

بررسی رفتار آشفته‌گی جریان گذرا در لوله‌ها با حضور نشت

سیده مریم موسوی فرد^{1*} و حمید شاملو²

1- استادیار گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فسا

2- دانشیار گروه عمران، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

*mousavifard@fasau.ac.ir

(دریافت مقاله: 97/6/5؛ پذیرش مقاله: 97/10/20)

چکیده - روش‌های روندیابی نشت از راه دور در لوله‌های پرفشار، بر پایه تحلیل نوسانات فشاری ایجاد شده طی جریان گذرا می‌باشند. از این رو مطالعه و درک جریان‌های گذرا می‌تواند منجر به بهبود کاربردهای عملی جریان گذرا به عنوان یک منبع اطلاعاتی و به طور همزمان کاهش اثرات مخرب این دسته از جریان‌ها بر خط لوله و نیز تجهیزات متصل به آن شود. بدین منظور در مقاله حاضر تلاش شده است با مدل‌سازی جریان گذرا با وجود نشت به صورت دوبعدی، رفتار جریان و نیز پارامترهای آشفته‌گی در سیکل‌های مختلف جریان گذرا تحلیل شوند. مدل عددی پیشنهادی بر پایه طرح تفاضل محدود بوده و در آن برای از بین بردن پراکندگی عددی از روش انتقال شار تصحیح شده استفاده شده است. به منظور مطالعه رفتار آشفته‌گی در جریان و استهلاک انرژی ناشی از آن، مدل آشفته‌گی $k-\omega$ به مدل دوبعدی جریان گذرا کوپل شده و اثر نشت نیز به مدل دوبعدی جریان گذرا در دو قسمت ماندگار و ناماندگار مدل اضافه شده است. با حضور نشت در جریان گذرا، تغییر قابل توجهی در رفتار پروفیل سرعت و پارامترهای آشفته‌گی در سیکل‌های رفت و برگشتی جریان مشاهده می‌شود. در سیکل‌های اولیه جریان گذرا مقادیر پارامترهای مختلف در بالادست نشت به مرور کاهش و در پایین دست آن افزایش اندکی خواهد داشت تا زمانی که این دو جریان با هم به تعادل برسند از آن پس آشفته‌گی از کناره‌های جداره شروع به گسترش در لایه‌های میانی کرده و با سپری شدن زمان، بزرگی آن کاهش می‌یابد.

کلیدواژه‌گان: آشفته‌گی، ویسکوالاستیسیته، جریان گذرا، نشت.

1- مقدمه

استفاده از مشخصات رفتاری سیال جاری در این لوله‌ها می‌باشد که با عبور موج فشاری در طول لوله اطلاعاتی را از سیستم به همراه می‌آورند. این روش‌ها دور از میدان بوده و قابلیت پوشش دامنه وسیعی از شبکه‌ها را داشته و از محبوبیت خاصی نیز برخوردارند. با این وجود به دلیل عوامل بسیاری که بر دقت و کارایی این روش‌ها تأثیرگذارند، در بسیاری موارد از کاربرد عملی فاصله دارند. بدین منظور لازم است برای بهبود این روش‌ها ابتدا جریان گذرا مورد بررسی قرار گیرد. در زمینه نشت‌یابی با

از جمله عواملی که می‌تواند انتقال سیالات (آب و نفت) را در صنایع مختلف با اختلال مواجه کرده و علاوه بر آسیب‌های زیست محیطی، هزینه‌های گزاف را به دولت‌ها اعمال کند، هدر روی این سیالات از طریق نشت‌ها می‌باشد. اتلاف آب به ویژه در کشورهایی که در نواحی گرم و خشک قرار داشته و از سیستم‌های آبرسانی فرسوده نیز برخوردارند بسیار حائز اهمیت می‌باشد. از جمله روش‌های نوین رو به گسترش برای روندیابی نشت

پایه توزیع لحظه‌ای سرعت هستند، توسط برخی محققان از (Vardy and Hwang (1991)، (Pezzinga (1999) و (Silva-Araya and Chaudhry (1997) بکار گرفته شده‌اند، که از آن میان می‌توان به مدل‌های آشفتگی پنج لایه و دو لایه اشاره نمود (Ghidaoui et al. 2005).

مدل‌های دو معادله‌ای¹ آشفتگی نیز بر حسب معادلات انرژی جنبشی و معادلات استهلاک هستند. این دسته از مدل‌های آشفتگی که از گروه مدل‌های RANS محسوب می‌شوند، توسط برخی محققان برای بررسی ساختار و رفتار آشفتگی در ضربه قوچ استفاده شده‌اند. Zhao and Fan et al. (2006) از مدل $k-\varepsilon$ پیشنهادی (1993) برای بررسی رفتار آشفتگی در سیکل‌های مختلف ضربه قوچ استفاده نمودند. (Wahba (2009 مدل آشفتگی Baldwin-Lomax را برای جریان‌های گذرا با اعداد رینولدز بالا و پایین بکار گرفت. (Riasi et al. (2013, (2009a, 2009b از یک مدل $k-\omega$ برای بررسی رفتار و ساختار آشفتگی در جریان‌های ناماندگار آشفته در لوله، رفتار پروفیل‌های سرعت در هر دو نوع جریان لایه‌ای و آشفته استفاده نمودند و تعدادی پارامتر بی‌بعد برای ارزیابی ترم‌های تنش برشی آشفتگی و ویسکوز و نیز استهلاک انرژی در حین سیکل اول ضربه قوچ ارائه نمودند. (Mahdizadeh (2018 پدیده ضربه قوچ را با کمک روش تغییر یافته درجه دو تکثیر موج Godunov-type به صورت یک بعدی و دوبعدی مدل کرده و با کمک مدل \bar{v}^2-f پدیده آشفتگی مدل شده است. (Saemi et al. (2018 معادلات ناویر استوکس را با کمک نرم افزار Fluent به صورت دوبعدی و سه بعدی و با استفاده از مدل آشفتگی $k-\omega$ مدل‌سازی کردند.

در کنار پدیده آشفتگی عامل دیگری که در لوله‌های پلاستیکی استهلاک انرژی و افت موج فشاری را موجب می‌شود، پدیده ویسکوالاستیسیته است. در واقع همین عامل موجب می‌شود که اثر متقابل سیال و جداره لوله در این دسته از لوله‌ها رفتار متفاوتی را نسبت به لوله‌های فلزی و بتنی از خود نشان دهد. تاکنون مقالات بسیاری منتشر شده که در آن‌ها اثر ویسکوالاستیسیته مورد

شناخت هر چه بیشتر رفتار جریان می‌توان مدل‌هایی را برای روندیابی نشت ارائه نمود که هر چه بیشتر با شرایط واقعی منطبق بوده و از طرفی از انعطاف خوبی نیز برخوردار باشند.

با توجه به هزینه زیاد اندازه‌گیری آزمایشگاهی آشفتگی، مدل‌های عددی دوبعدی بررسی جریان گذرا روز به روز بیشتر مورد توجه بوده‌اند. آزمایش‌های عددی دوبعدی قادر به ارائه درک بهتری از دینامیک جریان گذرا نسبت به مدل‌های یک بعدی بوده و قادر به توصیف مکانیزم انتقال (آشفتگی، آلودگی و غیره) و نیز ارائه پروفیل سرعت هستند. بدین منظور در ابتدا مدل‌های شبه‌دوبعدی ارائه شدند که نیازی به حل کامل روابط دوبعدی پیوستگی و مومنتم نداشته و در عین حال نتایج مقبولی را بدست می‌دهند. در واقع مدل‌های دوبعدی و شبه‌دوبعدی با استفاده از مدل‌های آشفتگی یک پروفیل سرعت جریان متقارن را حل می‌کنند.

(Mitra and Rouleau (1985 یک روش گسسته‌سازی ضمنی را برای حل معادلات کامل دوبعدی جریان گذرا بکار گرفتند. (Vardy and Hwang (1991 تحلیلی شبه دوبعدی از جریان‌های آشفته ناماندگار در یک تک لوله با استفاده از روش مشخصه‌های یک بعدی در طول لوله و روش تفاضل محدود در المان‌های فرضی استوانه‌ای تو در تو ارائه نمودند. (Silva-Araya and Chaudhry (1997 مدلی را ارائه نمودند که ضریب استهلاک انرژی را با تغییر ترم اصطکاک در معادلات حاکمه یک بعدی جریان گذرا تعریف می‌کند. مدل آن‌ها پروفیل سرعت لحظه‌ای را در جریان گذرای آشفته و آرام تخمین می‌زند.

(Pezzinga (1999 یک مدل ریاضیاتی دوبعدی را پیشنهاد نمود که جریان آشفته در تک لوله و شبکه‌ها را به روش تفاضل محدود حل می‌کند. (Zhao and Ghidaoui (2003 مدل (Vardy and Hwang (1991 را مورد بررسی قرار داده و با کاهش زمان محاسبه ویرایشی مؤثرتر و قدرتمندتر از آن را ارائه نمودند.

به منظور مدل‌سازی پدیده آشفتگی در جریان ضربه قوچ، مدل‌های آشفتگی مختلفی توسط محققان استفاده شده است. به عنوان مثال، مدل‌های جبری شبه‌ماندگار که بر

¹ Two equation-based models

لوله و دبی جریان) مورد بررسی قرار دادند. در مقاله حاضر معادلات حاکمه دو بعدی ضربه قوچ در یک لوله ویسکوالاستیک با استفاده از یک مدل تفاضل محدود حل می‌شود. در این فرایند، معادله مومنتم با استفاده از روش کاملاً ضمنی و معادله پیوستگی با استفاده از یک طرح ضمنی شبه دو بعدی تحلیل می‌شوند.

اثرات ویسکوالاستیسیته نیز در یک فرایند تکراری به صورت دوبعدی به مدل اضافه شده و مدل آشفتگی $k-\omega$ نیز برای تحلیل ساختار آشفتگی از طریق ترم تنش برشی به معادله مومنتم کوپل شده است. لازم به ذکر است که در مقاله حاضر اثر نشت نیز به مدل اضافه شده و تأثیر نشت بر رفتار پروفیل سرعت و پارامترهای آشفتگی در سیکل‌های مختلف حرکت موج فشاری بررسی شده است.

2- مدل سازی جریان گذرای دوبعدی

در جریان گذرای تراکم ناپذیر دوبعدی متقارن محوری، معادلات حرکت برای لوله ویسکوالاستیک به صورت روابط (1) و (2) بیان می‌شود (Pezzinga et al. 2014):

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\rho a^2}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} + 2\rho a^2 \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{r\rho} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} \quad (2)$$

که در آن u سرعت در جهت جریان، t زمان، ρ چگالی سیال، τ تنش برشی، p فشار داخلی، A سطح مقطع عرضی لوله، a سرعت موج، H هد فشاری و ε_1 کرنش به تأخیر افتاده است که در قسمت مدل سازی اثر ویسکوالاستیسیته تعیین می‌شود. مختصات در راستای جریان و در جهت عمود بر آن به ترتیب با x و r نشان داده می‌شود. به منظور حل معادله پیوستگی، Pezzinga et al. (2014) متغیر φ را به صورت رابطه (3) تعریف می‌کند:

$$\varphi = \frac{p}{\gamma} + \frac{2a^2}{g} \varepsilon_1 \quad (3)$$

در این صورت معادله (1) به صورت رابطه (4) خواهد شد:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{a^2}{gA} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

معادلات حاکمه (1 و 2) با استفاده از طرح تفاضل محدود

بررسی قرار گرفته شده است. به عنوان مثال، Guney (1983) پدیده ضربه قوچ را در لوله‌های ویسکوالاستیک در شرایطی که پارامترهای سطح مقطع وابسته به زمان است را با کمک طرح تفاضل محدود مورد بررسی قرار دادند. Covas et al. (2005, 2004b, 2004a) مدل ریاضی بر اساس روش مشخصه‌ها ارائه نمودند که در این مدل خاصیت ویسکوالاستیسیته جداره لوله با استفاده از مدل Kelvin-Voigt شبیه سازی شده بود که بخوبی قادر به شبیه سازی تبادل انرژی بین سیال و جداره ویسکوالاستیک لوله بود. Brunone et al. (2000) و پس از آن Brunone and Berni (2010) اهمیت ضریب اصطکاک ناماندگار و عملکرد متقابل آن را با ویسکوالاستیسیته مورد بررسی قرار دادند و موفق به اندازه گیری تنش برشی جداره با استفاده از ترکیب تئوری طول اختلاط پرانتل¹ و پروفیل‌های سرعت شده در آزمایشگاه محاسبه شدند. Soares et al. (2008) و Duan et al. (2010) نیز از مدل Kelvin-Voigt برای مدل سازی ویسکوالاستیسیته و تعیین ضرایب مرتبط با آن با حل معکوس جریان گذرا استفاده نمودند و نشان دادند بخش زیادی از افت هد فشار در حین جریان گذرا در مقایسه با اصطکاک ناماندگار متعلق به تبادل انرژی موج فشاری با جداره ویسکوالاستیک لوله است. Keramat et al. (2012) اثر ویسکوالاستیسیته را به طور همزمان با اثر متقابل سیال و سازه با استفاده از روش مشخصه‌ها و روش تفاضل محدود مدل سازی نموده و Keramat et al. (2013) از نسبت پواسون وابسته به زمان برای مدل سازی ویسکوالاستیسیته استفاده نمودند. Pezzinga et al. (2014) و همچنین Shamloo and Mousavifard (2015) اثر ویسکوالاستیسیته را با مدل دو بعدی جریان گذرا کوپل و پارامترهای آشفتگی را در کنار اثر ویسکوالاستیسیته اندازه گیری نمودند. Pezzinga et al. (2016) مدل Kelvin-Voigt را به ازای تعداد مختلف پارامترهای مکانیکی با استفاده از مدل‌های یک بعدی و دوبعدی کالیبره نموده و تأثیر تعداد پارامترها را در کیفیت مدل سازی جریان گذرا به ازای شرایط اولیه متفاوت (طول

¹ Prandtl's mixing length theory

لحظه‌ایی به صورت رابطه (9) بیان می‌شود:

$$\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} = \frac{1}{\theta_1} \left(\frac{Dp}{2eE_1} - \varepsilon_1 \right) \quad (9)$$

در این معادله $\theta_1 = \eta_1 / E_1$ زمان تأخیر² که در آن E_1 و η_1 به ترتیب لزجت و مدول الاستیسیته المان اول، e ضخامت جداره لوله، D قطر داخلی هستند. لازم به ذکر است که مقادیر $\theta_1 = 0.497s$ و $E_1 = 7750 \text{ MPa}$ توسط Pezzinga et al. (2014) در دست آمده که برای حل معادله پیوستگی از آن‌ها استفاده شده است.

4- مدل آشفته‌گی $k-\omega$

در جریان‌های آشفته، تنش رینولدز را می‌توان با استفاده از فرضیه لزجت آشفته‌گی تقریب زد. در این صورت تنش رینولدز در ترم‌هایی از لزجت آشفته‌گی و گرادیان سرعت بیان می‌شود:

$$-\overline{\rho u'q} = \rho \nu_t \frac{\partial u}{\partial r} \quad (10)$$

در مقاله حاضر مدل $k-\omega$ ویلکوکس برای حل معادلات انتقال در مدل‌سازی آشفته‌گی به کار گرفته شده‌اند:

$$\nu_t = \frac{k}{\omega} \quad (11)$$

معادله k :

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(v + \sigma^* \nu_t) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \beta^* k \omega \quad (12)$$

معادله ω :

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r(v + \sigma \nu_t) \frac{\partial \omega}{\partial r} \right] + \alpha \nu_t \frac{\omega}{k} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \beta \omega^2 \quad (13)$$

در این معادله k انرژی جنبشی آشفته‌گی و ω نرخ مشخصه استهلاک³ می‌باشد (Wilcox 1994). شرایط اولیه k و ω از حل ماندگار جریان به صورت یک فرایند تکراری و ترم‌های دیفیوژن به روش تفاضل محدود ضمنی گسسته سازی شده و سایر ترم‌ها نیز به صورت صریح حل می‌شوند. در هر گام زمانی معادله‌های k و ω به صورت سیستم ماتریس قطری نوشته می‌شوند. در مدل Wilcox ثابت‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

حل شده و برای حل معادله پیوستگی از روش حل تکراری¹ استفاده می‌شود.

$$\varphi_i^* = \varphi_i^n - \frac{\Delta t a^2}{g} \left[\frac{U_{i+1}^n - U_{i-1}^n}{2\Delta x} \right] \quad (5)$$

در این معادله U سرعت میانگین در هر مقطع عرضی می‌باشد. هد فشار لحظه‌ایی در زمان‌های بعد، از معادله (3) محاسبه شده و در معادله مومنتم، معادله (6)، برای محاسبه u بکار می‌رود (Shamloo and Mousavifard 2015):

$$-F_{u1} U_{ij-1}^{n+1} + F_{u2} U_{ij}^{n+1} - F_{u3} U_{ij+1}^{n+1} = U_{ij}^n g \Delta t \left[\frac{H_{i+1}^{n+1} - H_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x} \right] \quad (6)$$

F_{ui} ضریبی است که شامل اثرات لزجت است.

$$F_{u1}(j) = \frac{a\Delta t(v + \nu_{t(j-1)}^n)}{g} \frac{1}{\bar{r}_j \Delta r \bar{r}_j - \bar{r}_{j-1}} \frac{r_{j-1}}{\bar{r}_j}$$

$$F_{u3}(j) = \frac{a\Delta t(v + \nu_{t(j)}^n)}{g} \frac{1}{\bar{r}_j \Delta r \bar{r}_{j+1} - \bar{r}_j} \frac{r_j}{\bar{r}_j}$$

$$F_{u2}(j) = F_{u1}(j) + F_{u3}(j) \quad (7)$$

در این معادله ν لزجت سینماتیک و ν_t لزجت آشفته‌گی می‌باشد.

تنش برشی τ به صورت رابطه (8) بیان می‌شود:

$$\tau = \rho \nu \frac{\partial u}{\partial r} - \overline{\rho u'q} \quad (8)$$

که $u'q'$ نوسانات آشفته‌گی متناظر با به ترتیب سرعت طولی u و سرعت شعاعی q می‌باشد.

3- مدل سازی اثر ویسکوالاستیسیته

علاوه بر اصطکاک ناشی از زبری جداره و لزجت سیال، عامل دیگری که در استهلاک انرژی در لوله‌های پلاستیکی تأثیر چشم‌گیری دارد، خاصیت ویسکوالاستیک این دسته از لوله‌ها می‌باشد. از جمله لوله‌های پلاستیکی، می‌توان به لوله‌های PVC اشاره کرد که به دلایلی از جمله سهولت در نصب، وزن کم و مقاومت در مقابل خوردگی شیمیایی در سال‌های اخیر از محبوبیت زیادی در سیستم‌های آبرسانی برخوردار بوده‌اند (Workman 1988). بر اساس مطالعات (Pezzinga et al. 2014) در فرضیه Kelvin-Voigt نخستین المان مولفه کرنش

² Retardation

³ Specific Dissipation Rate

¹ Iterative

در رابطه (18)، S برابر با $\{f_{j+1/2}\}$ $sign$ می‌باشد.

5- مدل سازی دوبعدی نشت در جریان گذرا

به منظور توسعه مدل دوبعدی جریان گذرا با حضور نشت، لازم است اثر نشت در دو قسمت جریان ماندگار و جریان ناماندگار پیاده‌سازی شده و همزمان با مدل‌های آشفستگی اجرا شود.

برای اعمال نشت از قوانین حاکم بر جریان یک‌بعدی استفاده شده است. بدین صورت که تعادل جریان در هر گره برقرار است (جریان ورودی به هر گره برابر است با جریان خروجی ناشی از نشت به علاوه جریان خروجی در ادامه لوله)، هد فشار در یک گره به ازای جریان بالادست، پایین‌دست و نشت یکسان است و رابطه نشت نیز به صورت رابطه روزنه بیان می‌شود. روابط موارد عنوان شده به صورت روابط (20) تا (22) می‌باشد:

$$Q_u = Q_d + q_L \quad (20)$$

$$H_u = H_d = H_L \quad (21)$$

$$q_L = C_d A_{orf} \sqrt{2gH_L} \quad (22)$$

در این روابط، Q_u دبی جریان و H_u هد جریان در بالادست گره نشتی، Q_d دبی جریان و H_d هد جریان در پایین‌دست گره نشتی، q_L دبی خروجی از گره نشتی و H_L هد جریان در گره نشتی، A_{orf} مساحت روزنه (مساحت نشتی)، g شتاب جاذبه و C_d ضریب دبی می‌باشد. سپس با استفاده از روش نیوتن رفسون اثر نشت به پروفیل سرعت اعمال می‌شود. در این روش خطوط مشخصه در بالادست و پایین‌دست هر گره به طور جداگانه حل می‌شود.

6- صحت سنجی مدل عددی

پس از توسعه مدل دوبعدی جریان گذرا با حضور نشت لازم است این مدل صحت سنجی شود. بدین منظور نتایج آزمایشگاهی (Covas and Ramos 2010) انتخاب شده است. خط لوله مورد نظر در این آزمایش دارای طول 272 متر و قطر داخلی 50/6 میلی متر می‌باشد. سیستم شامل یک پمپ و یک مخزن تحت فشار در انتهای بالادست و یک شیر توپی در انتهای پایین‌دست برای کنترل جریان و

$$\alpha = \frac{5}{9}, \beta = \frac{3}{40}, \beta^* = \frac{9}{100}, \sigma = \frac{1}{2}, \sigma^* = \frac{1}{2}$$

در محور لوله شرایط مرزی k و ω به صورت زیر می‌باشد:

$$\frac{\partial k}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial r} = 0$$

در جداره لوله نیز $k=0$ بوده و $\omega \rightarrow \frac{6v}{\beta y^2}$ هنگامی که به دیواره نزدیک می‌شویم، برقرار است (Wilcox 1994).

شرایط اولیه k و ω نیز با استفاده از حدس اولیه $k=0.005V^2$ و $\omega = C_\mu k^{1/2} / (0.015\beta^* D)$ بدست می‌آیند.

به منظور کاهش پراکندگی عددی که تحت تأثیر گرادیان‌های تند در نزدیکی جداره ایجاد می‌شود و بصورت نوسانات کوچک اضافی در هد فشاری پدیدار می‌شوند (بدلیل اختلاف زیاد اندازه سرعت به ازای گامی کوچک در راستای شعاع در این ناحیه)، روش انتقال شار اصلاح شده (FCT¹) که اغلب در مسائل یک بعدی بکار می‌رود، استفاده شده است (Book et al. 1975).

در این روش چندین مرحله به روش تفاضل محدود استاندارد اعمال می‌شود. جریان‌های پخش کننده² در گام زمانی n محاسبه شده و با استفاده از محاسبه ضریبی از تفاضل هد فشاری در گام‌های زمانی مختلف، نوسانات ریز اضافی (نویزها) در هد فشاری حذف می‌شوند:

$$f_{j+1/2} = \lambda_1 (H_{j+1}^n - H_j^n) \quad (14)$$

در این معادله λ_1 یک ضریب پخش بوده و بین 0/01 و 0/1 تغییر می‌کند (Book et al. 1975). در گام بعدی جریان‌های پخش کننده در گام زمانی $n+1$ محاسبه می‌شوند:

$$\tilde{f}_{j+1/2} = \lambda_2 (H_{j+1}^{n+1} - H_j^{n+1}) \quad (15)$$

در این رابطه λ_2 ضریب ضد-پخش³ خوانده شده و بین 0 و 1 تغییر می‌کند (Book et al. 1975).

$$\tilde{H}_j^{n+1} = H_j^{n+1} + \lambda_1 (H_{j+1}^n - 2H_j^n + H_{j-1}^n) \quad (16)$$

بدین ترتیب جواب صحیح برای H تعیین می‌شود:

$$X_{j+1/2} = \tilde{H}_{j+1}^{n+1} - \tilde{H}_j^{n+1} \quad (17)$$

$$f_{j+1/2}^e = Smax \left\{ 0, \min \left[SX_{j-1/2}, abs \left(\tilde{f}_{j+1/2} \right), SX_{j+3/2} \right] \right\} \quad (18)$$

$$H_j^{n+1} = \tilde{H}_j^{n+1} - \left(f_{j+1/2}^e - f_{j-1/2}^e \right) \quad (19)$$

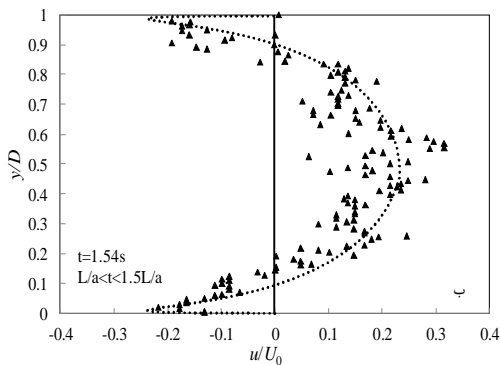
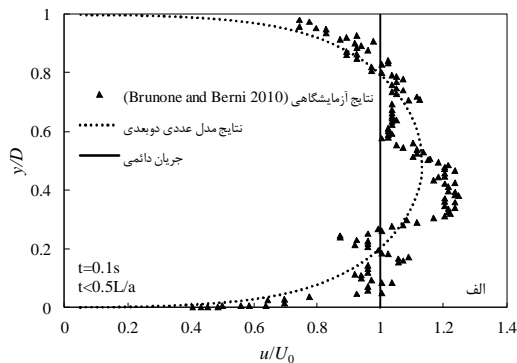
¹ Flux-corrected transport

² Diffusive fluxes

³ Anti-Diffusion

در شکل 3 عملکرد مدل دوبعدی توسعه یافته در شبیه سازی پروفیل سرعت ارائه شده در نتایج آزمایشگاهی Brunone and Berni (2010) در شرایط جریان ماندگار و زمان $t=1/54s$ بعد از ایجاد جریان گذرا در فاصله 180 متری از پایین دست مخزن، به عنوان نمونه صحت سنجی شده است. در این آزمایش قطر لوله 93/3 میلی متر، طول لوله پلی اتیلن 352 متر و سرعت الاستیک موج برابر با 332/53 متر بر ثانیه می‌باشد. عدد رینولدز اولیه در آزمایش برابر با 60700 می‌باشد. مدت زمان بسته شدن شیر نیز 0/29 ثانیه می‌باشد.

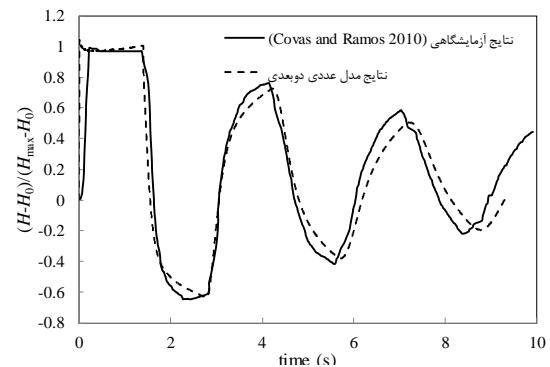
در شکل 3 مقایسه پروفیل سرعت با نتایج آزمایشگاهی ارائه داده شده است. در این نمودارها محور افقی با سرعت اولیه در جریان ماندگار، بی‌بعد شده‌اند. محور عمودی نیز شعاع بی‌بعد شده خط لوله را نشان می‌دهد. نتایج مدل پیشنهادی $k-\omega$ انطباق خوبی را با نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهد.



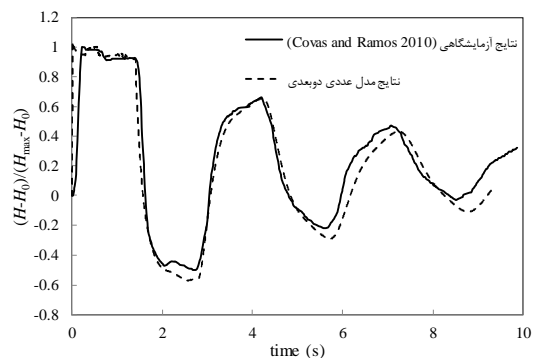
شکل 3 مقایسه پروفیل‌های سرعت بدست آمده از مدل عددی حاضر در فاصله 180 متری پایین دست مخزن با نتایج آزمایشگاهی Brunone and Berni (2010). الف) 0/1 ثانیه و ب) 1/54 ثانیه پس از شروع جریان گذرا

نیز ایجاد جریان گذرا می‌باشد. آزمایش برای دبی جریان اولیه برابر با $Q_0 = 1$ lit/s معادل با عدد رینولدز $Re = 25,000$ در جریان‌های آشفته با جداره صاف در دو حالت با و بدون وجود نشت انجام شده است که اندازه نشت انتخابی معادل با $q_L = 0/34$ lit/s می‌باشد و به فاصله 162/48 m از مخزن بالادست رخ داده است. نتایج حاصل از صحت سنجی مدل توسعه یافته برای دو حالت عنوان شده در شکل‌های 1 و 2 نشان داده شده است.

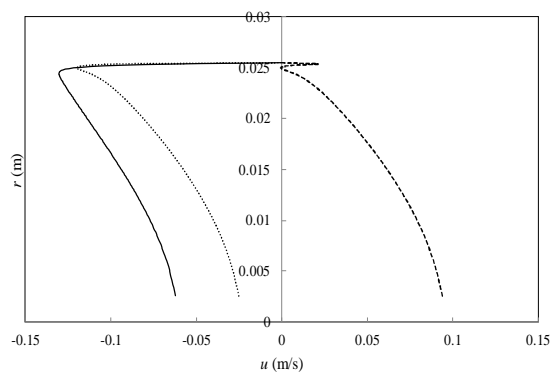
با توجه به شکل‌های 1 و 2 مشاهده می‌شود که مدل عددی دوبعدی نتایج قابل قبولی را از خود ارائه می‌دهد. در شرایط بدون نشت عملکرد مدل عددی دوبعدی در همه سیکل‌ها تقریباً یکسان است و در شرایطی که نشت وجود داشته باشد (شکل 2) در سیکل‌هایی که هد فشار بالا در جریان ایجاد می‌شود، عملکرد مدل دوبعدی بهتر از سیکل‌هایی است که هد فشار پایین در جریان ایجاد می‌شود.



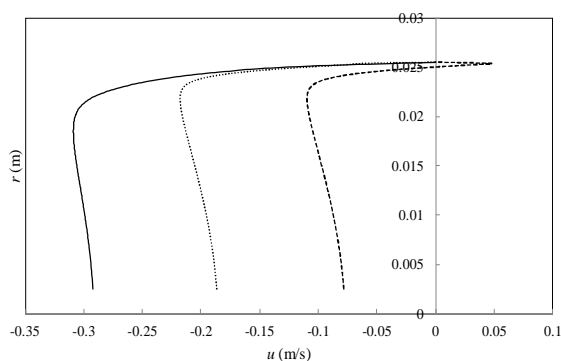
شکل 1 مقایسه نتایج مدل عددی دوبعدی با هد فشار در جریان بدون نشت



شکل 2 مقایسه نتایج مدل عددی دوبعدی با هد فشار در جریان با حضور نشت



(ج)



(د)

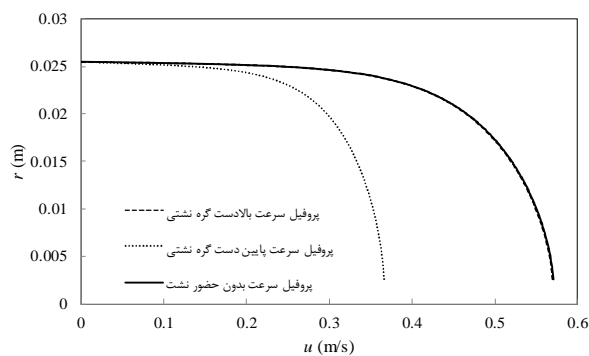
شکل 4 پروفیل سرعت در شرایط بدون نشت و با وجود نشت (برای الف) شرایط ماندگار، ب) نخستین عبور موج فشاری از گره مورد بررسی، ج) دومین عبور موج فشاری از گره مورد بررسی، د) سومین عبور موج فشاری از گره مورد بررسی

به ترتیب در نمودارهای 4- ب تا 4- د رفتار پروفیل سرعت‌های ذکر شده در اندک زمانی پس از عبور موج فشاری برای نخستین و دومین و سومین بار از گره نشتی نشان داده شده است.

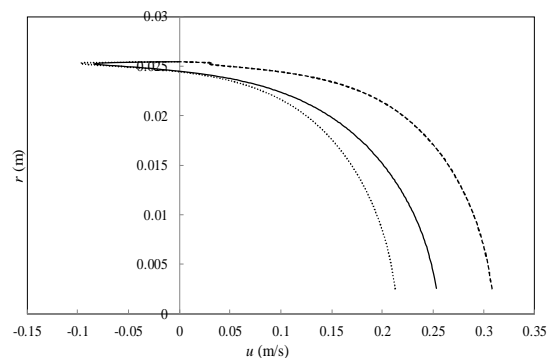
برای درک بهتر دلایل تفاوت‌های تغییرات پروفیل‌های سرعت در حین عبورهای متوالی موج فشاری، تغییرات دبی جریان نیز در شکل 5 نشان داده شده است. همان‌طور که از مقادیر نشان داده شده برای دبی در شرایط بدون نشت، شدیدتر از نوسانات دبی جریان بالادست و پایین‌دست گره نشتی می‌باشد و بنابراین از آن به عنوان دلیلی برای تأخیر پروفیل‌های سرعت بالادست و پایین‌دست گره نشتی در واکنش به موج فشاری یاد می‌شود.

مدل مذکور همچنین در نشان دادن رفتار صحیح جریان نزدیک دیواره در حین فازهای مختلف موفق است. همان‌طور که پیش‌تر نیز اشاره شد، از مزایای مدل‌سازی دوبعدی جریان گذرا، شناخت دقیق‌تر جریان گذرا همراه با جزئیات رفتار جریان در مراحل مختلف می‌باشد. بدین منظور در ادامه عملکرد جریان با وجود نشت طی مراحل مختلف جریان گذرا بررسی می‌شود.

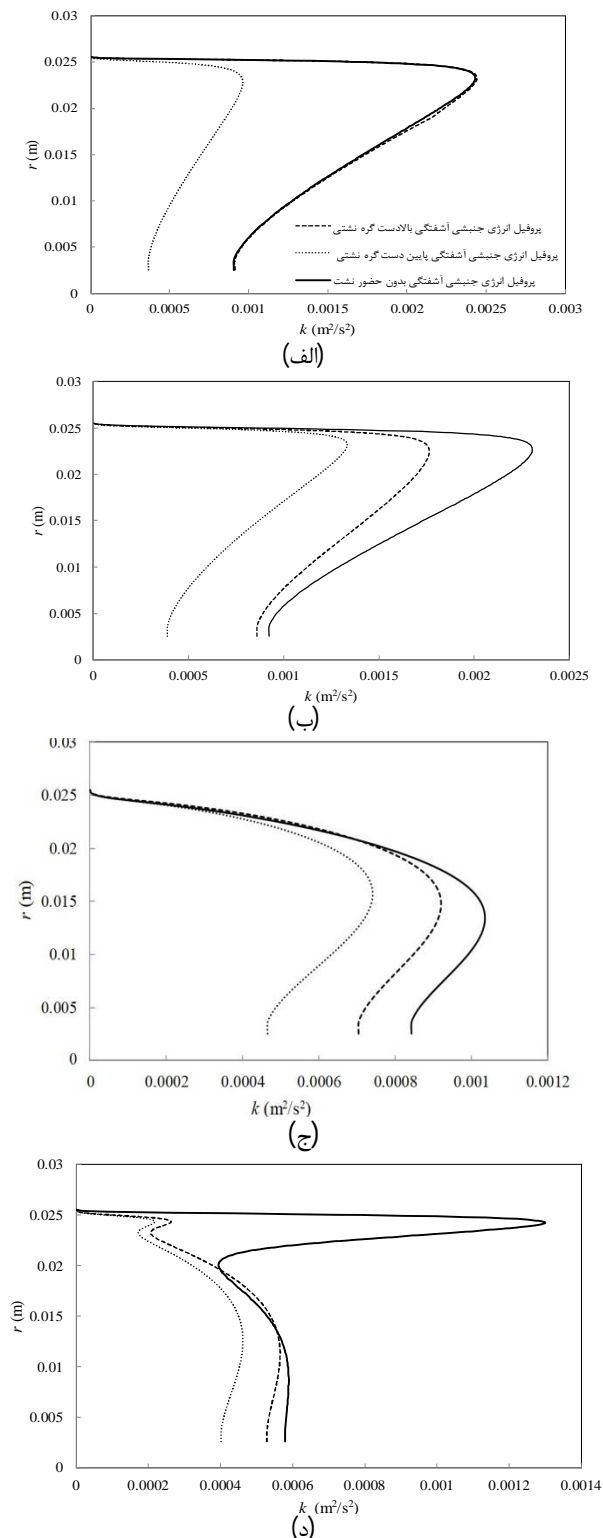
تغییرات پروفیل سرعت در طول مدت جریان گذرا برای حالت بدون نشت و برای حالت با وجود نشت در بالادست و پایین‌دست گره نشتی در شکل 4 نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل 4- الف مشاهده می‌شود، سرعت جریان در شرایط ماندگار در بالادست گره نشتی برابر با سرعت جریان در شرایط بدون نشت می‌باشد و سرعت جریان در پایین‌دست گره نشتی نیز، تحت تأثیر خروج جریان ناشی از نشت، افت قابل ملاحظه‌ای را نشان می‌دهد، به نحوی که سرعت متوسط جریان تحت تأثیر نشتی با قطر $d_L = 0/0039m$ از $V_1 = 0/49m/s$ (در بالادست گره نشتی) به $V_2 = 0/31m/s$ (در پایین‌دست گره نشتی) کاهش می‌یابد.



(الف)



(ب)

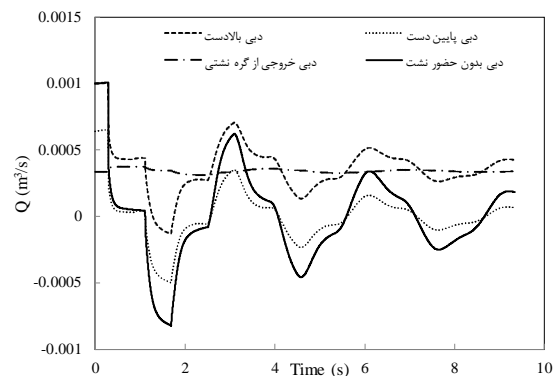


شکل 6 پروفیل‌های انرژی جنبشی آشفته‌گی در حین سیکل‌های مختلف جریان گذرا در شرایط باوجود و بدون وجود نشت برای الف) شرایط ماندگار، ب) نخستین عبور موج فشاری از گره مورد بررسی، ج) دومین عبور موج فشاری از گره مورد بررسی، د) سومین عبور موج فشاری از گره مورد بررسی

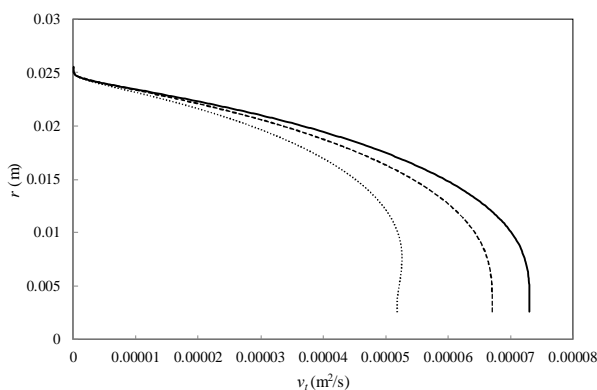
با توجه به شکل 5 همچنین مشخص می‌شود که در زمانی که دبی جریان در شرایط بدون نشت و پایین دست نشت مقداری نزدیک به صفر دارند، مقدار دبی در بالادست جریان مقداری مثبت دارد. در شکل 5 تغییرات دبی خروجی از محل نشت تحت تأثیر عبور موج فشاری دبی نیز نشان داده شده است که بر تناسب تغییرات دبی خروجی از نشت و تغییرات هد فشار در آن گره دلالت دارد. به دلیل کوچکی مساحت نشت، تغییرات دبی خروجی از محل نشت بسیار ناچیز می‌باشد. رفتار لحظه به لحظه پروفیل‌های سرعت ارائه شده در شکل 4 با مراجعه به نتایج شکل 5 قابل درک می‌باشد. به عنوان مثال در شکل 4-ب که پروفیل‌های سرعت را در لحظاتی پس از نخستین عبور موج از محل شیر نشان می‌دهد، سرعت در بالادست جریان همچنان دارای مقداری مثبت است در حالی که دو پروفیل سرعت پایین دست گره نشتی و بدون نشت، به مقدار صفر خود تحت تأثیر جریان کندشونده بوجود آمده نزدیک می‌شوند.

نمودارهای مرتبط با رفتار انرژی جنبشی آشفته‌گی در حین سیکل‌های مختلف جریان گذرا در دو حالت جریان با حضور و نشت و بدون حضور نشت در شکل 6 نشان داده شده است.

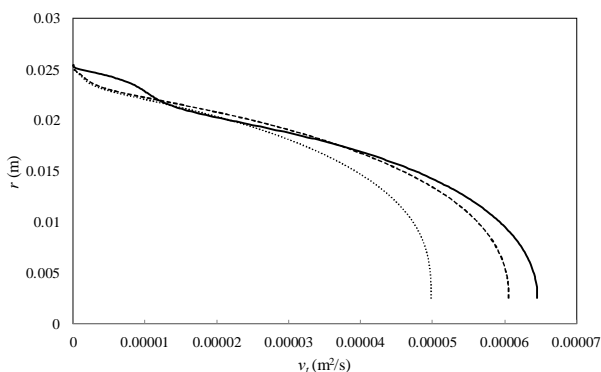
در شرایط جریان ماندگار نیز (شکل 6-الف) پروفیل انرژی جنبشی آشفته‌گی در بالادست گره نشتی و در شرایط بدون نشت، کاملاً بر هم منطبق هستند. در حالی که در پایین دست گره نشتی، انرژی جنبشی آشفته‌گی به دلیل کاهش دبی ناشی از نشت، کاهش می‌یابد.



شکل 5 تغییرات دبی جریان در حین سیکل‌های مختلف ضربه قوچ برای شرایط با وجود و بدون وجود نشت



(ج)



(د)

شکل 7 پروفیل‌های لزجت آشفتگی در حین سیکل‌های مختلف جریان گذرا در شرایط باوجود و بدون وجود نشت برای الف) شرایط ماندگار، ب) نخستین عبور موج فشاری از گره مورد بررسی، ج) دومین عبور موج فشاری از گره مورد بررسی، د) سومین عبور موج فشاری از گره مورد بررسی

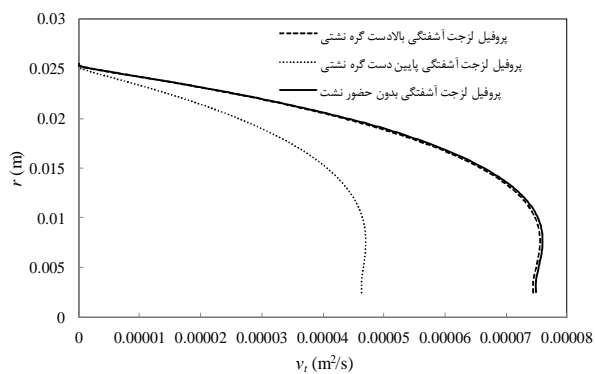
7- نتیجه‌گیری

با توجه به اینکه موج ایجاد شده حین جریان گذرا با سرعت بالایی کل سیستم را طی کرده و شکل آن بواسطه تکثیر و اثرات متقابل انعکاس از لوله و تجهیزات متصل به آن تغییر می‌کند، می‌توان از این امواج به عنوان یک نوع روش اندازه‌گیری یاد کرد زیرا اندازه‌گیری و تحلیل جریان گذرای تحت فشار، اطلاعاتی را درباره خط لوله بدست می‌دهد. اطلاعاتی که موج فشاری همراه خود می‌آورد، برای تخمین وضعیت لوله و شرایط حاکم بر آن قابل استفاده می‌باشد. یکی از شرایطی که تحلیل موج فشاری می‌تواند در تخمین آن بسیار مؤثر باشد، وجود یک یا چندین شکستگی یا خوردگی (نشت) در خط لوله است که بواسطه آن سیال هدر رفته و خسارت‌های اقتصادی و

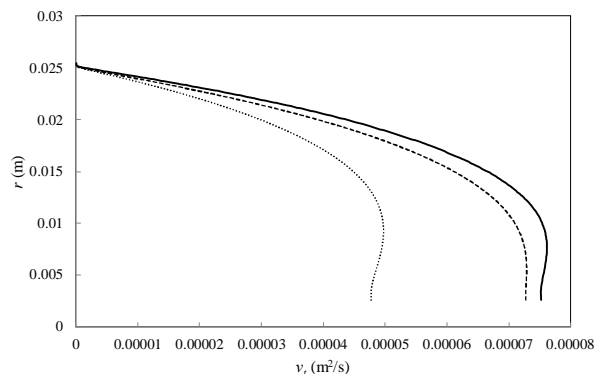
همان‌طور که از مقایسه دو شکل 6-ب و 6-الف استنباط می‌شود، انرژی جنبشی آشفتگی بالادست گره نشتی در نخستین عبور موج نسبت به شرایط ماندگار کاهش و انرژی جنبشی آشفتگی پایین‌دست گره نشتی افزایش می‌یابد. این امر برای به تعادل رسیدن جریان در بالادست و پایین‌دست گره نشتی رخ می‌دهد. از این پس انرژی جنبشی آشفتگی از نزدیکی دیواره به سمت مرکز جریان منتشر شده و بدین ترتیب کم‌کم افت می‌کند تا جایی که جریان کاملاً از حرکت بایستد.

انرژی جنبشی در بالادست و پایین‌دست گره نشتی در شرایط بدون نشت به دلیل تأخیر در انتشار آشفتگی، پروفیل انرژی جنبشی منطبق با پروفیل متناظر با آن در شرایط جریان ماندگار (شکل 6-ب) می‌باشد.

اثر به تعادل رسیدن جریان در نمودارهای لزجت آشفتگی (شکل 7) نیز در نمودارهای مرتبط با جریان با حضور نشت مشاهده می‌شود و پس از نخستین عبور موج فشاری از گره مورد بررسی، لزجت آشفتگی شروع به کاهش می‌کند.



(الف)



(ب)

پارامترهای آشفته‌گی در شرایط بدون نشت مقادیر بزرگتری را از خود نشان می‌دهند. بدین ترتیب می‌توان نشت را به عنوان یکی از عوامل استهلاک انرژی سیستم در نظر گرفت. تحلیل رفتار جریان و آشفته‌گی همراه با نشت نیز از نوآوری‌های مقاله حاضر محسوب می‌شود.

8- فهرست علائم

a	سرعت انتشار موج در لوله
A	سطح مقطع لوله
A_{of}	مساحت روزنه
C_d	ضریب دبی
D	قطر لوله
e	ضخامت جداره لوله
E_k	مدول الاستیسیته فنر
g	شتاب جاذبه
J	پذیرش خزشی
L	طول لوله
H	هد پیزومتریک
H_u, H_b, H_L	هد جریان در بالادست، پایین‌دست و در گره نشستی
k	انرژی جنبشی آشفته‌گی
Nr	تعداد مسیره‌های محاسباتی
P	فشار
Q	دبی
Q_u, Q_b, Q_L	دبی جریان در بالادست، پایین‌دست و در گره نشستی
r	مختصات شعاعی از خط مرکزی لوله
t	زمان
u	سرعت لحظه‌ای طولی
U	سرعت متوسط در جهت طولی
u', q'	نوسانات سرعت در جهت‌های محوری و شعاعی
علائم یونانی:	
ρ	چگالی سیال
τ	تنش برشی
$\alpha, \beta, \beta^*, \sigma, \sigma^*$	ضرایب مدل $k-\omega$
ω	نرخ استهلاک مخصوص
θ	زمان تأخیر
ε_1	کرنش نخستین المان Kelvin-Voigt

زیرنویس‌ها:

زیست محیطی بسیاری را بسته به نوع سیال می‌تواند تحمیل کند. در تحقیق حاضر برای بررسی اثر نشت بر رفتار جریان با حضور موج فشاری، جریان گذرا در لوله‌های پرفشار به صورت دوبعدی مدل‌سازی شد. برای حل معادلات حاکمه بر جریان گذرا از یک طرح کاملاً ضمنی برای معادله مومنتم و یک طرح صریح برای معادله پیوستگی استفاده شد. حل عددی پیشنهادی کارایی و زمان اجرای مشابه با روش مشخصه‌ها دارد ولی در زمان حل عددی هماهنگی بهتری با مدل آشفته‌گی کوپل شده با آن دارد. در ادامه برای مطالعه کارایی روش پیشنهادی و بررسی پارامترهای آشفته‌گی در حین بازه‌های زمانی مختلف ضربه قوچ، مدل آشفته‌گی به صورت $k-\omega$ به مدل دوبعدی افزوده شد. لازم به ذکر است برای در نظر گرفتن جنس لوله، اثر ویسکوالاستیسیته با استفاده از مدل دوبعدی Kelvin-Voigt به شیوه تکراری مدل‌سازی شده سپس دو سیستم خط لوله پلی اتیلن برای صحت سنجی نتایج انتخاب شد و بدین ترتیب رفتار آشفته‌گی با حضور اثر ویسکوالاستیسیته مورد بررسی قرار گرفت.

پس از مدل‌سازی جریان گذرای دوبعدی همراه با نشت که از جمله نوآوری‌ها می‌باشد، جریان در بالادست و پایین‌دست گره نشستی مد نظر قرار گرفته و با نتایج حاصل از جریان گذرای بدون نشت مقایسه شد.

نتایج عددی نشان می‌دهند که کلیه پارامترها، پروفیل سرعت و پارامترهای آشفته‌گی در بالادست و پایین‌دست گره نشستی رفتار متفاوتی از خود نشان می‌دهند. با توجه به اینکه دبی جریان در بالادست و پایین‌دست گره مورد بررسی با هم متفاوت می‌باشد، پارامترهای آشفته‌گی نیز مقادیر متفاوتی را از خود نشان می‌دهند. پس از آن، تا اندکی پس از جریان گذرا مقادیر پارامترهای مختلف در بالادست جریان به مرور کاهش و در پایین‌دست جریان افزایش اندکی خواهد داشت تا زمانی که این دو جریان با هم به تعادل برسند. پس از آن آشفته‌گی از کناره‌های جداره شروع به گسترش در لایه‌های میانی کرده و به مرور کاهش می‌یابد. در شرایطی که نشت در سیستم وجود ندارد، نوسانات دبی جریان بزرگ‌تر از نوسانات دبی در بالادست و پایین‌دست جریان است و به همین علت

Fan, S., Lakshminarayana, B. and Barnett, M. (1993). "Low-Reynolds-number k-epsilon model for unsteady turbulent boundary-layer flows". *AIAA Journal*. 31, pp. 1777–1784.
<https://doi.org/10.2514/3.11849>

Ghidaoui, M. S., Zhao, M., McInnis, D. A. and Axworthy, D. H. (2005). "A review of water hammer theory and practice". *Applied Mechanics Reviews* 58, pp. 49–76.

<https://doi.org/10.1115/1.1828050>

Guney, M. (1983). "Water hammer in viscoelastic pipes where cross-section parameters are time dependent". Presented at the 4th International Conference on Pressure Surges, BHRA Fluid Engineering, 1983, England.

Keramat, A., Kolahi, A. G. and Ahmadi, A. (2013). "Water hammer modelling of viscoelastic pipes with a time-dependent Poisson's ratio". *J. Fluids and Structures*. 43, pp. 164–178.

<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2013.08.013>

Keramat, A., Tijsseling, A. S., Hou, Q. and Ahmadi, A. (2012). "Fluid-structure interaction with pipe-wall viscoelasticity during water hammer". *J. Fluids and Structures*. 28, pp. 434–455.

<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2011.11.001>

Mahdizadeh, H. (2018). "Numerical modelling of one- and two-dimensional water hammer problems using a modified wave propagation algorithm and turbulence model". *J. Hydraulic Research*. 0, pp. 1–12.

<https://doi.org/10.1080/00221686.2018.1459897>

Mitra, A. K. and Rouleau, W. T. (1985). "Radial and axial variations in transient pressure waves transmitted through liquid transmission lines". *J. Fluids Engineering*. 107, pp. 105–111.
<https://doi.org/10.1115/1.3242423>

Pezzinga, G. (1999). "Quasi-2D model for unsteady flow in pipe networks". *J. Hydraulic Eng.* 125, pp. 676–685.

[https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1999\)125:7\(676\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1999)125:7(676))

Pezzinga, G., Brunone, B., Cannizzaro, D., Ferrante, M., Meniconi, S. and Berni, A. (2014). "Two-dimensional features of viscoelastic models of pipe transients". *J. Hydraulic Eng.* 140, 04014036. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HY.1943-7900.0000891](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000891)

Pezzinga, G., Brunone, B. and Meniconi, S. (2016). "Relevance of pipe period on kelvin-voigt viscoelastic parameters: 1D and 2D inverse transient analysis". *J. Hydraulic Eng.* 142,

i, j مکان شبکه در جهت طولی و شعاعی
n گام زمانی

9- منابع

Book, D. L., Boris, J. P. and Hain, K. (1975). "Flux-corrected transport II: Generalizations of the method". *J. Computational Physics* 18, pp. 248–283. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(75\)90002-9](https://doi.org/10.1016/0021-9991(75)90002-9)

Brunone, B. and Berni, A. (2010). "Wall shear stress in transient turbulent pipe flow by local velocity measurement". *J. Hydraulic Eng.* 136, pp. 716–726. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HY.1943-7900.0000234](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0000234)

Brunone, B., Karney, B. W., Mecarelli, M., and Ferrante, M. (2000). "Velocity profiles and unsteady pipe friction in transient flow". *J. Water Resources Planning and Management* 126, pp. 236–244. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2000\)126:4\(236\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(2000)126:4(236))

Covas, D. and Ramos, H. (2010). "Case studies of leak detection and location in water pipe systems by inverse transient analysis". *J. Water Resources Planning and Management*. 136, pp. 248–257. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9496\(2010\)136:2\(248\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9496(2010)136:2(248))

Covas, D., Stoianov, I., Mano, J. F., Ramos, H., Graham, N., Maksimovic, C., (2005). "The dynamic effect of pipe-wall viscoelasticity in hydraulic transients. Part II—model development, calibration and verification". *J. Hydraulic Research* 43, pp. 56–70. <https://doi.org/10.1080/00221680509500111>

Covas, D., Stoianov, I., Ramos, H., Graham, N. and Maksimovic, C. (2004a). "The dynamic effect of pipe-wall viscoelasticity in hydraulic transients. Part I—experimental analysis and creep characterization". *J. Hydraulic Research* 42, pp. 517–532.

<https://doi.org/10.1080/00221686.2004.9641221>

Covas, D., Stoianov, I., Ramos, H., Graham, N., Maksimović, Č., and Butler, D. (2004b). "Water hammer in pressurized polyethylene pipes: conceptual model and experimental analysis". *Urban Water Journal* 1, 177–197. <https://doi.org/10.1080/15730620412331289977>

Duan, H. -F., Ghidaoui, M., Lee, P. J. and Tung, Y. -K. (2010). "Unsteady friction and visco-elasticity in pipe fluid transients". *J. Hydraulic Research* 48, pp. 354–362. <https://doi.org/10.1080/00221681003726247>

- [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(1997\)123:2\(108\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(1997)123:2(108))
- Soares, A. K., Covas, D. I. and Reis, L. F. (2008). "Analysis of PVC pipe-wall viscoelasticity during water hammer". *J. Hydraulic Eng.* 134, pp. 1389–1394. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2008\)134:9\(1389\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2008)134:9(1389))
- Vardy, A. E., Hwang, K. -L. (1991). "A characteristics model of transient friction in pipes". *J. Hydraulic Research.* 29, pp. 669–684. <https://doi.org/10.1080/00221689109498983>
- Wahba, E. M. (2009). "Turbulence modeling for two-dimensional water hammer simulations in the low Reynolds number range". *Computers & Fluids.* 38, pp. 1763–1770. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2009.03.007>
- Wilcox, D. C. (1994). *Turbulence modeling for CFD*. La Canada, CA: DCW Industries.
- Workman, L. (1988). *Characteristics of PVC pipe*. Philips Industries, Inc.
- Zhao, M. and Ghidaoui, M. S. (2006). "Investigation of turbulence behavior in pipe transient using a $k-\epsilon$ model". *J. Hydraulic Research* 44, pp. 682–692. <https://doi.org/10.1080/00221686.2006.9521717>
- Zhao, M. and Ghidaoui, M. S. (2003). "Efficient quasi-two-dimensional model for water hammer problems". *J. Hydraulic Eng.* 129, pp. 1007–1013. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9429\(2003\)129:12\(1007\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2003)129:12(1007))
04016063. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)HY.1943-7900.0001216](https://doi.org/10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001216)
- Riasi, A., Nourbakhsh, A. and Raisee, M. (2013). "Energy dissipation in unsteady turbulent pipe flows caused by water hammer". *Computers & Fluids.* 73, pp. 124–133. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.12.015>
- Riasi, A., Nourbakhsh, A. and Raisee, M. (2009a). "Unsteady velocity profiles in laminar and turbulent water hammer flows". *J. Fluids Eng.* 131, 121202-121202–8. <https://doi.org/10.1115/1.4000557>
- Riasi, A., Nourbakhsh, P. A. and Raisee, M. (2009b). "Unsteady turbulent pipe flow due to water hammer using $k-\theta$ turbulence model". *J. Hydraulic Research.* 47, pp. 429–437. <https://doi.org/10.1080/00221686.2009.9522018>
- Saemi, S., Raisee, M., Cervantes, M. J. and Nourbakhsh, A. (2018). "Computation of two- and three-dimensional water hammer flows". *J. Hydraulic Research.* 0, pp. 1–19. <https://doi.org/10.1080/00221686.2018.1459892>
- Shamloo, H. and Mousavifard, M. (2015). "Numerical simulation of turbulent pipe flow for water hammer". *J. Fluids Eng.* 137, 111203-111203–10. <https://doi.org/10.1115/1.4030806>
- Silva-Araya, W. F. and Chaudhry, M. H. (1997). "Computation of energy dissipation in transient flow". *J. Hydraulic Eng.* 123, pp. 108–115.