا سیستم مختصات منحنی الخط را می‌توان به کار برد که در آنها به علت انتقال معادلات از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی مستطیلی، همواره مرز سطح آزاد در روی مرز فضای محاسباتی قرار می‌گیرد و بدین ترتیب می‌توان با استفاده از این سیستم مختصات نتایج دقیق‌تری برای میدان جریان به دست آورد (Lin & Li, 2002). (Wu & Yuan (2004) با انتقال معادلات حاکم به سیستم مختصات سیگما و به دست آوردن رابطه فشار غیر هیدروستاتیک برای سلولهای سطح آزاد، الگوریتم دو بعدی ارائه شده توسط Namin et al. (2001) را توسعه دادند. لازم است ذکر شود که انتقال به مختصات سیگما در جریانهای با مرز دارای شیب تند، خطاهای عددی را در محاسبه گرادیان فشار و پخش در راستای مرز دارای شیب تند به وجود می‌آورد. در این مقاله جزئیات توسعه الگوریتم عددی برای حل مسائل جریان سطح آزاد دو بعدی در قائم ارائه شده که برای حل معادلات رینولدز غیر دائمی در سیستم مختصات منحنی الخط از شبکه‌ای جابه‌جا نشده و روش اصلاح فشار روش تجزیه زمانی استفاده شده و با روش Rhie and Chow (1983) شار حجمی در وجوه را به مؤلفه‌های سرعت دکارتی مرکز سلول اتصال می‌دهد. در این الگوریتم، با روشی ساده‌تر رابطه‌ای میان شرط مرزی سینماتیکی سطح آزاد و میدان جریان برقرار شده و شرط مرزی سینماتیکی سطح آزاد همزمان با معادلات ممتنم و

گسسته سازی معادلات حاکم با طرح صریح زمانی جهت ترم فشار و ترمهای پخش و و جابجایی به صورت زیر می باشد:

$$\frac{\partial U_m^{n+1}}{\partial \xi_m} = 0 \quad (12)$$

$$J^{-1} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = C_i^n + R_i(\varphi^n) + D_i^n \quad (13)$$

$$J^{-1} \frac{k^{n+1} - k^n}{\Delta t} = C_k^n + D_k^n + G^n - \varepsilon^n \quad (14)$$

$$J^{-1} \frac{\varepsilon^{n+1} - \varepsilon^n}{\Delta t} = C_\varepsilon^n + D_\varepsilon^n + \left(c_{\varepsilon 1} G^n - c_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^{n+1} + \varepsilon^n}{2} \right) \left(\frac{\varepsilon^n}{k^n} \right) \quad (15)$$

که در آنها بالا نویس n و $n+1$ به ترتیب نشان دهنده گام زمانی قبلی و بعدی و روابط جمله های جابجایی (C)، جمله های فشار (R_i) و جمله های پخش (D) به صورت زیر است:

$$C_i = -\frac{\partial(U_m u_i)}{\partial \xi_m}, C_k = \frac{\partial(U_m k)}{\partial \xi_m}, C_\varepsilon = \frac{\partial(U_m \varepsilon)}{\partial \xi_m} \quad (16)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(v_t G G^{mn} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right), D_k = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{v_t}{\sigma_k} G G^{mn} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right),$$

$$D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(\frac{v_t}{\sigma_\varepsilon} G G^{mn} \frac{\partial}{\partial \xi_n} \right) \quad (18)$$

$$R_i = -\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial J^{-1} u_i}{\partial t} + \frac{\partial F_{im}}{\partial \xi_m} = 0 \quad (7)$$

که در آن

$$F_{im} = U_m u_i + J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \varphi - v_t G G^{mn} \frac{\partial u_i}{\partial \xi_n} \quad (8)$$

که روابط J^{-1} (معکوس ژاکوبی یا حجم سلول)، U_m شار حجمی عمود بر سطح دارای ξ_m ثابت و $G G^{mn}$ ضریب پخش هندسی به صورت زیر است:

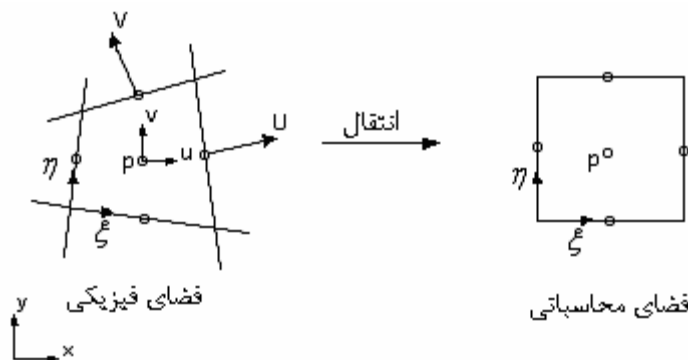
$$U_m = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} u_j \quad (9)$$

$$J^{-1} = \det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right) \quad (10)$$

$$G G^{mn} = J^{-1} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_n}{\partial x_j} \quad (11)$$

۳- روش عددی

شکل ۱ طرحی را از حجم کنترل شبکه جابه جا نشده و انتقال آن به فضای محاسباتی نشان می دهد. مؤلفه های سرعت دکارتی و فشار در مرکز و شارهای حجمی وسط وجوه متناظر حجم کنترل در فضای محاسباتی تعریف شده است (شکل ۱).



شکل ۱ حجم کنترل در شبکه جابه جا نشده و انتقال آن به فضای محاسباتی

کنترل U_m است. روش درونیابی خطی وزنی ساده بین دو مؤلفه سرعت، به نوسانات خانه شطرنجی در سرعت و فشار منتهی می‌شود (صالحی نیشابوری، ۱۳۷۸). برای موفقیت محاسبات به پیوندی قوی میان فشار و سرعت انتقالی نیاز می‌باشد. در این تحقیق برای جلوگیری از عدم ارتباط سرعت و فشار برای محاسبه U_m از درونیابی خاص (Chow and Rhie and (1983) (۱۹۸۳) استفاده شده است:

$$U_m = U_m^* + G^{ij} \left[\left(\frac{\partial \varphi^n}{\partial \xi^j} \right) - \left(\frac{\partial \varphi^n}{\partial \xi^i} \right) \right] \Delta t \quad (24)$$

که در آن ابتدا $\partial \varphi^n / \partial \xi^i$ در مرکز حجم کنترلهای اطراف وجه حجم کنترل محاسبه و سپس U_m^* و $\left(\frac{\partial \varphi^n}{\partial \xi^j} \right)$ به ترتیب با استفاده از درونیابی خطی u_i^* و $\partial \varphi^n / \partial \xi^j$ محاسبه می‌شوند. با جایگذاری معادله (۲۳) در معادله (۱۲) معادله پواسن تصحیح فشار به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_m} \left(GG^{mn} \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi_n} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial U_m}{\partial \xi_m} \quad (25)$$

معادله فوق فقط دارای تانسورضرایب پخش هندسی GG^{mn} است. برای حل این معادله بیضوی از روش سیستم بلوکهای سه قطری استفاده شده است.

۴- شرایط مرزی

برای حل معادلات بیضوی گسسته شده شرایط مرزی در مرزهای دامنه محاسباتی مورد نیاز است. در مرز ورودی و صلب از شرط درিশله برای متغیرهای u_i ، u_i^* و مشخصات آشفتنگی (k و ε) استفاده شده و در مرز صلب تنش برشی دیوار از تابع دیوار محاسبه شده است. در مرز خروجی با فرض جریان توسعه یافته شرایط مرزی متغیرهای u_i ، u_i^* ، k و ε با شرط نیومن $(\partial/\partial n = 0.0)$ تعیین شده است.

به استثناء جمله‌های جابه‌جایی، همه مشتقات فضایی با تفاضل مرکزی مرتبه دوم تقریب زده شده است. گسسته‌سازی جمله جابجایی C_i با طرح آپ ویند مرتبه دوم و C_k و C_ε با استفاده از طرح قانون توانی انجام شده است. استفاده از روش اصلاح فشار زیر مجموعه روش تجزیه زمانی برای معادله (۱۳) منجر به مراحل پیشگویی و تصحیح زیر می‌شود:

- مرحله پیشگویی

$$u_i^* - u_i^n = \frac{\Delta t}{J^{-1}} (C_i^n + R_i(\varphi^n) + D_i^n) \quad (19)$$

- مرحله اصلاح

$$u_i^{n+1} - u_i^* = \frac{\Delta t}{J^{-1}} [R_i(\varphi')] \quad (20)$$

که در آن u_i^* سرعت میانه نامیده شده و به وسیله آن پیوستگی در یک حجم کنترل برقرار نمی‌شود. ارتباط φ' (اصلاح فشار) با φ^{n+1} به صورت زیر است:

$$\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi' \quad (21)$$

مقادیر اصلاح فشار با حل معادله پواسن تصحیح فشار شرح داده شده زیر محاسبه می‌شود. با استفاده از معادله مرحله تصحیح روش تجزیه زمانی (۲۰) می‌توان مؤلفه‌های سرعت دکارتی در وجوه حجم کنترل را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$(u_i^{n+1})_{face} = (u_i^*)_{face} - \Delta t \left(\frac{\partial \xi_m}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi_m} \right)_{face} \quad (22)$$

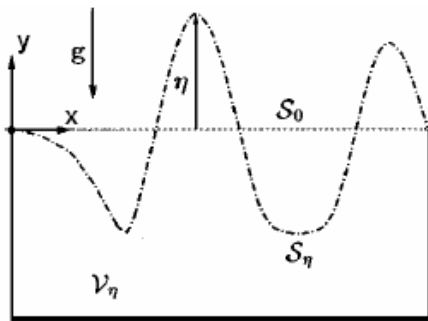
با ترکیب معادلات (۲۲) و (۹) معادله‌ای برای محاسبه U_m^{n+1} به دست می‌آید:

$$U_m^{n+1} = U_m - \Delta t \left(GG^{mn} \frac{\partial \varphi'}{\partial \xi_n} \right) \quad (23)$$

که در آن U_m و U_m^{n+1} در روی وجوه حجم کنترل قرار دارند. با توجه به اینکه از روش اصلاح فشار در شبکه جابه‌جا نشده استفاده شده و مؤلفه‌های سرعت دکارتی در محل نقاط گره‌های اسکالر ذخیره می‌شوند، نیاز به نوعی درونیابی سرعت برای تخمین شار انتقالی در وجوه حجم

گرفتن $\varphi^{n+1} = \varphi^n + \varphi'$ جایگذاری می‌شود. لازم است ذکر شود که مؤلفه‌های سرعت مماسی در روی سطح آزاد با استفاده از شرط دینامیکی محاسبه می‌شود. پس از حل معادله پواسن اصلاح فشار با استفاده از φ_{fs} محاسبه شده در سطح آزاد محل تراز سطح آزاد به صورت زیر تغییر می‌یابد:

$$\eta = \frac{\varphi_{fs}}{\gamma} \quad (32)$$



شکل ۲ موقعیت η نزدیک سطح آزاد جریان

۵- الگوریتم حل

الگوریتم حل برای شبیه‌سازی میدان جریان و سطح آزاد در مدل عددی با استفاده از روش اصلاح فشار در هر گام زمانی را به صورت زیر می‌توان نوشت:

۱- شبکه بندی میدان جریان؛

۲- محاسبه فشار سطحی از معادله (۲۹)؛

۳- حل معادله (۱۹) برای تعیین سرعت‌های میانه؛

۴- محاسبه U_m در و جوه حجم کنترل با استفاده از معادله (۲۴)؛

۵- حل معادله (۲۵) با روش سیستم بلوکهای سه قطری برای محاسبه φ' ؛

۶- محاسبه u_i^{n+1} از معادله (۲۰)، φ^{n+1} از معادله (۲۱) و U_m^{n+1} از معادله (۲۳)؛

۷- محاسبه k^{n+1} و ε^{n+1} به ترتیب از معادلات (۱۴) و (۱۵)؛

به منظور شبیه‌سازی سطح آزاد در مدل، شرط مرزی دینامیکی (تعداد نیرو در دو طرف مرز) و شرط مرزی سینماتیکی (عدم خروج سیال از مرز) اعمال شده است. شرط دینامیکی به سبب نیاز به محاسبه کشش سطحی و نیروهای سیالهای دو طرف مرز آزاد بسیار پیچیده است، اما در هوای ساکن نیروی برشی هوا و کشش سطحی قابل صرف‌نظر است. بنابر این شرط مرزی دینامیکی، به وجود فشار اتمسفر و صفر بودن تنش برشی ناشی از سرعت‌های سطحی در مرز آزاد کاهش می‌یابد:

$$P_{fs} = P_{atm} \quad (P_{atm} = 0.0) \quad (26)$$

$$\tau_{wfs} = 0.0 \quad (\partial U_{par} / \partial n_{fs} = 0.0) \quad (27)$$

که در آن P_{atm} فشار اتمسفر، U_{par} و n_{fs} به ترتیب بردار سرعت موازی سطح آزاد و راستای عمود بر آن است. در معادلات ممتنم از φ با تعریف زیر استفاده شده است:

$$\varphi = P + \gamma \eta \quad (28)$$

این رابطه در سطح آزاد با توجه به رابطه (۲۶) به صورت زیر است:

$$\varphi_{fs} = \gamma \eta \quad (29)$$

که در آن η تراز محلی سطح آزاد نسبت به مبدأ دلخواه است. موقعیت η نزدیک سطح آزاد جریان در شکل ۲ نشان داده شده است. شرط سینماتیکی بر روی سطح آزاد (توصیف کننده حرکت تراز آب) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$v = \frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (30)$$

با توجه به رابطه (۲۹) به دست آورده شده با شرط دینامیکی سطح آزاد، شرط سینماتیکی سطح آزاد به فشار بر روی آن ارتباط داده می‌شود:

$$v = \frac{1}{\gamma} \frac{D\varphi}{Dt} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \quad (31)$$

در هنگام تشکیل معادله پواسن اصلاح فشار، شار عمودی در هنگام تشکیل معادله پواسن اصلاح فشار، شار عمودی $(U_2)_{i,j+1/2}^{n+1}$ تعریف شده در روی وجه سلول (i, j) مجاور سطح آزاد با استفاده از رابطه فوق و در نظر

در این صورت می‌توان پرید و تندی موج (C) در مرز چپ را از روابط زیر محاسبه کرد (Sorensen, 1997):

$$C = \sqrt{\frac{gL}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)} \quad (35)$$

$$T = \frac{L}{C} \quad (36)$$

که با توجه به طول موج انتخابی ۲۵ متر مقادیر تندی و پرید موج به ترتیب $1/24 \text{ ms}^{-1}$ و ۶ و ۴ s به دست می‌آید. نتیجه تحلیلی تراز سطح آزاد به وجود آمده بر اثر موج سینوسی ورودی با فرض غیر لزج بودن جریان به صورت زیر است (Sorensen, 1997):

$$\eta = \frac{H}{2} \cos 2\pi\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right) + \frac{\pi H^2}{4L} \cos 4\pi\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right) \quad (37)$$

به منظور حساسیت‌سنجی مدل عددی نسبت به تغییر تعداد گره‌ها در راستای افقی و قائم (تغییر nx و ny)، در ابتدا با ثابت نگاه داشتن تعداد گره‌ها در راستای قائم ($ny = 30$) و تغییر تعداد گره‌ها در راستای افقی (nx) اثر تغییر nx بر نتایج سطح آزاد آب شبیه‌سازی شده بررسی شده است. همانگونه که در شکل ۳ مشاهده می‌شود با افزایش گره‌ها به بیش از ۷۰۰ گره در راستای افقی تغییر نتایج سطح آزاد آب شبیه‌سازی شده ناچیز خواهد بود. بنابر این در این شبیه‌سازی، انتخاب ۷۰۰ گره در راستای افقی مناسب است. سپس با ثابت نگاه داشتن این تعداد گره در راستای افقی ($nx = 700$)، تعداد گره‌ها در راستای قائم تغییر داده شده که با تعداد بیش از ۳۰ گره در راستای قائم، تغییری در نتایج سطح آزاد شبیه‌سازی شده مشاهده نمی‌شود (شکل ۴). لازم است ذکر شود که در شکل‌های ۳ و ۴ اثر تغییر شبکه‌بندی بر نتایج سطح آزاد آب شبیه‌سازی شده در ۴۰ متر دوم کانال در $t = 77.98 \text{ s}$ نشان شده است. بنابراین در این شبیه‌سازی تعداد ۷۰۰ و ۳۰ گره به ترتیب در راستای افقی و قائم انتخاب شده است. با توجه به آنکه گسسته‌سازی جمله تغییرات زمانی معادلات حاکم با طرح تفاضلی

۸- محاسبه تراز سطح آزاد با استفاده از معادله (۳۲)؛
۹- پایان گام زمانی فعلی.

برای ادامه روند حل برای شبیه‌سازی میدان جریان و سطح آزاد در گام زمانی بعد، به مرحله یک بازگشته و فرایند حل مشابه این گام زمانی تکرار می‌شود. با انجام مراحل الگوریتم فوق، میدان جریان و سطح آزاد در هر گام زمانی محاسبه می‌شود.

۶- کاربرد مدل

با استفاده از نمونه‌های تحلیلی و آزمایشگاهی زیر به ترتیب نتایج الگوریتم عددی برای شبیه‌سازی سطح آزاد و میدان جریان در حالت‌های غیر دائمی و دائمی بررسی شد:
- موج استوکس با دامنه کوتاه؛
- کانال باز با مانع در بستر.

۷- موج استوکس با دامنه کوتاه

امواج پدیده‌های مؤثر غالب در نواحی ساحلی بوده و میدان جریان و پروفیل سطحی آنها با زمان و مکان تغییر می‌یابد. در این بخش توانایی مدل عددی دو بعدی برای شبیه‌سازی موج‌های استوکس با دامنه کوتاه آب عمیق بررسی شد. در این شبیه‌سازی موج‌های استوکس با دامنه کوتاه از سمت چپ کانالی با طول ۱۰۰۰ متر و تراز سطح آب اولیه ۱۵ متر منتشر شده و در مرز سمت چپ برای شبیه‌سازی مولد موج سرعت به صورت توزیع سینوسی در زمان قرار داده شده است (Sorensen, 1997):

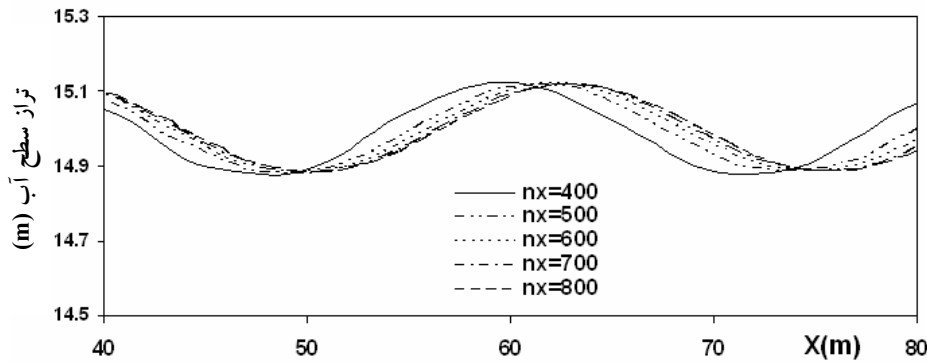
$$u = \frac{gHT}{2L} \frac{\cosh(2\pi(y+d)/L)}{\cosh(2\pi d/L)} \cos 2\pi\left(-\frac{t}{T}\right) \quad (33)$$

$$v = \frac{gHT}{2L} \frac{\cosh(2\pi(y+d)/L)}{\sinh(2\pi d/L)} \sin 2\pi\left(-\frac{t}{T}\right) \quad (34)$$

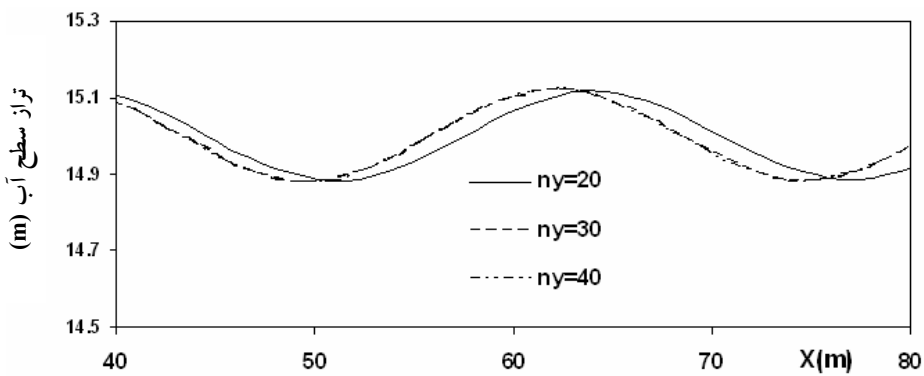
که در آنها u و v به ترتیب مؤلفه سرعت افقی و قائم در مرز سمت چپ، d تراز اولیه سطح آب در کانال، g شتاب ثقل، t زمان و H, L, T به ترتیب طول، دامنه و پرید موج منتشر شده از مرز سمت چپ است. با انتخاب طول موج برابر ۲۵ متر، d/L بزرگتر از ۰/۵ می‌شود که

مشخص می‌شود که طول و دامنه و تندی ($C = L/T$) موج پیش‌بینی شده در مقایسه با حل تحلیلی مطابقت مناسبی دارد.

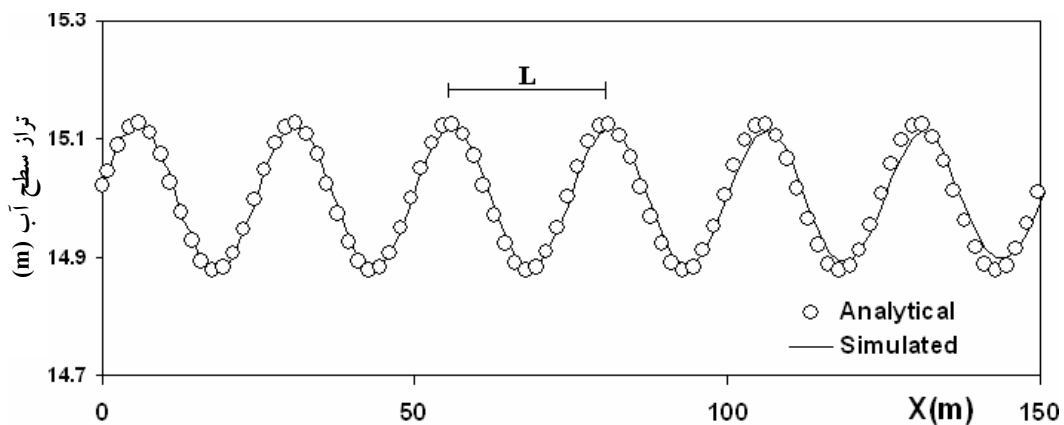
مرتبه اول است، لذا در شبیه‌سازی فوق Δt برابر $0/002s$ انتخاب شده است. شکل ۵ نتایج شبیه‌سازی عددی تراز سطح آب در 150 متر ابتدای کانال را در $t = 80.98s$ در مقایسه با نتایج تحلیلی نشان می‌دهد. با بررسی شکل ۵



شکل ۳ اثر تغییر تعداد گره‌ها در راستای افقی (nx) بر نتایج سطح آزاد آب شبیه‌سازی شده در $t = 77.98s$



شکل ۴ اثر تغییر تعداد گره‌ها در راستای قائم (ny) بر نتایج سطح آزاد آب شبیه‌سازی شده در $t = 77.98s$



شکل ۵ مقایسه تراز آب شبیه‌سازی شده موج استوکس با دامنه کوتاه با نتایج تحلیلی در $t = 80.98s$

۸- کانال باز با مانع در بستر

به منظور بررسی رفتار الگوریتم عددی برای شبیه سازی سطح آزاد آب جریان دائمی، از نتایج آزمایشگاهی کانال باز با مانع در بسترکه توسط Cahout در سال ۱۹۸۴ انجام شده، استفاده شده است. در این نمونه هدف شبیه سازی موجهای سطح آزاد به وجود آمده بر روی مانع برای عددهای فرود زیر بحرانی است (شکل ۶). هندسه پروفیل مانع بستر به صورت زیر است:

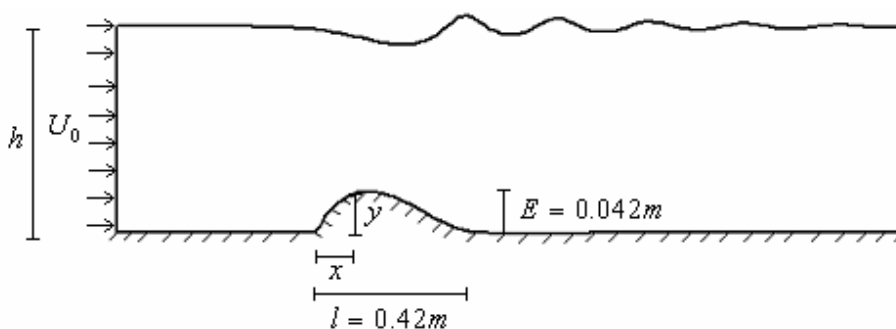
$$y = \frac{27}{4} \frac{E}{l^3} x(x-l)^2 \quad (38)$$

که مقادیر پارامترهای آن (y و x ، l ، E) در شکل ۶ آورده شده است. عدد فرود جریان با استفاده از سرعت (U_0) و ارتفاع (h) جریان ورودی محاسبه شده است:

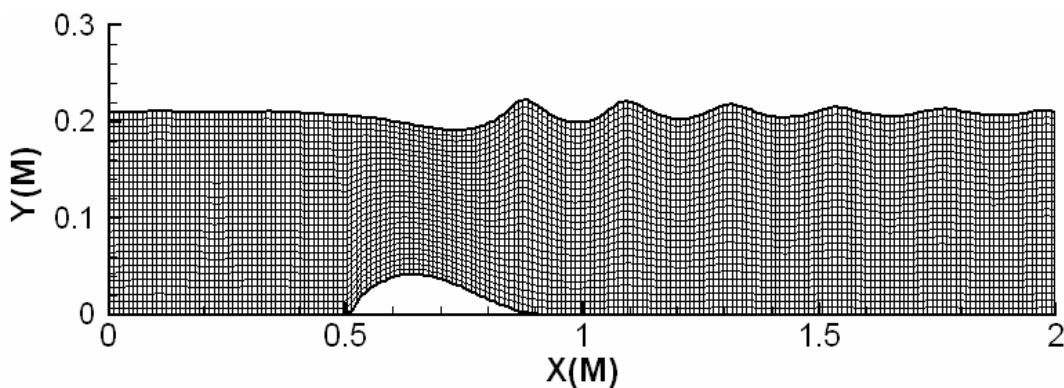
$$Fr = U_0 / \sqrt{gh} \quad (39)$$

در این بررسی یکی از نتایج آزمایشگاهی Cahout با $Fr \pi 1$ برای مقایسه با نتایج مدل عددی انتخاب شده است.

در آن آزمایش، مقدار سرعت، ارتفاع و عدد فرود جریان ورودی به ترتیب برابر 0.6171ms^{-1} ، 0.21m و 0.43m است. این آزمایش به سبب پایداری و تکرار الگوی موج تولید شده در روی توپوگرافی مورد توجه می باشد. دامنه محاسباتی در مدل عددی دارای طولی برابر ۲ متر بوده و در ابتدای حل، تراز سطح آب برابر ۲۱. متر است. مقادیر اولیه سرعت و فشار صفر در نظر گرفته شده و برای جلوگیری از ایجاد موج انعکاسی، دبی ورودی به طور خطی از صفر در $t = 0.0 \text{s}$ به $0.1296 \text{m}^3/\text{s}$ در $t = 6.0 \text{s}$ افزایش داده شده و بعد از آن دبی ورودی ثابت نگاه داشته شده است.



شکل ۶ کانال باز با مانع در بستر (Cahout 1984)



شکل ۷ نحوه شبکه بندی و الگوی سطح آزاد شبیه سازی شده در کانال باز با مانع در بستر در $Fr = 0.43$

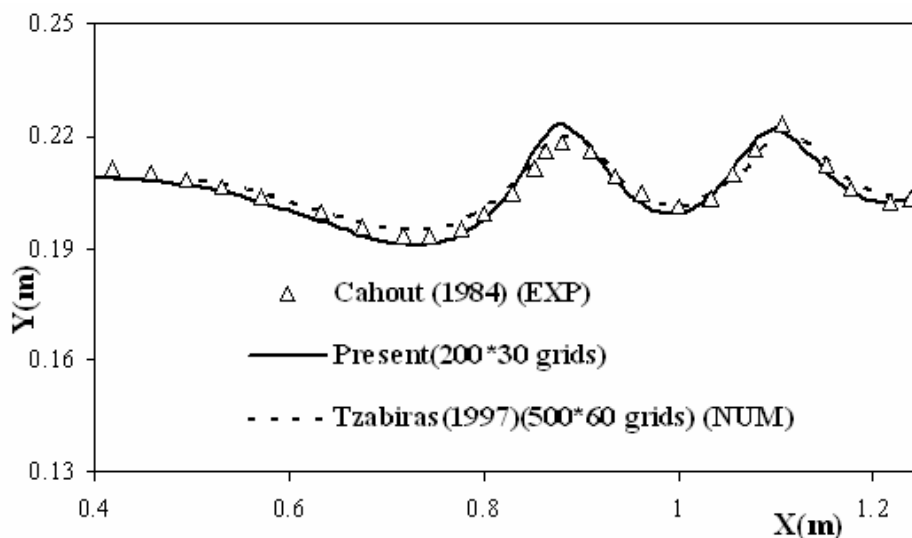
سطحی با تفاوت جزئی نسبت به نتایج مدل عددی Tzabiras مطابقت مناسب تری با نتایج آزمایشگاهی دارد، اما با تفاوتی ناچیز ارتفاع اولین موج سطحی را بیشتر از مدل عددی Tzabiras شبیه‌سازی می‌کند.

تراز سطح آب شبیه‌سازی شده در کانال باز با مانع در بستر در چند زمان متفاوت در شکل ۹ نشان داده شده است. همانگونه که در شکل مشاهده می‌شود، در زمانهای ابتدایی به علت افزایش دبی ورودی، عمق آب در کانال افزایش می‌یابد. سپس با گذشت زمان موجهای سطحی در ورودی کانال و بعد از مانع تشکیل و اثر مانع بر سطح آزاد مشهودتر است. با سپری شدن زمان و با ثابت ماندن دبی ورودی، عمق آب در ورودی کانال کاهش یافته و ارتفاع موجهای سطحی در ورودی ناچیز می‌شود، اما تعداد و ارتفاع موجهای سطحی بعد از مانع افزایش می‌یابد. با گذشت زمان، بار دیگر عمق آب در ورودی کانال افزایش یافته و موجهای سطحی در ورودی از بین رفته و ارتفاع موجهای بعد از مانع کاهش می‌یابد.

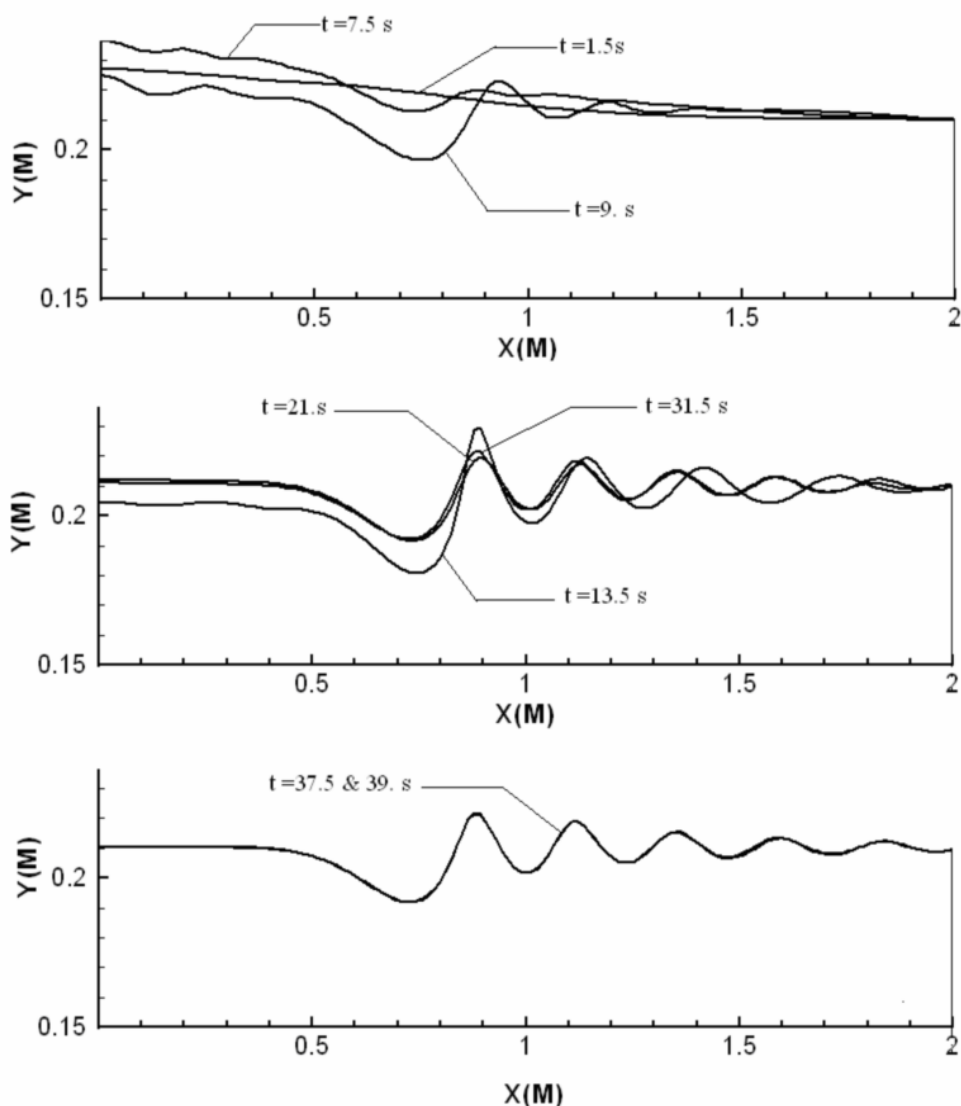
در زمانهای پایانی می‌توان مشاهده کرد که سطح آزاد آب و موجهای به وجود آمده بر اثر مانع در بستر، ثابت بوده و با زمان تغییر نمی‌کنند.

بر اساس بررسی‌های انجام شده با استفاده از شبکه‌بندیهای مختلف مشاهده شد که نتایج به دست آمده با تعداد گره‌های ۲۰۰ و ۳۰ به ترتیب در راستای افقی و قائم تطابق مناسبی با نتایج آزمایشگاهی دارد. با این تعداد گره، برای همگرایی حل مقدار گام زمانی باید در محدوده 0.0003 ثانیه انتخاب شود. در شکل ۷ نحوه شبکه‌بندی با این تعداد و الگوی تراز سطح آزاد آب شبیه‌سازی شده نشان داده شده است. در این شبیه‌سازی الگوریتم حل تا به دست آمدن سطح آزاد و میدان جریان دائمی تکرار می‌شود.

Tzabiras (1997) با استفاده از الگوریتم SIMPLE و روش صریح شبکه متحرک سطح آزاد آب جریانهای دائمی را شبیه‌سازی کردند. در شکل ۸ تراز سطح آب شبیه‌سازی شده با نتایج آزمایشگاهی Cahout (1984) و نتایج عددی Tzabiras (1997) مقایسه شده است. با توجه به این شکل تطابق مناسبی میان سطح آزاد شبیه‌سازی شده با نتایج عددی Tzabiras (با تعداد گره 60×50) و نتایج آزمایشگاهی Cahout مشاهده می‌شود. با توجه به مقیاس شکل ۸ سطح آزاد آب شبیه‌سازی شده توسط دو مدل عددی تفاوت جزئی با یکدیگر دارند. در تحقیق حاضر سطح آزاد آب شبیه‌سازی شده، قبل از تشکیل موجهای



شکل ۸ مقایسه تراز سطح آب شبیه‌سازی شده در $Fr = 0.43$ با نتایج عددی و آزمایشگاهی



شکل ۹ تراز سطح آب شبیه‌سازی شده در کانال با مانع در بستر در چند زمان متفاوت

۹- نتیجه‌گیری

جزئیات الگوریتم عددی شبیه‌سازی سطح آزاد آب جریانهای دائمی و غیر دائمی با استفاده از معادلات ممتنع دو بعدی در قائم و در سیستم مختصات منحنی الخط غیر متعامد ارائه شده است. با این الگوریتم، تراز سطح آب، میدان فشار و سرعت همزمان محاسبه می‌شوند. در مدل عددی به علت استفاده از روش اصلاح فشار در روی شبکه‌ی جابه‌جا نشده، برای کوپل سرعت و فشار بایستی از درونیایی (Rhie and Chow 1983) استفاده شود.

در الگوریتم ارائه شده با توجه به اتصال ضمنی میان شرط مرزی سینماتیکی سطح آزاد و معادله پواسن فشار با روشی ساده، ارتباطی میان میدان جریان و سطح آزاد به وجود آمده که این اتصال ضمنی به محاسبات اضافی نیاز ندارد. در حالت کلی مقایسه نتایج مدل عددی با نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی نشان می‌دهد که مشخصات سطح آب شبیه‌سازی شده، تطابق رضایت بخشی با نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی دارد. الگوریتم ارائه شده در این مقاله برای شبیه‌سازی سطح آزاد در هر دو مورد جریانهای

γ

وزن مخصوص سیال

دائمی و غیر دائمی مناسب بوده و به علت استفاده از روش اصلاح فشار در الگوریتم فوق، حصول جواب در هر گام زمانی نیازمند فرایند تکرار نیست. لازم است ذکر شود که با توجه به پیچیده نبودن روش ضمنی شبکه متحرک ارائه شده در تحقیق حاضر، به سادگی می توان آن را برای جریانهای سه بعدی نیز توسعه داد که این موضوع توسط نویسندگان مقاله در حال انجام است.

۱۱- منابع

صالحی نیشابوری، علی اکبر، ۱۳۷۸، "شبیه سازی عددی آبشستگی موضعی". گزارش فرصت مطالعاتی، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه تربیت مدرس.

Alessandrini, B. and Delhommeau, G. (1994). "Simulation of three-dimensional unsteady viscous free surface flow around a ship model". Int. J. Num. Meth. Fluids, 19, pp. 321-342.

Armfield, S. W. (1991). "Finite difference solutions of the Navier-Stokes equations on staggered and non-staggered grids". Comput. Fluids, 20, pp. 1-17.

Casulli, V. and Stelling, G.S. (1998). "Numerical simulation of 3d quasi-hydrostatic, free surface flows". J. Hydr. Eng., 124, pp. 678-686.

Chorin, A. J. (1968). "Numerical solution of the Navier-Stokes equations". Math. Comput., 22, pp. 745-757.

Hirt, C.W. and Nichols, B.D. (1981). "Volume of fluid (VOF) method for the dynamic of free boundaries". J. Comput. Phys., 39, pp. 201-255.

Kim, J. and Moin, P. (1985). "Application of a fractional-step method to incompressible Navier-stokes equations". J. Comput. Phys., 59, pp. 308-323.

Lin, P., and Li, C.W. (2002). "A σ -coordinate three-dimensional numerical model for surface wave propagation". Int. J. Num. Meth. Fluids, 38, pp. 1045-1068.

Lin, B. and Falconer, R.A. (1997). "Three-dimensional layer integrated modelling of estuarine flows with flooding and drying". Estuarine, Coastal and Shelf Science, 44, pp. 737-751.

Majumdar, S. (1988). "Flow with non-staggered grids". Numer. Heat Transfer, 13, pp. 125-132.

۱۰- فهرست علائم

g	شتاب ثقل
GG^{mn}	ضریب دیفیوژن هندسی راستای m
J^{-1}	ماتریس ژاکوبین مختصات
ϕ'	اصلاح فشار
n	بالانویس نشان دهنده کمیت در گام زمانی قبلی
$n + 1$	بالانویس نشان دهنده کمیت در گام زمانی بعدی
nx	تعداد گره ها در راستای x
ny	تعداد گره ها در راستای y
n_{fs}	راستای عمود بر سطح آزاد
P	فشار
P_{atm}	فشار اتمسفر
t	زمان
U_{par}	بردار سرعت موازی سطح آزاد
U_m	شارحجمی در وسط وجه حجم کنترلی در راستای m
u_i	متوسط زمانی مولفه سرعت در راستای i
u_i^*	مولفه سرعت میانه در راستای i
ϵ و k	انرژی جنبشی آشفتگی و اتلاف آن
x و y	محورهای مختصات کارتزین
η	تراز محلی سطح آزاد نسبت به مبدا دلخواه
ρ	چگالی سیال
δ_{ik}	دلتای کرونکر با مقدار صفر و یک
ϕ	فشار به علاوه جمله ثقل
Δt	گام زمانی حقیقی
v_t	لزجت آشفتگی
ξ و η	محورهای مختصات منحنی

Sorensen, R. M. (1997). "Basic Coastal Engineering". Chapman & Hall, United State of America.

Stansby, P.K. and Zhou, J.G. (1998). "Shallow-water flow solver with non-hydrostatic pressure: 2D vertical plane problems". *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 28, pp. 541-563.

Wu, W., Rodi, W., and Wenka, T. (2000). "3D numerical modeling of flow and sediment transport in open channels". *J. Hydr. Eng., ASCE*, 126, pp. 4-15.

Cahout, J. (1984). "Etude numerique et experimental du problem bidimensional de la resistance de vagues non-lineaire". Ph. D. Thesis, Ensta, Paris.

Namin, M.M., Lin, B. and Falconer, R.A. (2001). "An implicit numerical algorithm for solving non-hydrostatic free-surface flow problems". *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 35, pp. 341-356.

Tzabiras, G.D., (1997). "A Numerical Investigation of 2D, steady free surface flows". *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 25, pp. 567-598.

Mayer, S., Garapon, A., and Sorensen, L.S. (1998), "A fractional step method for unsteady free-surface flow with applications to non-linear wave dynamics". *Int. J. Num. Meth. Fluids*, 28, pp. 293-315.

Peric, M., Kessler, R. and Scheuerer, G. (1988). "Comparison of finite-volume numerical methods with staggered and collocated grids". *Comput. Fluids*, 16, pp. 389-403.

Rhie, C. M. and Chow, W. L. (1983). "Numerical study of the turbulent flow past an airfoil with trailing edge separation". *AIAA J.*, 21, pp. 1525-1532.

Rogers, S. E., Kwak, D. and Kiris, C. (1989). "Numerical solution of the Incompressible Navier-Stokes equations for steady-state and time-dependent problems". *AIAA Paper 89-0463*.

Sackinger, P.A., Schuck, P.R. and Rao, P. R. (1996). "A Newton-Raphson pseudo-solid domain mapping technique for free and moving boundary problem: A finite element implementation". *J. Comput. Phys.*, 125, pp. 83-103.