

شار انتقالی جهتدار در مرزهای حجم محدود بی ساختار با گام محاسباتی چند مرحله‌ای برای شبیه‌سازی امواج سطحی ایستا در تنداب تنگ شونده

سعید رضا صباغ یزدی

دانشیار دانشکده مهندسی عمران دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

تهران، خیابان ولیعصر، شماره 1346

Syazdi@kntu.ac.ir

چکیده- در تنداب سرریزها به منظور کم کردن تیغه آب در بالادست تنداب و تطبیق دادن عرض و عمق جریان تنداب با آب در رودخانه پایین دست، معمولاً عرض ابتدای تنداب بیشتر از عرض انتهای آن در نظر گرفته می‌شود. لذا دیوارهای تنداب به طرف محور آن همگرا شده و بر اثر این تنگ‌شدگی، امواج ایستا در سطح آب جریان فوق بحرانی به وجود می‌آید. تحلیل عددی دقیق عمق و سرعت درجریانهای فوق بحرانی با ناپیوستگیهای مذکور، در کانالها با دیوارهای تنگ‌شونده، پیچیدگی و دشواریهای خاص خود را دارد. در این مقاله، معادلات مورد استفاده، معادلات آبهای کم عمق است که با استفاده از روش رئوس سلول حجم محدود همپوشان، به شکل گسسته در آمده‌اند. در این مقاله برای پایدارسازی روند حل صریح عددی، شیوه‌ای جهتدار برای محاسبه شارهای انتقالی در مرزهای حجم کنترل شبکه بی‌ساختار مثلثی معرفی و در کنار آن از گام محاسباتی چند مرحله‌ای استفاده شده است. برای سنجش صحت جوابهای به دست آمده از مدل عددی تهیه شده توسط نویسنده مقاله، با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی دو آزمون جریان فوق بحرانی دائمی افقی مقایسه شده اند. کارائی مدل نیز با رسم نمودارهای همگرایی پارامترهای حل عددی و گزارش زمان صرف شده برای پردازشگر مرکزی دستگاه رایانه برای همگرایی حل به وضعیت دائمی نمایش داده شده است.

کلید واژگان: امواج ایستا، تنداب تنگ شونده، معادلات آبهای کم عمق، مدل عددی جهتدار، روش حجم محدود، شبکه بی‌ساختار مثلثی.

1- مقدمه

سرریزها یکی از اجزای مهم سدها بوده و در مواقعی که مخزن سد، گنجایش ذخیره‌سازی آب ناشی از سیلابها را نداشته باشد، آب را به نحو بی‌خطری به پایین دست منتقل می‌کنند. هندسه سرریز، تابع عوامل متعددی مانند توپوگرافی، شکل دره و سنگ بستر است. برای مثال، طراحان سعی دارند شیب و شکل سرریز را با توجه به

توپوگرافی و سنگ بستر طراحی کنند؛ زیرا در این صورت کمترین خاکبرداری یا آماده‌سازی پی و تزریق انجام می‌شود. اما از طرفی برای کم کردن ارتفاع سد و هزینه ساخت آن و همچنین تطبیق جریان در آن با شرایط رودخانه پایین دست، معمولاً دیوارهای تنداب همگرا به سمت محور آن طراحی می‌شوند. بر اثر این تنگ‌شدگی، موجهای ایستای مورب (ضربدری) در جریان فوق

صریح تضمین شود. برای افزایش پایداری و سرعت همگرایی محاسبات، از گام محاسباتی چند مرحله ای استفاده شده است.

بنابر این در این مقاله فرمول‌بندی خاصی با بار محاسباتی سبک معرفی می‌شود که بتواند به حذف نوسانات عددی ناخواسته ای - که معمولاً در روند حل صریح معادلات انتقالی رشد می‌کنند - کمک کند. رشد این خطاهای عددی، نوسان در نتایج حل و ناپایداری گام زنی محاسبات صریح را به دنبال دارد. لازم است ذکر شود که این نوسانات محل در حل عددی، در محل امواج تند (سطح آب) تشدید می‌شوند. این مسأله در غیاب اثرات استهلاکی (که با عبارتهای شامل زبری، لزجت و مدل آشفتگی مدلسازی می‌شوند) می‌تواند باعث واگرایی و توقف روند محاسبات صریح شود. بنابراین در این مقاله برای ارزیابی کارایی فرمول‌بندی ابداع شده، از آزمونهای جریانهای فوق بحرانی - که در آنها اثرات استهلاکی کم اهمیت بوده اند - استفاده شده است. در این آزمونهای صحت، جریانهای فوق بحرانی با اینرسی زیاد در تندابهای تنگ شونده شکل می‌گیرند و هندسه آنها باعث ایجاد امواج ایستای تند در سطح آب می‌شوند.

با توجه به اینکه استفاده از عبارتهای استهلاکی (مانند آشفتگی)، از بین برنده و مخفی‌کننده خطاهای احتمالی در روند حل صریح معادلات بوده و تشخیص کارآمد بودن فرمول‌بندی حجم محدود پیشنهادی در این مقاله را با مشکل مواجه خواهد کرد، در کار حاضر از آزمونهایی استفاده شده که در آنها اغماض از اثرات استهلاکی، صدمه‌ای به نتایج وارد نسازد. در اولین آزمون صحت، به منظور ارزیابی دقت (در محاسبه امواج تیز سطح آب) و پایداری حل صریح عبارتهای انتقالی، از حل تحلیلی یک مسأله پرش هیدرولیکی کج در جریان بی‌استهلاک (ناشی از زبری بستر و آشفتگی جریان) بهره گرفته شده است. در آزمون دوم صحت نیز از جریان انتقالی (یا سرعت بالا و زبری ناچیز بستر) در یک فلوم آزمایشگاهی تنگ‌شونده

بحرانی به‌وجود می‌آید که به طرف پایین دست امتداد پیدا می‌کند. محل این موجها ثابت بوده و موقعیت آنها به دبی بستگی دارد. اهمیت این موجها در ضرورت افزایش ارتفاع آزاد و در نتیجه استفاده از دیوارهای بلندتر در طرفین شوت است. روابط تجربی برای حل چنین مسائلی برای هندسه‌های ساده وجود دارد که در آنها سطح مقطع را باید ثابت در نظر گرفت؛ همچنین سایر پارامترها نظیر سرعت، با متوسط‌گیری به صورت یک بعدی اعمال می‌شوند (Novak et al, 1998). اما برای تندابهایی با پیچیدگیهای هندسی، پیش بینی امواج سطح آب، فقط با مدلسازی امکان‌پذیر است.

یکی از روشهای مدلسازی، استفاده از مدل فیزیکی برای شبیه‌سازی مسأله اصلی است؛ اما این روش محدودیت‌هایی دارد؛ از جمله آنکه از میان پارامترهای مهم تأثیرگذار در جریان، معمولاً فقط یکی با استفاده از یکی از اعداد بی بعد (متناسب با اهمیت)، برای تعیین مقیاس ساخت مدل فیزیکی به‌کار می‌رود. بدیهی است که سایر پارامترها به طور کامل شبیه‌سازی نمی‌شوند و این باعث بروز تقریب‌هایی در تعیین جریان می‌شود. ساخت مدل فیزیکی همچنین هزینه‌بر است و ایجاد کوچکترین تغییر در شکل آنها بر هزینه تأثیر می‌گذارد.

با ورود رایانه‌های پر قدرت با سرعت بالای پردازش، محققان به سمت تدوین و گسترش مدل‌های عددی در کنار سایر گزینه‌ها تمایل پیدا کرده‌اند. در کار حاضر مدلی معرفی می‌شود که در آن از معادلات دو بعدی میانگین عمقی¹ (معادلات آبهای کم عمق) به‌عنوان مدل ریاضی مسأله استفاده شده است. برای گسسته‌سازی معادلات بر روی شبکه بی‌سازمان، از روش رئوس سلول حجم محدود همپوشان (تشکیل شده از تجمع سلولهای مثلثی متصل به گره‌های شبکه بی‌ساختار) استفاده شده و مقادیر شار انتقالی در مرزهای حجم کنترل با استفاده از یک الگوی جهتدار محاسبه شده است تا پایداری محاسبات

1. Depth Average Equation

بالایی دارند، اما حل عددی معادلات غیر خطی هذلولوی آبهای کم عمق با دشواریهایی مواجه است و برای حفظ پایستاری متغیرها و غلبه بر نوسانات قوی عددی در مجاورت ناپیوستگیها ملاحظات خاصی لازم است (Toro 2001).

روش تفاضل محدود، علی‌رغم برخورداری از مزایایی مانند سهولت برنامه‌نویسی و کارایی بالای محاسباتی، با مشکل کم بودن دقت و محدودیت در پذیرش نامنظمی‌های هندسه مسائل پیچیده مواجه است. همچنین در محل وجود گرادیانهای شدید خطاهای مختلفی در مجاورت بعضی ناپیوستگیها بروز می‌کند که این باعث برتری روش حجم محدود می‌شود که در قالب آن، بعضی روشهای با دقت مرتبه بالا قابل پیاده‌سازی است. در سالهای اخیر روش حجم محدود (FVM) به‌طور گسترده‌ای مورد توجه محققان قرار گرفته و موفقیت‌های زیادی در استفاده از آن برای حل مسائل امواج در آبهای کم عمق بر روی شبکه‌های بی‌ساختار گزارش شده است. لذا در اینجا مرور مختصری از کارهای مهم انجام شده در این زمینه ارائه می‌شود.

2-1- روش از بین برنده تغییرات کل² (TVD)

روش از بین برنده تغییرات کل (TVD) با دقت مرتبه بالا - که در وضعیت چندگامی به فرمولبندی پیش‌بینی و اصلاح³ (MC) شباهت دارد - اساساً برای شبکه‌های دارای ساختار کاربرد دارد اما در یک الگوی از بین برنده تغییرات کل با پیش‌بینی و اصلاح⁴ (TVD - MC) در چارچوب روش حجم محدود برای شبیه‌سازی دوبعدی مرزهای فیزیکی با هندسه پیچیده گسترش داده و نتایج با جوابهای تحلیلی و آزمایشگاهی مورد مقایسه قرار گرفت (Tseng & Chu 2000).

الگوهای روش از بین برنده تغییرات کل (TVD) با دقت

- که امواج ضربدری تیز را شکل می‌دهد - برای ارزیابی دقت و پایداری مدل استفاده شده است. پایداری حل این آزمونها نیز با مقایسه روند همگرایی فرمولبندی ابداع شده با فرمول حجم محدود استاندارد ارزیابی شده است. در هر دو آزمون، نتایج محاسباتی بر اساس ورود کمترین استهلاک عددی (خطایی که علاوه بر اساس معیارهای از بین بردن تیزی امواج، میرا کننده نوسانات عددی نیز هستند) و عدم وجود نوسان در سطح آب، ارزیابی شده است.

2- مرور کارهای گذشته

تحقیقات عددی در زمینه روشهای عددی برای شبیه‌سازی امواج در آبهای کم عمق، یکی از جذابترین موضوعات در فعالیتهای محاسباتی ریاضیدانان و متخصصان سیالات و هیدرولیک است. شبیه‌سازی و تحلیل عددی مدلها با ساده‌سازیهای مناسب می‌تواند اطلاعات مفید زیادی را در ارتباط با پدیده‌های پیچیده امواج در آبهای کم عمق به دست دهد. در سالهای اخیر به‌طور پیوسته، نتایج جالبی از شبیه‌سازیهای عددی مسائل جریان با ناپیوستگی (امواج سطحی تند) گزارش می‌شود.

در بیشتر کارهای مدل‌سازی دوبعدی گذشته، معادلات حاکم بر جریان با سطح آزاد که می‌تواند جریان با امواج ناشی از پرش هیدرولیکی را از منظر ریاضی توصیف کند، معادلات آبهای کم عمق¹ انتخاب شده است. با حذف برخی فرضهای ساده‌کننده، معادلات ریاضی حاکم بر جریانهای دارای موج، پیچیده‌تر شده و لذا قابل حل با روشهای تحلیلی نیستند. از این رو روشهای عددی متنوعی برای حل اینگونه معادلات مورد توجه قرار گرفته و پیشرفتهای قابل ملاحظه‌ای در زمینه تحلیل عددی مسائل جریان دارای امواج سطحی ایجاد شده است. تاریخچه نشان می‌دهد که استفاده از روشهای تفاضل محدود و حجم محدود برای حل این معادلات، محبوبیت

2. Total Variation Diminishing

3. MacCormack

4. TVD - MacCormack

1. Shallow Water Equation

مرتب‌بندی معمولاً فرمول‌بندی پیچیده‌ای دارند. اما الگوی دو گامی از بین برنده تغییرات کل در راستای مؤلفه‌ها¹ (CW-TVD) برای معادلات قوانین بقایی هذلولوی پیشنهاد داده شد که در مقایسه با سایر الگوهای TVD ساختاری بسیار ساده داشته و ذاتاً دارای دقت از مرتبه دوم در مکان و زمان است. در الگوی از بین برنده تغییرات کل در راستای مؤلفه‌ها² (CW-TVD) به تجزیه مشخصه‌ها نیازی نبوده و برای اجتناب از تجمع خطاهای پراکنش عددی و جهتدار سازی³ مانند الگوی از بین برنده تغییرات کل با پیش‌بینی و اصلاح⁴ (TVD - MC) به اعمال ترکیب تفاضلهای درگام‌های پیش‌بینی و اصلاح نیاز ندارد (Yu & Liu 2001).

2-3- کاربرد تحلیلگر ریمان¹¹ (RS)

روش حجم محدود جهتدار با دقت زیاد برای شبکه‌های بی‌ساختار در ابتدا با استفاده از تحلیلگر ریمان "رو"¹² (Roe-RS) و با به‌کارگیری شیوه جهتدار یکنوا برای مسائل پایستار¹³ (MUSCL) از نوع گودانوف ارائه شد که نتایج جالب توجهی را در حل جریانهای غیر لزج متغیر سریع به دست می‌دهد (Alcrudo & Navarro 1993). در ادامه به چند مدل که با استفاده از تحلیلگر ریمان "رو" (Roe-RS) برای حجم محدود بی‌ساختار طراحی شده، اشاره می‌شود.

اولین مدل حجم محدود جهتدار بر روی شبکه‌های بی‌ساختار با استفاده از شیوه تفاضلهای شار (Osher & Solomone 1982) برای حل جریانهای غیر ماندگار متغیر تدریجی طراحی شد (Zhoa et al 1994). برای حل مسائل مشابه بر روی شبکه بی‌ساختار مثلثی، مدل حجم محدود جهتداری از نوع با دقت مرتبه دوم توسعه داده شده است (Anastasiou & Chan 1997).

مدل حجم محدود دیگری با به‌کارگیری شیوه جهتدار یکنوا برای مسائل پایستار (MUSCL) و استفاده از

روشهای تجزیه بردار شار ابتدا برای جریانهای غیر لزج بدون سطح آزاد ابداع شد. در این زمینه روشهای متعددی مانند شیوه لیو استفان⁶ LSS (Liou et al 1993)، شیوه شیوه ون-لیر⁷ VLS (van Leer, 1982)، شیوه استگر و وارمینگ⁸ SWS (Stager & Warming 1981) و شیوه تجزیه محلی لکس فردریش⁹ LLFS (Toro, 2001) برای حل مسائل دینامیک گازهای با امواج فشار به‌کار گرفته شد.

2-2- کاربرد تجزیه بردار شار⁵

اخیراً الگوی دو گامی از بین برنده تغییرات کل در راستای مؤلفه‌ها¹⁰ (CW-TVD) در ترکیب با تکنیک تجزیه بردار شار برای حل معادلات آبه‌ای کم‌عمق در چارچوب روش حجم محدود برای شبکه بی‌ساختار دوبعدی (با سلولهای چهار ضلعی) به‌کار برده شد. در این تحقیقات از چهار روش تجزیه بردار شار (LSS, VLS, SWS and

1. Component-Wise TVD
2. Component-Wise TVD
3. Upwinding
4. MacCormack -TVD
5. Flux Splitting Techniques
6. Liou Steffen Scheme
7. Van Leer Scheme
8. Stager Warming Scheme
9. Local Lax Friedrichs Scheme
10. Component-Wise TVD

11. Riemann Solver

12. Roe-Riemann Solver

13. Monoton Upwind Scheme for Conservation Law

برخی از محققان با استفاده از عبارتهای لزجت مصنوعی از مرتبه دو و چهار در جهت کنترل نوسانات عددی مسائل جریان با سطح آزاد دارای امواج تند تلاش کرده و با استفاده از روش حجم محدود بر روی شبکه‌های بی‌ساختار ریز شده تطبیقی این جریانها را شبیه‌سازی کرده و نتایج با دقت مناسبی را برای شبکه‌های دارای ساختار به‌دست آورده‌اند (Rahman & Chaudhry 1995). چنین روشی، به‌دلیل دشواری در محاسبه عبارت لزجت مصنوعی از مرتبه چهار بر روی شبکه‌های بی‌ساختار، کمتر مورد توجه محققان علاقه‌مند به کاربرد روش حجم محدود برای شبکه بی‌ساختار قرار گرفت. به تازگی استفاده از این روش برای شبکه‌های بی‌ساختار مثلثی نیز توسعه داده شده است (Sabbagh-Yazdi 2006).

3- معادلات مدل

در کار حاضر، معادلات حاکم برای توصیف جریان با سطح آزاد با امواج ناشی از پرش هیدرولیکی، معادلات آبهای کم‌عمق انتخاب شده است. فرضیات استفاده شده در به‌دست آوردن این معادلات هذلولوی غیرخطی، ناچیز بودن مؤلفه‌های قائم سرعت، توزیع فشار هیدرواستاتیک و کم بودن شیب بستر است. معادلات پیوستگی و حرکت را می‌توان به شکل زیر نوشت.

معادله پیوستگی به‌صورت رابطه 1 و معادلات حرکت در راستای x به‌صورت رابطه 2 است.

$$\frac{\partial(h)}{\partial t} + \frac{\partial(hu_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1) \quad i=1,2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(hu_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(hu_i u_j) = -\frac{1}{2}gh \frac{\partial}{\partial x_j}(h+z) - \tau_i / \rho_0 \quad (2) \quad j=1,2$$

در این روابط t برابر با زمان، x ، y مختصات دکارتی، h عمق جریان، u ، v بردارهای میانگین عمقی سرعت، g شتاب ثقل زمین و Z ارتفاع کف کانال از سطح مبنا است. در این معادلات تنش کلی $\tau_{hi} = C_f u_i |U|$ بیانگر اثر

تحلیلگر ریمان هارتن-لکس-ون لیر¹ (Harten et al 1983) برای حل امواج در کانالهای باز طراحی شد (Hu et al 1998).

در مدل صریح دیگری، از روشهای ENO, TVD, Roe برای حل جریانهای غیر دائمی با استفاده از حجم محدود بهره گرفته شد (Tseng 1999).

در مدل حجم محدود اختلاطی شیوه چندگامی لکس-فردریش² بر روی شبکه بی‌ساختار مثلثی برای حل مسائل مسائل جریان با سطح آزاد دارای ناپیوستگی به‌کار گرفته شد (Wang & Liu 2000).

در کار دیگری با استفاده از تحلیلگر ریمان هارتن-لکس-ون لیر (HLL-RS) مدل حجم محدود جهتدار از نوع "رو"³ به‌جای استفاده از توابع محدود کننده شیب تغییرات شار⁴ متداول نسبت وزنی از گرادیانهای شار را به‌عنوان یک محدودکننده چندبعدي شیب تغییرات شار به‌کاربرد. این روش برای شیوه مرکزیت سلولهای حجم محدود بی‌ساختار مثلثی برای حل مسائل سطح آزاد دارای ناپیوستگی مناسب است (Yoon & Kang 2004).

لازم است ذکر شود که کلید موفقیت الگوهای تحلیلگر ریمان بر روی شبکه‌های بی‌ساختار چندبعدي محاسبه دقیق گرادیان شارها در مجاورت مرزهای حجم کنترل و به‌کارگیری توابع یا روشهای محدودکننده شیب تغییرات شار چند بعدی⁵ مناسب شبکه‌های بی‌ساختار است. معمولاً کاربرد این توابع و روشها، خود بر حجم سنگین محاسبات الگوهای تحلیلگر ریمان بر روی شبکه‌های بی‌سازمان می‌افزاید و این روشها را با بار محاسباتی سنگینی همراه می‌کند.

2-4- اضافه نمودن عبارتهای لزجت مصنوعی⁶

1. HLL-Riemann Solver
2. Lax-Friedrichs
3. Roe
4. Flux Slope Limiter
5. Multi-Dimensional Flux Slope Limiter
6. Artificial Viscosity Terms

هیدرواستاتیک است. مقادیر متغیرهای $F_x = F_x(Q)$ و $F_y = F_y(Q)$ در گره‌ها می‌توانند برای محاسبه متوسط شارها در یالهای مرزی حجم کنترل مورد استفاده قرار گیرند. به‌طور معمول محاسبه شارها با متوسط‌گیری از آنها به صورت $\bar{F} = (F_1 + F_2)/2$ و $\bar{G} = (G_1 + G_2)/2$ در وسط یالهای مرزی حجم کنترل انجام می‌شود. با استفاده از این فرمول‌بندی حجم محدود برای حل صریح معادلات مدل ریاضی، نوسانات عددی مشابه با آنچه در حل صریح تفاضل مرکزی رشد می‌کند، ایجاد شده و روند محاسبات را با مشکل مواجه می‌سازد. البته اضافه کردن عبارتهای استهلاک مصنوعی می‌تواند به عنوان یکی از گزینه‌های مناسب برای به‌دست آوردن حل پایدار با دقت مناسب باشد (Sabbagh-Yazdi, et al, 2004). در این مقاله الگوی متوسط‌گیری جهتدار برای محاسبه شارهای انتقالی \bar{F}_x و \bar{F}_y برای غلبه بر نوسانات ناخواسته عددی تشریح می‌شود.

5- الگوی شار انتقالی جهتدار

حل عددی معادلات آبهای کم عمق با دشواریهایی مواجه است و برای حفظ پایستار متغیرها در آن، به‌ویژه در نزدیکی ناپیوستگیها، ملاحظات خاصی لازم است. یکی از روشهایی که نوسانات عددی را کاهش می‌دهد جهتدارسازی فرمول‌بندی حجم محدود است. به منظور جهتدار ساختن شارهای انتقالی در مرزهای حجم کنترل، از سه نقطه از هر سلول بالادست مثلثی - که به مرکز هر یال مرزی از حجم کنترل متصل است - استفاده می‌شود. برای محاسبه شارهای انتقالی در بالادست یال مرزی مورد نظر، باید نقطه بالادست در هر یال مشخص شود (Sabbagh-Yazdi 2006).

در کار حاضر میانگین وزنی شارهای انتقالی \bar{F}_x و \bar{F}_y در سه گره (شامل دو گره در دو انتها در یال مورد نظر و گره بالادست) محاسبه می‌شوند (شکل 1):

$$\bar{F} = (1 - \alpha_{up})(F_1 + F_2)/2 + \alpha_{up}F_{up} \quad (5)$$

استهلاک ناشی از زبری بستر و آشفتنگی تولید شده توسط این زبری در راستای i است که آن را به کمک ضریب افت $C_f = gn^2/h^{0.33}$ (با استفاده از زبری ماینینگ) می‌توان محاسبه کرد.

4- فرمول‌بندی حجم محدود

نام روش حجم محدود (FVM) بر گرفته از روشی است که شکل انتگرالی قوانین بقا را مستقیماً در مکان گسسته‌سازی می‌کند. این روش در هندسه‌های نامنظم حسن بزرگی دارد، به‌طوری که در تعریف حجمهای کنترل و شبکه‌بندی میدان حل، آزادی عمل زیادی را ایجاد می‌کند. همچنین تنوع قوانین و دقتها برای ارزیابی شارهای عددی از میان سطوح حجم کنترل، انعطاف پذیری قابل توجهی را برای روش حجم محدود به ارمغان می‌آورد. علاوه بر آن با گسسته‌سازی مستقیم شکل انتگرالی قوانین بقا، می‌توان مطمئن شد که کمیت‌های اصلی جرم، مومنتم و انرژی همچنان در شکل گسسته شده معادلات نیز حفظ می‌شود که این یکی از ملزومات بنیادی مدل‌های عددی است.

در این مقاله به‌منظور گسسته‌سازی معادلات حاکم، از الگوی همپوشان رئوس سلول روش حجم محدود - که از مثلث‌هایی که در هر گره به هم می‌رسند تشکیل شده - استفاده شده است.

فرم پایستار معادلات دو بعدی حاکم را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = -\left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y}\right) + S \quad (3)$$

با انتگرالگیری بر روی حجم کنترل Ω و با استفاده از روش حجم محدود، فرم گسسته شده معادلات در حالت کلی بصورت رابطه (4) است:

$$Q^{n+1} = Q^n - \frac{\Delta t}{\Omega} \sum_{k=1}^N [(\bar{F}_x \Delta x - \bar{F}_y \Delta y)_k + (\bar{G}_x \Delta x - \bar{G}_y \Delta y)_k] + S_i \Delta t \quad (4)$$

که \bar{F}_x و \bar{F}_y شار انتقالی و \bar{G}_x و \bar{G}_y شار فشار

شده نیست.

6- گام محاسباتی چند مرحله‌ای

یکی از فنون متداول برای افزایش پایداری حل صریح، استفاده از روشهای چند مرحله‌ای رانگ-کوتا است. در این روش ایده اساسی، انجام محاسبات یک گام صریح در چندین مرحله میانی بین مرحله زمانی n و $n+1$ و سپس ترکیب آنها به منظور رسیدن به یک تخمین مرتبه بالاتر است. شکل عمومی شیوه رانگ-کوتای m مرحله ای برای رابطه حجم محدود به صورت زیر است (Jameson et al 1981).

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_i^{(0)} = Q_i^n \\ Q_i^{(1)} = Q_i^{(0)} - \theta_1 \cdot R(Q_i^{(0)}) \\ Q_i^{(2)} = Q_i^{(0)} - \theta_2 \cdot R(Q_i^{(1)}) \\ \dots \\ \dots \\ Q_i^{(m)} = Q_i^{(0)} - \theta_m \cdot R(Q_i^{(m-1)}) \\ Q_i^{n+1} = Q_i^{(m)} + S_i \Delta t \end{array} \right. \quad (7)$$

در رابطه فوق Δt گام زمانی به کار رفته بین مرحله n و $n+1$ ام و $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m$ ضرایب ویژه روش چند مرحله ای رانگ-کوتا است که بر اساس نوع روش رانگ-کوتا و تعداد مراحل میانی m تعیین می شوند. محاسبه عبارتهای باقیمانده به شکل زیر انجام می شود.

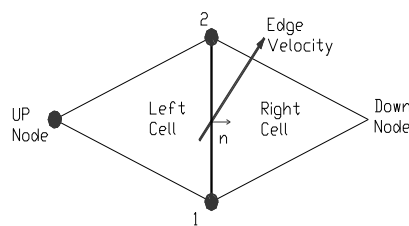
$$R(Q) = \frac{\Delta t}{\Omega} \sum_{k=1}^N [(\bar{F}_x \Delta x - \bar{F}_y \Delta y)_k + (\bar{G}_x \Delta x - \bar{G}_y \Delta y)_k] \quad (8)$$

در کار حاضر از روش سه مرحله‌ای رانگ-کوتا استفاده شده که ضرایب آن برابرند با:

$$\theta_3 = 1.0 \quad \theta_2 = 0.6, \quad \theta_1 = 0.6$$

برای صرفه جویی در محاسبات، عبارت چشمه/چاه S_i فقط یک بار در هر گام محاسبه می شود. حل صریح روابط حجم محدود به دست آمده با استفاده از روش چند مرحله‌ای رانگ-کوتا می تواند به پایداری بیشتر منجر شده و اندازه گام زمانی مجاز را تا سه برابر افزایش دهد.

در رابطه بالا $0 < \alpha_{up} < 1$.



شکل 1 دو مثلث متصل به یک یال مشترک دو حجم کنترل مجاور هم

سلول مثلثی بالادست یال مرزی حجم کنترل را می توان با استفاده از V_n تصویر سرعت در راستای عمود بر مرز حجم کنترل محاسبه کرد.

$$V_n = \bar{V}_e \cdot \hat{n} \quad (6)$$

در اینجا $\hat{n} = (\Delta y \hat{i} - \Delta x \hat{j}) / \Delta s$ بردار یکه عمود بر یال مرزی و $\bar{V}_e = \bar{u} \hat{i} + \bar{v} \hat{j}$ سرعت متوسط در آن یال است. البته مؤلفه‌های سرعت \bar{u} و \bar{v} را نیز مانند شار انتقالی با استفاده از ضرایب وزنی α_1, α_2 و α_{up} می توان توزین کرد. اما تجربیات عددی نویسنده مقاله نشان می دهد که با $\bar{u} = u_1 + u_2$ و $\bar{v} = v_1 + v_2$ دقت بهتری به دست می آید.

لازم است ذکر شود که هر چه مقدار α_{up} کوچکتر انتخاب شود، دقت حل به مرتبه دوم نزدیکتر می شود، اما زمینه بروز نوسانات عددی ناخواسته (شبیه روش تفاضل مرکزی) فراهم شده و روند حل صریح، به کمک گرفتن از عبارتهای استهلاك عددی اضافه نیاز پیدا می کند. از طرف دیگر هر چه α_{up} بزرگتر انتخاب شود حل صریح، بدون استفاده از عبارتهای استهلاك عددی امکان پذیر می شود، اما دقت حل به مرتبه اول نزدیکتر می شود. در آزمونهای عددی این مقاله برای استفاده از الگوی ساده شار انتقالی جهتدار با $0 < \alpha_{up} < 1/3$ منظور شده است. تا دقتی بین مرتبه اول و دوم از حل عددی به دست آید. با این الگوریتم محاسباتی سبک، ضمن دستیابی به حل صریح پایدار در مسائل فوق بحرانی دیگر نیازی به اضافه کردن عبارتهای نوسانگیر عددی به باقیمانده‌های محاسبه

(λ)، گام زمانی Δt را در هر چند مرحله از محاسبات یک بار می توان اصلاح و به روزآوری کرد.

6-1- محاسبه گام زمانی

مقادیر ویژه دو ماتریس ژاکوبین فرم همگن معادلات نماینده سرعت و جهت امواج انتقالی هستند. تصویر این سرعتها در راستای عمود بر مرزها چنین محاسبه شده اند:

$$\bar{\lambda} \cdot \hat{n} = \left\{ \bar{U} \cdot \hat{n}, \bar{U} \cdot \hat{n} + C, \bar{U} \cdot \hat{n} - C \right\}^T \quad (9)$$

که در آن $\bar{U} = u\hat{i} + v\hat{j}$ و $C = \sqrt{gh}$

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad \text{و} \quad \hat{n} = (\Delta y\hat{i} - \Delta x\hat{j}) / \Delta s$$

در مرز حوزه یا حجم کنترل است.

در محاسبه اندازه مناسب گام زمانی Δt می توان از اندازه حجم کنترل Ω و سرعت انتقال اطلاعات λ سود جست. با توجه به اینکه این مقادیر در نقاط مختلف شبکه متفاوتند، باید کوچکترین مقدار $\lambda = \Omega / \Delta t$ را با استفاده از بزرگترین مقدار λ را در نظر گرفت. بنابر این حداقل مقدار گام زمانی در محیط حل تعیین کننده حد گام زمانی حل صریح پایدار چنین است.

$$\Delta t = \Omega / \sum_{k=1}^N [\Delta s (|\bar{U} \cdot \hat{n}| + C)]_k \quad (10)$$

در صورتی که حل یک مسأله حالت دائمی مدنظر باشد، Δt در فرمول محاسباتی مفهوم فیزیکی گام زمانی را از دست میدهد و فقط به عنوان ضریبی در باقیماندهایی که برای اصلاح متغیر وابسته در هر تکرار از محاسبات خواهد بود. این تکرار محاسبات تا هنگامی که متغیرهای وابسته، از شرایط اولیه (فرضی) به جریان دائمی مطلوب همگرا شوند، ادامه خواهد یافت. بنابرین با توجه به این واقعیت، مناسب است که به جای حداقل مقدار این گام در حوزه حل $(\Delta t)_{Minimum}$ ، از گام محاسباتی متناظر با هر حجم کنترل $(\Delta t)_{Local}$ برای محاسبه باقیماندهایی آن حجم کنترل و اصلاح متغیر وابسته در مرکز آن استفاده شود. این روش، سرعت همگرایی به حل دائمی را بسیار افزایش داده و صرفه جویی قابل ملاحظه ای را از نظر محاسباتی در بر خواهد داشت. در هر صورت متناسب با تغییرات سرعت انتقال اطلاعات بین حجم کنترل

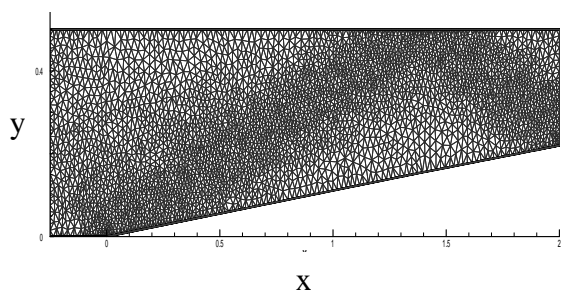
6-2- مرزهای ورود و خروج جریان

در مرزهای جریان با رژیم زیر بحرانی، عدد فرود کمتر از یک بوده ($Fr < 1$) و بنابرین سرعت جریان کمتر از $C = \sqrt{gh}$ است. در نتیجه دو موج اطلاعات متغیرهای وابسته جریان به صورت پیشرو از بالادست و یک موج اطلاعات متغیرهای وابسته جریان به صورت پسرو از پایین دست به حوزه حل وارد می شوند. بنابرین می توان hu و hv را در بالادست جریان و h را در پایین دست جریان زیر بحرانی اعمال کرد. در جریان با رژیم فوق بحرانی، عدد فرود بیشتر از یک بوده ($Fr > 1$) و لذا در جریان زیر بحرانی، سرعت جریان کمتر از $C = \sqrt{gh}$ است. بنابر این کل موج اطلاعات متغیرهای وابسته جریان از بالادست به پایین دست جریان منتقل می شوند. لذا باید hu ، hv و h را در بالادست جریان فوق بحرانی اعمال کرد. با توجه به اینکه بسته به نوع رژیم جریان در برخی از مرزهای جریان ممکن است بعضی از پارامترها اعمال نشوند لذا در این نقاط مقادیر اعمال نشده را باید با استفاده از مقادیر در درون محیط حل محاسبه کرد.

6-3- دیوارهای جانبی

مرزهای دیوار را می توان به دو حالت تقسیم کرد. در مرزهای لغزان سرعتهای محاسبه شده در نقاط گرهی بر روی مرزها باید با توجه به زاویه اضلاع روی دیوار به نحوی اصلاح شوند که مؤلفه عمود بر مرز سرعت صفر شده و مؤلفه مماسی آن حفظ شود. در مرزهای بدون لغزش، سرعت در گره های مرزی صفر می شود. برای اعمال این شرایط مرزی، فواصل نقاط گرهی شبکه مجاور مرز دیوار در راستای عمود بر مرز باید بسیار ریز باشد تا پروفیل سرعت به خوبی محاسبه شود. با توجه به اینکه در شبکه های بی ساختار، فواصل

مشاهده می‌شود.

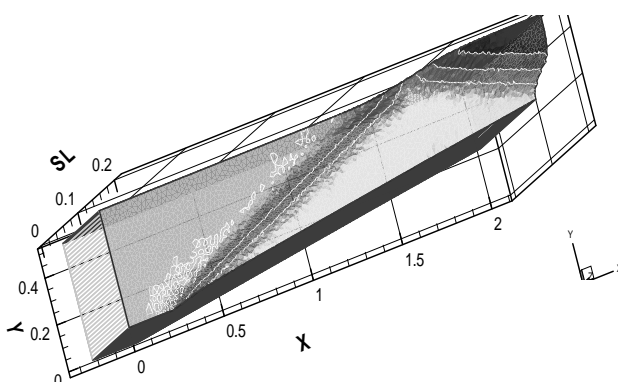


شکل 3 شبکه بی‌ساختار مثلثی و ابعاد کانال (اندازه‌ها به متر)

جدول 1 مقایسه نتایج مدل عددی و حل تحلیلی برای

$$(\alpha_{up} = 1/3) \theta = 6.346^\circ$$

| β (Degree) | h (m) | v (m/s) | Fr | روش حل | ناحیه |
|---------------------|------------|--------------|-------|--------|-------|
| 20.0 | 0.1 | 3.962 | 4 | دقیق | I |
| 20.252 | 0.1 | 3.96 | 4 | عددی | |
| 24.158 | 0.1496 | 3.831 | 3.16 | دقیق | II |
| 23.498 | 0.1494 | 3.8297 | 3.163 | عددی | |
| -- | 0.2092 | 3.673 | 2.563 | دقیق | III |
| -- | 0.2085 | 3.6736 | 2.569 | عددی | |



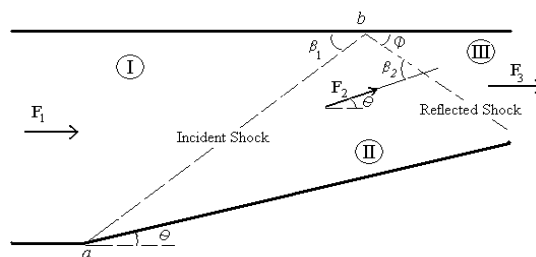
شکل 4 نمای سه بعدی از امواج تند محاسبه شده توسط مدل عددی (اندازه‌ها به متر)

در شکلهای 5 و 6 پروفیل سطح آب محاسبه شده با $\alpha_{up} = 0.3$ ، $\alpha_{up} = 0.1$ و $\alpha_{up} = 0.05$ در دو مقطع عرضی با فواصل $x = 0.9m$ و $x = 1.8m$ از محل شکستگی دیوار با حل تحلیلی مقایسه شده است. در شکلهای 7 و 8 روند همگرایی پارامترهای پایستار

نقاط در تمامی جهتها برابر است، برای ایجاد شبکه ریز در نزدیکی مرز باید تعداد بسیار زیادی نقطه محاسباتی منظور شوند که این، زمان اجرای برنامه را به شدت افزایش خواهد داد.

6-4- مقایسه نتایج مدل عددی با حل تحلیلی

در این قسمت مدل تهیه شده با استفاده از حل تحلیلی واسنجی می‌شود. برای این منظور انعکاس امواج تند ناشی از برخورد جریان فوق‌بحرانی به دیوار تنگ شونده با زاویه $\theta = 6.346^\circ$ در یک سمت کانال مدلسازی می‌شود (شکل 2). این آزمون که دارای حل تحلیلی است، قبلاً توسط سایر محققان برای واسنجی مدل عددی استفاده شده است (Jimenez et al 1988).



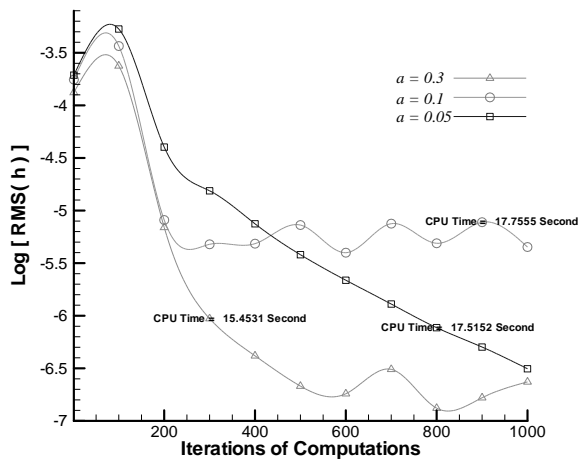
شکل 2 نمای شماتیک کانال و جهت امواج تند

جریان ورودی فوق‌بحرانی با عدد فرود 4 به این کانال با عرض 0/5 متر دارای عمق 0/1 متر و سرعت 3/962 m/s گزارش شده است. این کانال با شبکه بی‌ساختار مثلثی ریز شده در امتداد امواج تشکیل شده از 3233 گره، 6100 مثلث گسسته‌سازی شد (شکل 3). این کار با استفاده از روش مثلث‌بندی دلاونی انجام شده است (Thompson et al 1999).

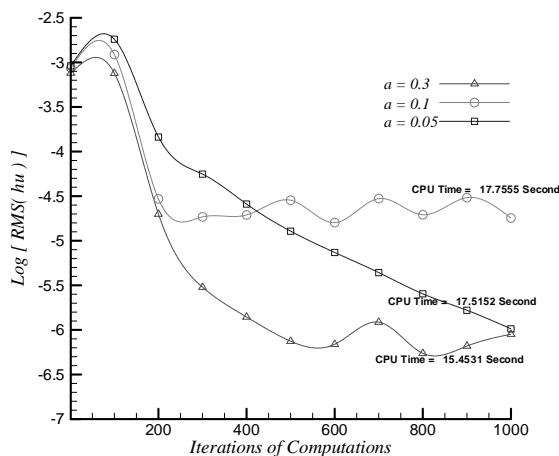
نتایج حاصل از مدلسازی عددی در جدول 1 با حل تحلیلی مقایسه شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود کلیات نتایج مدل عددی با $\alpha_{up} = 1/3$ از انطباق خوبی با حل تحلیلی دوبعدی برخوردار است.

در شکل 4 نمای سه بعدی از موجهای تند محاسبه شده

دلیل این افزایش دقت، نزدیک شدن الگوی شار جهتدار با α_{up} کوچک به الگوی تفاضل مرکزی است. کم کردن α_{up} باعث افزایش دقت حل عددی در محل موج می شود اما زمینه ظهور نوسانهای را در مناطق دور از موج (محلهای با تغییرات کم متغیرهای جریان) فراهم می سازد.



شکل 7 تاریخچه همگرایی پارامتر h

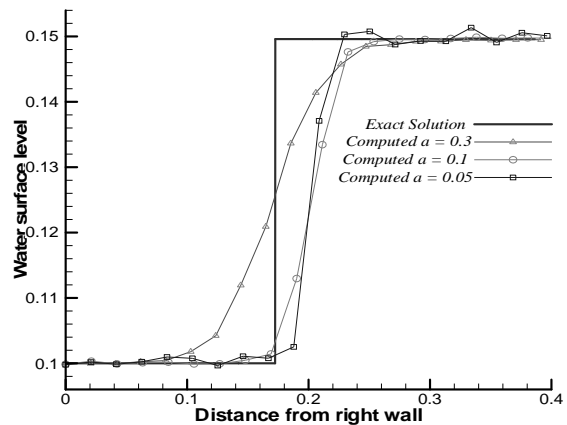


شکل 8 تاریخچه همگرایی پارامتر hu

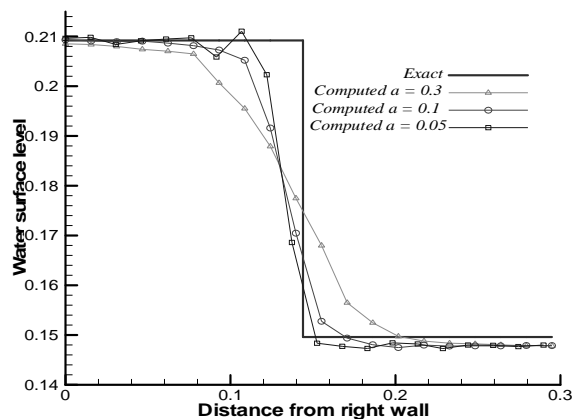
5-6- مقایسه نتایج مدل عددی با اندازه گیریهای آزمایشگاهی

به منظور برآورد کیفیت نتایج مدل عددی از الگوی شار انتقالی جهتدار برای شبیه سازی جریان فوق بحرانی در تنداب تنگ شونده استفاده شد. این آزمون دارای اندازه گیریهای آزمایشگاهی بوده و توسط محققان قبلی

جریان برای $\alpha_{up} = 0.3$ ، $\alpha_{up} = 0.1$ و $\alpha_{up} = 0.05$ مورد مقایسه قرار گرفته اند. ملاحظه می شود که همگرایی الگوی شار جهتدار با $\alpha_{up} = 0.3$ سریع است، اما موجها را مستهلک می کند و دقتی نزدیک به دقت مرتبه اول را به دست می دهد. اعمال الگوی شار جهتدار با $\alpha_{up} = 0.1$ استهلاک موجها را کمتر می کند، اما همگرایی پارامترهای پایستار جریان دچار مشکل می شود. بهترین نتیجه از الگوی شار جهتدار با $\alpha_{up} = 0.05$ به دست آمده که در آن ضمن دستیابی به روند همگرایی پایدار، موجها نسبتاً تیز محاسبه شده و دقتی نزدیک به دقت مرتبه دوم به دست آمده است.

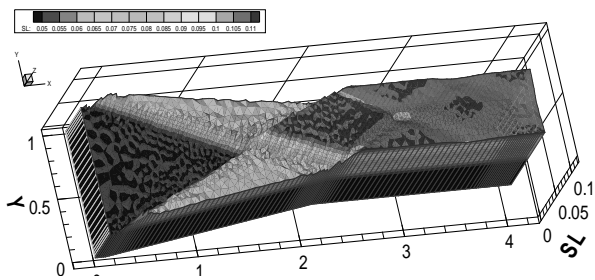


شکل 5 پروفیل عرضی سطح آب کانال در $x=0.9$ (اندازه ها به متر)

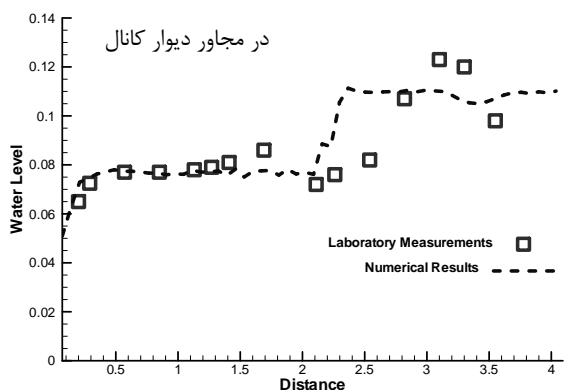
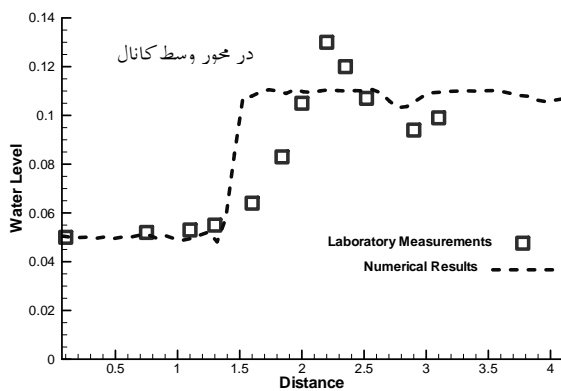


شکل 6 پروفیل عرضی سطح آب کانال در $x=1.8$ (اندازه ها به متر)

شکل 11 سطح آب محاسبه شده از الگوی شار انتقالی جهتدار را نشان می‌دهد و در شکل 12 مقایسه بین عمق اندازه‌گیری گزارش شده و نتایج مدل عددی در طول محور تقارن کانال با استفاده از روش شار انتقالی جهتدار آورده شده است. اختلاف بین نتایج مدل عددی دو بعدی و اندازه‌گیریهای آزمایشگاهی ناشی از قابل ملاحظه شدن مؤلفه قائم سرعت در محل موج اول است.



شکل 11 نقشه مناطق همتراز سطح آب محاسبه شده الگوی شار انتقالی جهتدار برای $\alpha_{up} = 0.05$ (اندازه‌ها به متر)

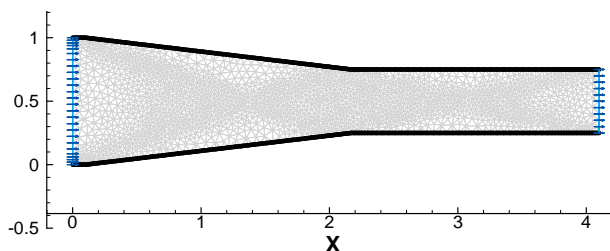


شکل 12 سطح آب محاسبه شده ($\alpha_{up} = 0.05$) و اندازه

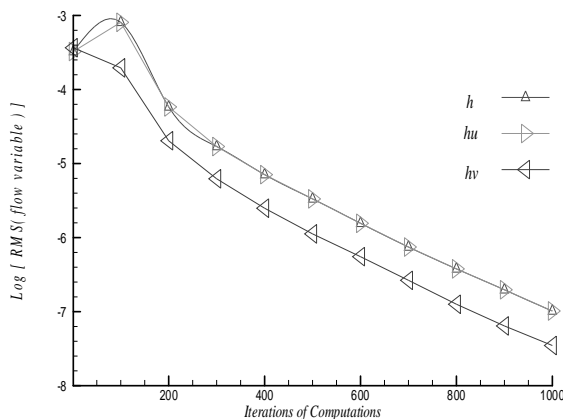
برای واسنجی مدل عددی استفاده شده است (1998) (Kruger et al).

مشخصات این کانال در شکل 9 نشان داده شده است. برای گسسته‌سازی محیط جریان از شبکه‌بندی مثلثی بی‌ساختار استفاده شده است. شبکه بی‌ساختار، شامل 2340 گره، 4417 سلول و 6756 یال است (شکل 9). علت استفاده از شبکه مثلثی بی‌ساختار، توانایی این روش در ریز کردن شبکه در محل امواج است (Morandi & Marcuzzi 1999).

مانند آزمون فیزیکی، در شروع محاسبات، عمق 0/5 متر و سرعت 2/8 متر بر ثانیه در بالادست جریان در نظر گرفته شد. برای همگرایی محاسبات با $CFL=3$ و $\alpha_{up} = 0.05$ ، زمان صرف شده 27/86 ثانیه اندازه‌گیری شد. شکل 10 نشان‌دهنده رفتار همگرایی سه پارامتر h ، hu و hv از الگوی شار انتقالی جهتدار است.



شکل 9 شبکه بی‌ساختار مثلثی برای کانال تنگ شونده (اندازه‌ها به متر)



شکل 10 روند همگرایی پارامترهای جریان (h ، hu ، hv) در روش شار انتقالی جهتدار ($\alpha_{up} = 0.05$)

| | |
|----------------------|---------------------------------------|
| Ω | مساحت یک حجم کنترل |
| Δs | یک یال مرزی حجم کنترل |
| Δx | مولفه x یال Δs |
| Δy | مولفه y یال Δs |
| \hat{n} | بردار یکه عمود بر Δs |
| V_n | تصویر سرعت در راستای \hat{n} |
| \bar{V}_e | میانگین سرعت یال Δs |
| θ | ضریب رانگ کوتای چند مرحله‌ای |
| α_1, α_2 | ضرایب نقاط یال Δs |
| α_{up} | ضریب وزنی نقطه بالادست یال Δs |

گیریهای آزمایشگاهی (اندازه ها به متر)

7- نتیجه گیری

در کار حاضر مدل عددی برای حل معادلات میانگین عمقی پیوستگی و حرکت به عنوان مدل ریاضی برای شبیه سازی عددی جریان دو بعدی فوق بحرانی جریان آزاد در کانال ها با دیوارهای غیر موازی به کار گرفته شده است. در این مدل عددی برای گسسته‌سازی معادلات حاکم از روش حجم محدود و الگوی رئوس سلول شمای همپوشان، که از اجتماع مثلثهای متصل به هر گره محاسباتی استفاده شده است. در مدل عددی معرفی شده در این مقاله، نوسانهای عددی (ناشی از روش صریح محاسبات) با استفاده از روش متوسط گیری جهتدار شار انتقالی میرا شد. مزیت این روش نسبت به روش متوسط گیری شار انتقالی در مرکز یالهای مرزی حجم کنترل، این است که دیگر نیازی به اضافه کردن عبارتهای میرا کننده نوسانات عددی حل صریح (همانند لزجت مصنوعی) وجود ندارد و در نتیجه بدون اضافه کردن عبارت اضافی به فرمول و با دقت مشابه، تحلیل عددی پایدار جریان در تندابها انجام شد و تراز سطح آب عاری از نوسان و امواج تند با دقت مناسب (مشابه حل تحلیلی و مشاهدات تجربی) محاسبه شد.

8- فهرست علائم

| | |
|-----|--------------------------|
| t | زمان |
| x,y | مختصات کارتزین |
| h | عمق آب |
| u | مولفه سرعت در راستای x |
| v | مولفه سرعت در راستای y |
| C | سرعت موج $C = \sqrt{gh}$ |
| Fr | عدد بی بعد فرود |
| Q | متغیر پایستار |
| F | شار انتقالی |
| G | شار فشار هیدرواستاتیک |
| S | عبارت های جبری معادلات |

9-منابع

- [1] Alcrudo F, Carcia-Navarro P, (1993) "A High-Resolution Godunov-Type Scheme in Finite Volume Method for the 2D Shallow Water Equations" Int. J. Numerical Methods Fluids. 16, 489-505.
- [2] Anastasiou K, Chan CT (1997) "Solution of the 2D Shallow Water Equations using Finite Volume Method on Unstructured Triangular Methods" Int. J. Numer. Methods Fluids, 24, 1225-1245.
- [3] Harten A, Lax PD, van Leer B, (1983) "On Upstream Differencing and Godunov-Type Schemes for Hyperbolic Conservation Laws" SIAM Re. 25, 35-61.
- [4] Hu K, Mingham CG, Causon DM, (1998) "A Bore-Capturing Finite Volume Method For Open-Channel Flows" Int. J. Numer. Methods Fluids, 28, 1241-1261.
- [5] Jameson A, Schmidt W, Turkel E, (1981) "Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Method Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes" AIAA Paper, 81-1259.
- [6] Jimenez oF, Chaudhry MH, (1988), Computation of Supercritical free-Surface Flows, Journal of Hydraulic Engineering, Vol. 114, No. 4, 377-393.
- [7] Kruger S, Burgisser M, Rutschmann P, (1998) "Advances in Calculating Supercritical Flows in Spillway Contractions. "Hydroinformatics 98, Bavic & Larsen (Eds)

- [16] Stager JL, Warming RF, (1981) "Flux Vector Splitting for the Inviscid Gas equations with application to Finite Difference Method" *J. Comput. Phys.* 40 , 263-293.
- [17] Thompson JF, Soni BK, Weatherill NP, (1999) "Hand book of grid generation" CRC Press.
- [18] Toro E, (2001) "Shock Capturing Methods for Free Surface Shallow Water Flow. New York: John Wiley & Sons.
- [19] Tseng MS, (1999) "Explicit Finite Volume Non-Oscillatory Schemes for 2D Transient Free Surface Flows" *Int. G. Numer. Methods Fluids*, 30, 831-843
- [20] Tseng M.H., Chu C.R. (2000) "The Simulation of Dam Break Flows by an Improved Predictor Corrector TVD Scheme" *Adv. In Water Resources*, 23, 637-643.
- [21] van Leer B, (1982) "Flux Vector splitting for Euler Equations", In *Proceedings of the 8th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, Springer Verlag, 507-512.
- [22] Wang JW, Liu RX, (2000) "A Comparative Study of Finite Volume Method on Unstructured Meshes for Simulation of 2D Shallow Water Wave Problems" *Mathematics and Computers in Simulation*, 53, 171-184.
- [23] Yoon TH, and Kang SK, (2004) "Finite Volume Model for Two-Dimensional Shallow water Flows on Unstructured Grids" *Journal of Hyd. Eng. ASCE*, , 678-688.
- [24] Yu H, Liu YP, (2001) "A Second Order Accurate Component Wise TVD Scheme for Non-Linear Hyperbolic Conservation Laws" *J. Comput. Phys.*, 173, 123-131.
- [25] Zhoa DH, Shen HW, Tabious GQ, Lai JS, Tan WV, (1994) "Finite Volume Two-Dimensional Unsteady Flow Model for River Basins" *ASCE J. Hydraul. Eng.*, 120, 864-883
- CBalkema, Rotterdam, ISBN 90 5410 983 1.
- [8] Lin GF, Lai JS, Guo WD, (2003) "Finite Volume Component Wise TVD Schemes for 2D Shallow Water Equations, *Advances in Water Resources*" 26861-873.
- [9] Liou MS, Christopher J, Steffen JR, (1993) "A New Flux Splitting Scheme" *J. Comput Phys* 107, 23-29.
- [10] Morandi M, Marcuzzi F, (1999) "Adaptivity in Space and Time For Shallow Water Equations" *International Journal for Numerical Methods In Fluids*, 285-297.
- [11] Novak P, Moffat AI, Nalluri C, Narayanan R, (1996) "Hydraulic Structures" *Chapman & Hall London*, ISBN 0-419-20070-3.
- [12] Osher S, Solomone F, (1982) "Upwind Difference Schemes For Hyperbolic Systems of Conservation Laws" *Math. Comput.* 38 339-374.
- [13] Rahman M, Chaudhry MH, (1995) "Simulation of Hydraulic Jump with grid adaptation" *J. Hydr Res.*, 33, 555-569.
- [14] Sabbagh-Yazdi SR, MohamadZadeh M, (2004) "Finite Volume Solution of Two-Dimensional Convection Dominated Sub-Critical Free Surface Flow Using Unstructured Triangular Meshes" *International Journal of Civil Engineering*, Vol. 2, No. 2, 78-91.
- [15] Sabbagh-Yazdi SR, (2006) "Comparison of Central and Upwind Flux Averaging in Overlapping Finite Volume Methods for Simulation of Super-Critical Flow with Shock Waves" *Proceeding of 9th WSEAS International Conference on Applied Mathematics (MATH06)*, Istanbul, Turkey.