

مدل سازی جریان سیال با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی

رامین امینی^{1*}، محمد اکبری ماکویی² و سید مجتبی موسوی نژاد³

1- دانشیار، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

2- دانشجوی دکتری، مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

3- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند

*web2_ramin.amini@shahroodut.ac.ir

(دریافت مقاله: 97/2/12؛ پذیرش مقاله: 97/3/29)

چکیده- در این مطالعه ابتدا به معرفی کامل روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی پرداخته می‌شود. در این راستا با استخراج انواع معادلات جریان سیال شامل حرکت آب در خاک، کانال جریان و شکست سد سعی شده است با استفاده از مبانی ریاضی روش بدون شبکه، معادلات جریان رابطه‌سازی شود. نتایج نشان می‌دهد روش باقی‌مانده وزنی به عنوان یک روش دقیق و به‌روز برای دست‌یابی به پاسخ‌های تقریبی معادله‌های دیفرانسیل در روش‌های بدون شبکه‌بندی مورد توجه قرار می‌گیرد. همچنین با استفاده از کدهای نوشته شده در نرم‌افزار متلب، مسأله‌ی جریان آب در خاک بصورت پایدار مورد تحلیل قرار می‌گیرد. از سوی دیگر در مسأله‌ی جریان در کانال، با استفاده از تابع شکل شعاعی که در محیط متلب پیاده شده است، مقدار سرعت در کانال شیب‌دار با جریان یکنواخت تقریب زده می‌شود. در نهایت، به همین ترتیب در مسأله‌ی شکست سد معادلات حاکم بر جریان که شامل معادلات بقای جرم و بقای مومنتم می‌باشند به شکل لاگرانژی و به کمک روش تصحیح فشار حل و با نتایج دیگر روش‌ها مقایسه شده‌اند. نتایج حاصل نشان‌دهنده‌ی دقت بالای روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی در مدل‌سازی و تحلیل مسائل هیدرولیکی و نیز عدم نیاز به هرگونه شبکه‌ی پیش‌زمینه و تطابق مناسب با شرایط مرزی است.

کلیدواژگان: روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین، مدل‌سازی جریان سیال، تابع پایه شعاعی، حرکت آب در خاک، جریان در کانال، شکست سد.

1- مقدمه

زمینه، نشان از توانمندی روش فوق دارد. روش بدون شبکه به روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH) در مدل کردن پدیده‌های نجومی (Gingold and Monaghan, 1977) مورد استفاده قرار گرفت. تحقیق در روش بدون شبکه در سال 1992 بعد از انتشار روش اجزا پراکنده (Nayroles et al., 1992) توسعه یافت. چندین روش بعد از آن با نام‌های، روش مستقل از جز گلرکین (EFG) (Belytschko, et al., 1994)، روش باز تولید ذرات (RKPM) (Liu et al., 1995)، روش جداگر اجزا محدود

با توجه به نیاز روزافزون جهان به سدها و کانال‌ها، مدل‌سازی جریان آن‌ها با ویژگی‌های خاصی که دارند از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشد. روش بدون شبکه یکی از روش‌های عددی جدید است، که برای تحلیل مسائل هیدرولیکی پیشنهاد شده است. پژوهش‌گران متعددی با بهره‌جویی از این روش، به تحلیل مسائل مختلف هیدرولیکی پرداخته‌اند، که در ادامه به برخی اشاره می‌شود. شمار روزافزون پژوهش‌ها در این

ذونعمت کرمانی، 1393). مدل‌سازی جریان آبخوان دشت نیشابور به دو روش بدون شبکه‌ی المان تحلیلی و هم‌آبی نقطه‌ای انجام شد. (محمدی و قائینی حصاروئیه، 1395). صباحی و همکاران شبیه‌سازی عبور جریان از زیر یک دریچه‌هایپوالاستیک به کمک روش هیدرودینامیک ذرات هموار (صباحی و همکاران 1393) را مطالعه کردند. وزن‌دهی تطبیقی دوبعدی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته (کریمی و همکاران، 1392) و نیز مدل‌سازی عددی جریان به روش ISPH در مسائل شکست سد، جریان و عملکرد هم‌زمان دریچه و سرریز (قدم پور و همکاران، 1392) از جمله فعالیت‌هایی هستند که در زمینه‌ی هیدرولیک از روش‌های بدون شبکه کمک گرفته شده است.

در این تحقیق ابتدا به معرفی روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین پرداخته می‌شود. روش باقی مانده وزنی به عنوان یک روش کارآمد برای دست‌یابی به پاسخ‌های تقریبی معادله‌های دیفرانسیل معمولی و جزئی در روش‌های بدون شبکه‌بندی مورد اعتماد قرار می‌گیرد. سپس معادلات جریان سیال در خاک استخراج و با استفاده از روش بدون شبکه تحلیل می‌گردد. در ادامه با تعیین معادلات جریان سیال در کانال و رابطه‌سازی آن، این دست معادلات حل می‌گردد. در آخر نیز با گسسته‌سازی معادلات شکست سد که شامل معادلات بقای جرم و بقای مومنتم می‌باشند، به مدل‌سازی مسأله پرداخته شده است.

از دیگر نوآوری‌های این تحقیق می‌توان به استفاده از تابع پایه شعاعی از نوع چند ضلعی و گوسی برای تقریب تابع میدان و حل سه نوع متفاوت از انواع جریان شامل حرکت آب در خاک، جریان سیال داخل کانال و مدل‌سازی شکست سد به روش بدون شبکه اشاره نمود. از سوی دیگر روش محلی انتگرال‌گیری که برای محاسبه تابع‌های اولیه، از نوآوری‌های این مجموعه می‌باشد.

2- روش کار

به طور کلی، معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر رفتار انواع جریان در داخل دامنه (Ω) و بر روی مرزهای آن (Γ)، به

(Melenk and Babuska, 1997) (PUFEM)، روش جزهای طبیعی (Cueto et al., 2003) (NEM)، روش بدون شبکه گلرکین با استفاده از تابع شعاعی (RBF) (Wendland, 1999)، معرفی شدند. عمده تفاوت این روش‌ها نحوه تولید و استفاده مؤثر از تابع شکل مورد استفاده در روش حل بود. هر چه ظاهراً این روش‌ها برای تولید تابع شکل و تابع وزن نیاز به شبکه بندی ندارند ولی برای انتگرال‌گیری نیاز به یک شبکه بندی در سایه دارند. پس این روش‌ها روش بدون شبکه حقیقی نیستند.

اخیراً، روش بدون شبکه معادلات انتگرالی مرزی (LBIE) و روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین (Atluri et al., 1999) (MLPG) که روش‌های کاملاً بدون شبکه محسوب می‌شوند، برای حل مسائل خطی و غیرخطی توسط آتلوری معرفی شدند که نشان از کارایی بالای آن دارد. موسوی نژاد و همکاران رابطه‌سازی و کاربرد این روش را در مدل‌سازی دو بعدی رفتار دینامیکی سازه‌های استوانه‌ای با تقارن محوری و طول محدود، نشان دادند (Moussavinezhad, et al. 2013a) و (Moussavinezhad, et al., 2013b).

مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد دشت بیرجند در حالت ماندگار به روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین (محتشمی و همکاران، 1396) صورت گرفت. جریان سیال تراکم ناپذیر لزج (ثابت‌قدم و شجری قاسم خیلی، 1396) و نیز شبیه‌سازی عددی جریان سیال غیر نیوتنی در کانال دارای حفره (شاه مردان و همکاران 1393) از کارهای انجام گرفته در مدل‌سازی هیدرولیکی جریان می‌باشد.

از دیگر روش‌های معمول مطالعه جریان می‌توان به روش ایزوژئومتریک اشاره نمود که امینی و همکاران از آن در مسائل مختلفی مانند مدل‌سازی جریان از دیدگاه لانگراژی (امینی و همکاران 1393)، وضعیت جریان در کانال (امینی و همکاران 1394) و نیز شکست سد (Amini, et al., 2016) در سال‌های گذشته استفاده کرده‌اند.

روش عددی بدون شبکه المان طبیعی در حل معادلات حاکم بر سیال با سطح آزاد استفاده شد (غیائی طرزی و

$$\int_{\Omega} \widehat{W}_i (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_i (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \quad (6)$$

رابطه (6) یک دستگاه n معادله‌ای با n مجهول (ضرایب ثابت در بردار α) را نشان می‌دهد. در این معادله‌ها باید ابتدا تابع شکل تعیین و سپس انتگرال‌گیری انجام شود. انتخاب تابع شکل مناسب بر پایه توزیع گره‌های اختیاری در داخل دامنه‌ی سازه یکی از مهم‌ترین مسائلی است که در پیش روی روش بدون شبکه است.

به همین سبب بدون داشتن یک تابع شکل مناسب، روش

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \widehat{W}_1 (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_1 (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} \widehat{W}_2 (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_2 (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \widehat{W}_n (D(P^T \alpha) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_n (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \end{cases} \quad (7)$$

بدون شبکه دارای کارآمدی لازم نخواهد بود. تابع میدان در روش بدون شبکه با بهره جویی از مقدار تابع میدان در گره‌های واقع شده در دامنه‌ی تحت پوشش¹ تعریف می‌گردد. با استفاده از رابطه (8) می‌توان تابع میدان را بدین صورت تقریب زد.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) u_i = \Phi^T(x) \times U_s \quad (8)$$

در این رابطه k تعداد گره‌هایی است که در دامنه تحت پوشش واقع شده‌اند، u_i و $\varphi_i(x)$ به ترتیب تابع میدان و تابع شکل در i آمین نقطه در داخل دامنه تحت پوشش و U_s $\Phi^T(x)$ به ترتیب بردار تغییر مکان و بردار تابع شکل می‌باشند. در شکل 1 نمونه‌ای از دامنه‌های تحت پوشش مورد استفاده در روش بدون شبکه برای ساخت تابع‌های شکل نشان داده شده است.

همان‌طور که در شکل 1 دیده می‌شود، دامنه‌ی تحت پوشش می‌تواند به صورت دایره، بیضی و مستطیل انتخاب شود. اندازه دامنه‌ی تحت پوشش (d_s) برای نقطه x به صورت رابطه (9) تعریف می‌گردد.

$$d_s = \alpha_s \times d_c \quad (9)$$

صورت رابطه‌ی (1) بیان می‌گردد:

$$D(u) - f = 0 \quad (1-الف)$$

$$B(u) - g = 0 \quad (1-ب)$$

در این رابطه‌ها u تابع میدان (پاسخ)، D و B عملگر دیفرانسیلی و f و g تابع نیرویی نامیده می‌شود. دستیابی به مقدار دقیق تابع میدان (u) مشکل است. از رابطه (2) می‌توان برای تقریب‌زدن تابع میدان استفاده کرد:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \alpha_i = P^T \alpha \quad (2)$$

در این رابطه، $u^h(x)$ تابع میدان تقریبی، P بردار عضوهای چندجمله‌ای و α بردار ضرایب چندجمله‌ای می‌باشد. به طور معمول برای برقراری رابطه (2) تعداد عضوهای چندجمله‌ای (n) به کار رفته دارای شمار محدودی است، از این رو، تابع میدان به صورت تقریبی به دست می‌آید. بنابراین حل معادله‌ی حاکم بر مسأله دارای باقی‌مانده‌ی R_{Ω} در داخل دامنه و R_{Γ} بر روی مرزها خواهد بود. مقدار باقی مانده‌ی حاصل از قرار دادن تابع u^h در رابطه (1) به صورت رابطه‌های (3-الف) و (3-ب) بیان می‌شود.

$$R_{\Omega} = D(u^h) - f \neq 0 \quad (3-الف)$$

$$R_{\Gamma} = B(u^h) - g \neq 0 \quad (3-ب)$$

در روش باقی‌مانده وزنی با توجه به نحوه‌ی انتخاب تابع تقریبی، مقدار باقی‌مانده‌ی R_{Ω} و R_{Γ} در مسأله تغییر می‌کند. از این رو، باید مقدار باقی‌مانده حاصل از تقریب تابع میدان را به حداقل ممکن رسانید. این کار با برابر صفر شدن مجموع مقدار انتگرال باقی‌مانده‌های وزن‌دار در دامنه و بر روی مرزهای مسأله امکان پذیر خواهد بود (رابطه (4)).

$$\int_{\Omega} \widehat{W}_i R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_i R_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

در این رابطه \widehat{W}_i و \widehat{V}_i به ترتیب به عنوان تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی R_{Ω} و R_{Γ} محسوب می‌گردد. با استفاده از رابطه‌های (2) و (3-الف و ب) و همچنین قرار دادن آن‌ها در رابطه (4)، رابطه‌های زیر حاصل می‌گردد.

$$\int_{\Omega} \widehat{W}_i (D(u^h) - f) d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_i (B(u^h) - g) d\Gamma = 0 \quad (5)$$

¹ Support domain

(Liu and Gu, 2001)² و تابع‌های شعاعی² (Gu, 2001) برای تقریب تابع میدان استفاده می‌کند. در ادامه‌ی این روش از تابع‌های چند جمله‌ای به عنوان تابع‌های پایه‌ای استفاده می‌شود. با جای‌گذاری تابع چند جمله‌ای در رابطه (10)، رابطه حاکم بر این روش بدین صورت حاصل خواهد گردید (رابطه (11)).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n P_i(x) a_i(x_Q) \quad (11)$$

در این حالت تعداد ضرایب مجهول a_i با تعداد گره‌های داخل دامنه برابر می‌باشد. با قرار دادن مقادیر گره‌ی در معادلات، می‌توان ضرایب مجهول را با استفاده از رابطه‌های (12) تا (15) به دست آورد.

$$U_s = P_Q \times a \quad (12)$$

$$U_s = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \quad (13)$$

$$P_Q = [p^T(x_1) \ p^T(x_2) \ \dots \ p^T(x_n)] \quad (14)$$

$$a = P_Q^{-1} \times U_s \quad (15)$$

با قرار دادن رابطه (15) در رابطه (11)، تابع شکل به صورت رابطه (16) به دست می‌آید.

$$\Phi = P^T(x) P_Q^{-1} \quad (16)$$

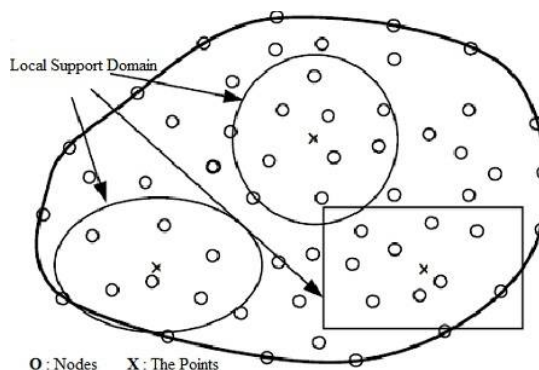
از امتیازهای استفاده از تابع شکل بر پایه چند جمله‌ای‌ها، می‌توان به سادگی و دقت مناسب روش اشاره نمود. از سوی دیگر با افزایش تعداد گره‌ها، می‌توان هر مرتبه‌ای از تابع شکل مورد نیاز را ایجاد کرد؛ اما علی‌رغم مزیت‌های فوق، در برخی حالت‌ها ماتریس P_Q در رابطه (16) ویژه می‌گردد. برای رفع این مشکل، روش درون‌یابی نقاط بر پایه تابع‌های شعاعی بهره‌جسته می‌شود ((رابطه (17)).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i(x_Q) = R^T a(x_Q) \quad (17)$$

$$R^T(x) = [R_1(x) \ R_2(x) \ \dots \ R_n(x)] \quad (18)$$

در رابطه (18) $R_i(x)$ تابع پایه شعاعی است. در جدول 1 چهار نوع از تابع پایه شعاعی پر کاربرد ارائه گردیده است (Liu and Hardy, 1990) و (Onate et al., 1996) و (Liu and Gu, 2005).

برای تقریب تابع $u(x)$ با توجه به رابطه (17)، نیاز به محاسبه مقدار ضرایب مجهول $u(x_Q)$ می‌باشد. با استفاده از رابطه‌های (19) تا (21) می‌توان ضرایب مجهول را محاسبه نمود.



شکل 1 دامنه‌های تحت پوشش در روش بدون شبکه

در رابطه (9)، α_s ضریب بدون بعد برای کنترل اندازه دامنه‌ی تحت پوشش و d_s فاصله بین گره‌ها می‌باشد. در صورتی که گره‌ها در دامنه‌ی مسئله به صورت نامنظم توزیع گردند، این مقدار به صورت میانگین فاصله بین گره‌ها در نظر گرفته می‌شود.

روش درون‌یابی نقاط یکی از فن‌های تقریب تابع میدان در روش بدون شبکه محسوب می‌گردد. این روش توسط لیو و ژئو (Liu and Gu, 2001) برای ساخت تابع‌های شکل با بهره‌جویی از توزیع اختیاری گره‌ها در داخل دامنه‌ی مسئله پیشنهاد شد. یکی از روش‌های ساده و پر کاربرد در ایجاد تابع شکل، بهره‌جویی از چند جمله‌ای خیام-پاسکال به عنوان تابع‌های چندجمله‌ای می‌باشد. در این روش، تقریب تابع شکل با بهره‌جویی از مقدار تابع در گره‌های داخل دامنه‌ی تحت پوشش صورت می‌پذیرد. در روش درون‌یابی نقاط، تابع $u(x)$ را با استفاده از مقدارهای گره‌ی در دامنه و نقطه‌ی مورد نظر x_Q درون‌یابی می‌کنند ((رابطه (10)).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n B_i(x) a_i(x_Q) \quad (10)$$

در این رابطه $B_i(x)$ تابع پایه‌ای تعریف شده در مسئله پیرامون فضای دکارتی $X^T = [x, y, z]$ ، n تعداد گره‌های قرار گرفته در دامنه‌ی تحت پوشش x_Q و $a_i(x_Q)$ ضریب تابع پایه‌ای $B_i(x)$ است. در روش درون‌یابی نقاط بر اساس نحوه‌ی انتخاب تابع پایه‌ای دو روش ابداع گردیده است. روش درون‌یابی نقاط از تابع‌های چند جمله‌ای¹ (Liu and

² Radial point interpolation method

¹ Polynomial point interpolation methods

جدول 1 تابع‌های پایه شعاعی

نام تابع	رابطه	متغیرهای مؤثر در تابع شکل
چند ضلعی ¹	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	$\alpha_c \geq 0, q$
گوسی ²	$R_i(x, y) = \exp(-\alpha_c \frac{r_i}{d_c})^q$	α_c
نواری ³	η	η
لگاریتمی ⁴	η	η

می‌آید:

$$\int_{\Gamma} W \left(k_x n_x \frac{\partial h}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial x} + k_y \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial h}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \quad (25)$$

دامنه کلی (Ω) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال‌گیری قسمت می‌شود. Ω_Q دامنه انتگرال‌گیری برای گره 1 است. با استفاده از قضیه دایورژانس معادله (26) بدین صورت درخواهد آمد:

$$\int_{\Gamma_i} W \left(k_x n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) h d\Gamma + \int_{\Gamma_u} W \left(k_x n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) h d\Gamma - \int_{\Omega} \left(k_x \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + k_y \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) h d\Omega = - \int_{\Gamma} W \left(k_x n_x \frac{\partial h}{\partial x} + k_y n_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) d\Gamma \quad (26)$$

اینجا φ تابع شکل است که در بخش قبل بیان گردید، همچنین به‌طور کلی مرزهای انتگرال‌گیری کلی (Γ_Q) به سه بخش ($\Gamma_Q = \Gamma_{Q_i} \cup \Gamma_{Q_u} \cup \Gamma_{Q_t}$) تقسیم می‌گردند که در اینجا Γ_{Q_i} مرزهای داخلی در دامنه‌ی انتگرال‌گیری که فصل مشترکی با مرزهای کلی مسأله ندارند، Γ_{Q_u} قسمتی از مرزهای طبیعی مسأله که با مرزهای کلی مسأله دارای فصل مشترک هستند و در نهایت Γ_{Q_t} قسمتی از مرزهای ضروری مسأله که با مرزهای کلی مسأله دارای فصل مشترک هستند.

3-2- رابطه‌سازی معادله‌ی جریان سیال در کانال

معادله مومنتم حاکم بر جریان آب در کانال شیب‌دار در راستای جریان در اثر جریان یکنواخت و پایدار به صورت رابطه (27) بیان می‌گردد.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{g \sin \alpha}{v} \quad (27)$$

که در آن u مؤلفه سرعت در راستای و g شتاب جاذبه، α شیب کانال، v لزجت سینماتیکی می‌باشد. طرفین معادله را در تابع وزن ضرب کرده و پس از انتگرال‌گیری رابطه (28) بدست می‌آید.

$$\int W \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{g \sin \alpha}{v} \right) d\Omega = 0 \quad (28)$$

اینجا W تابع وزن است. در ادامه با انتگرال‌گیری جز به جز رابطه (29) بدست می‌آید.

$$\int W n_x \frac{\partial u}{\partial x} d\Gamma + \int W n_y \frac{\partial u}{\partial y} d\Gamma \quad (29)$$

$$R_Q = \begin{Bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$r_k = [(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2]^{0.5} \quad (20)$$

$$k = 1, 2, \dots, n \quad (21)$$

$$a = R_Q^{-1} U_s \quad (21)$$

با قرار دادن رابطه (21) در رابطه (16)، تابع شکل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\Phi = R^T(x) R_Q^{-1} \quad (22)$$

3- رابطه سازی معادلات جریان سیال

3-1- رابطه سازی معادله‌ی جریان آب در خاک

معادله حاکم بر جریان آب در خاک با معادله لاپلاس بیان می‌شود. معادله لاپلاس برای خاک‌های غیر هم‌سانگرد در حالت جریان پایدار به صورت زیر رابطه (23) می‌گردد:

$$K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (23)$$

در اینجا K_x و K_y به ترتیب ضریب نفوذ پذیری در جهت افقی و عمودی می‌باشد و h هد آب است.

برای حل معادله لاپلاس از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین (MLPG) بهره جسته می‌شود. شکل ضعیف معادله لاپلاس در گره I با روش باقیمانده وزنی به صورت زیر بیان می‌شود.

$$\int_{\Omega} W \left(K_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + K_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) d\Omega = 0 \quad (24)$$

اینجا W تابع وزن است. دامنه کلی (Ω) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال‌گیری تقسیم می‌شود. با استفاده از قضیه دایورژانس معادله (9) بدین صورت در

¹ Muitiquadric

² Gaussian

³ Thin plate spline

⁴ Logarithmic

$t+1$ و همچنین ρ^* چگالی در مرحله حدس می باشد. به همین ترتیب برای ترم مشتق مادی سرعت در قسمت گسسته سازی رابطه (36) حاصل می گردد:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{u^{n+1} - u^* + u^* - u^n}{\Delta t} \quad (36)$$

$$= \frac{\Delta \dot{u} + \Delta u^*}{\Delta t}$$

که در اینجا u^n و u^{n+1} به ترتیب سرعت در زمان های t و $t+1$ و همچنین u^* سرعت در مرحله حدس می باشد. به همین ترتیب برای ترم مشتق مادی سرعت در قسمت گسسته سازی روابط (37) و (38) بدست می آید:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \dot{\rho} + \Delta \rho^*}{\Delta t} = -\nabla \cdot (u^{n+1} - u^* + u^*) \quad (37)$$

$$\frac{\rho}{\Delta \dot{u} + \Delta u^*} \frac{\Delta \dot{u}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} - g \quad (38)$$

با استفاده از روش نیمه ضمنی حدس و تصحیح روابط (37) و (38) و بسط آن ها، روابط (39) و (40) و روابط (41) و (42) تبدیل می گردد.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \dot{\rho}}{\Delta t} = -\nabla u^* \quad (39)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho^*}{\Delta t} = -\nabla \dot{u} \quad (40)$$

$$\frac{\Delta \dot{u}}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} \quad (41)$$

$$\frac{\Delta u^*}{\Delta t} = -g \quad (42)$$

بر اساس رابطه ی (42) و همچنین تعریف روابط (36) و (37) بدست می آید:

$$\Delta u^* = -g \cdot \Delta t \quad (43)$$

$$u^* = u^t + \Delta u^* \quad (44)$$

$$r^* = r^t + u^* \Delta t \quad (45)$$

که در اینجا u^t و r^t به ترتیب سرعت و موقعیت ذره در زمان t ، u^* سرعت موقت ذره و Δu^* تغییر سرعت در مرحله حدس می باشد.

از سوی دیگر، از مهم ترین دشواری های پیش روی مدل سازی چنین مسائلی، لحاظ کردن شرایط بستر خشک در حل مسأله می باشد. در این تحقیق به منظور تطبیق گره ها بر هندسه جریان در هر گام جدید زمانی و پیاده سازی مرز متحرک (زبان موج انتشار یافته بر بستر خشک) از روش ایجاد لایه ی مرزی نازک از جنس سیال بهره گرفته می شود. جهت تعیین مرز به عنوان بستر خشک یا تر از تراز عمق آستانه کمک گرفته می شود.

دامنه کلی (Ω) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال گیری قسمت می شود. دامنه انتگرال گیری برای گره 1 است. با استفاده از قضیه دایورژانس معادله (29) بدین صورت در می آید (رابطه (30)).

$$\int_{\Gamma_i} W \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) u d\Gamma + \int_{\Gamma_u} W \left(n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) u d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) u d\Omega = - \int W \left(n_x \frac{\partial u}{\partial x} + n_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) d\Gamma - \int W \frac{g \sin \alpha}{v} d\Omega \quad (30)$$

تقسیم مرز کلی (Γ_Q) مسئله در قسمت قبل بیان گردید.

3-3- رابطه سازی معادلات شکست سد

معادلات بقای جرم و مومنتم در مسأله شکست سد به صورت روابط (31) و (32) بیان می گردد. (Shobeyri and Afshar, 2010)

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \bar{u} = 0 \quad (31)$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \bar{g} = 0 \quad (32)$$

که در آن \bar{u} بردار سرعت، P فشار، \bar{g} بردار شتاب جاذبه، ρ چگالی و $\frac{D}{Dt}$ عملگر مشتق مادی می باشد. برای فشار دو نوع شرایط مرزی متمایز در مسائل سطح آزاد وجود دارد. اولین شرط فشار اتمسفر روی سطح آزاد شرط دریکله و دومین شرط روی سطح دیوار شرط نیومن می باشد. این دو شرط به صورت زیر نوشته می شود:

$$P = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (34)$$

بر اساس رویکرد زینکویچ و کادینا (Zienkiewicz and Codina, 1995) گسسته سازی زمانی برای ترم مشتق مادی چگالی به صورت رابطه (35) انجام می پذیرد.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = \frac{\rho^{n+1} - \rho^* + \rho^* - \rho^n}{\Delta t} = \frac{\Delta \dot{\rho} + \Delta \rho^*}{\Delta t} \quad (35)$$

که در اینجا ρ^n و ρ^{n+1} به ترتیب چگالی در زمان های t و

با تقسیم دامنه کلی (Ω) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال گیری رابطه (53) بدست می آید.

$$\int_{\Omega_Q} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_i} \left(W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \left(W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \left(W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \left(W \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega \quad (53)$$

با تعریف تابع شکل بر اساس تابع پایه شعاعی رابطه (54) حاصل می گردد.

$$P^{t+1} = \sum_{i=1}^{\infty} N_i P^{t+1} \quad (54)$$

با جایگذاری تابع شکل در رابطه ی (53)، رابطه (55) بدست می آید.

$$\left[\int_{\Omega_Q} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_i} \left(W n_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + W n_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \left(W n_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + W n_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Gamma \right] P^{n+1} = - \int_{\Gamma_t} \left(W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \left(W \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega \quad (55)$$

4- نتایج و مشاهدات

در رابطه مسأله نشت آب در زیر بدنه برای خاک همسان در دو جهت x, y در زیر تیغه آب بند- شکل 2 در حالت دائمی مورد بررسی قرار گرفت.

نتایج حاصل از روش بدون شبکه محلی پترو- گلرکین برای اختلاف هد 1 متر با گره های منظم برای حالت جریان در جدول 2 آمده است.

شکل 3 نشان دهنده ی خطوط هم پتانسیل به روش بدون شبکه از زیر بدنه می باشد.

(Wang et al., 2000) در ادامه به منظور تطبیق هندسه جریان با نقاط محاسباتی و ایجاد ارتباط بین آنها در هر گام جدید زمانی از روش باز توزیع نقاط گوسی متحرک، بهره جسته می شود.

بر اساس رابطه ی (41) و در مرحله دوم که مرحله تصحیح نامیده میشود، عبارت فشار برای محاسبه تغییرات اصلاحی در سرعت ذره بکار برده می شود:

$$\Delta \dot{u} = \frac{1}{\rho} \nabla P^{n+1} \Delta t \quad (46)$$

$$u^{n+1} = u^* + \Delta \dot{u} \quad (47)$$

که در اینجا $\Delta \dot{u}$ تغییر سرعت ذره در طی مرحله تصحیح، P^{n+1} فشار در زمان $t+1$ می باشد. در ادامه با استفاده از روابط (39) و (40) و به منظور محاسبه ی $\Delta \dot{u}$ از رابطه (48) استفاده می شود:

$$\nabla^2 P^{n+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot u^* \quad (48)$$

در نهایت برای محاسبه سرعت جدید ذرات می توان از روابط (46) و (47) استفاده کرد. موقعیت جدید ذرات به صورت زیر محاسبه می شود:

$$r^{t+1} = r^t + \frac{u^{t+1} + u^t}{2} \Delta t \quad (49)$$

که r^t موقعیت ذره در زمان t و r^{t+1} در زمان $t+1$ می باشند.

در ادامه برای پایداری حل گام زمانی در هر مرحله باید کنترل شود. بدین منظور از تعریف شرایط کورانت استفاده می شود (Shao and Lo 2003):

$$\Delta t \leq 0.1 \frac{l_0}{u_{max}} \quad (50)$$

در اینجا l_0 فاصله ی اولین ذره و u_{max} حداکثر سرعت ذره در محاسبات است.

در نهایت برای استفاده از روش بدون شبکه محلی طرفین معادله (48) را در تابع وزن ضرب کرده و پس از انتگرال گیری رابطه (51) بدست می آید.

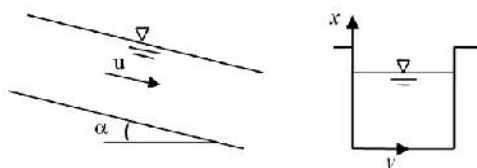
$$\int W \left(\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial y^2} - \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega = 0 \quad (51)$$

سپس با انتگرال گیری جز به جز رابطه (52) حاصل می گردد.

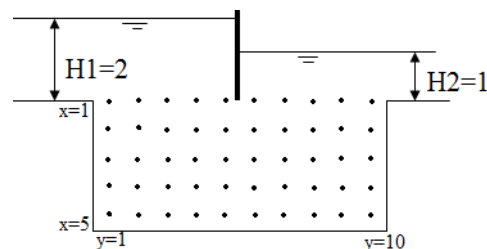
$$\int_{\Omega_Q} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} + W \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega - \int_{\Gamma_Q} \left(W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma = 0 \quad (52)$$

جدول 2 مقدار هد آب در گره‌ها در روش MLPG

2	2	2	2	2	1	1	1	1	1
1/923	1/911	1/882	1/821	1/683	1/317	1/179	1/118	1/089	1/077
1/858	1/838	1/796	1/719	1/593	1/407	1/281	1/204	1/162	1/142
1/812	1/790	1/743	1/668	1/563	1/437	1/332	1/257	1/210	1/188
1/789	1/766	1/718	1/646	1/552	1/448	1/354	1/282	1/234	1/211



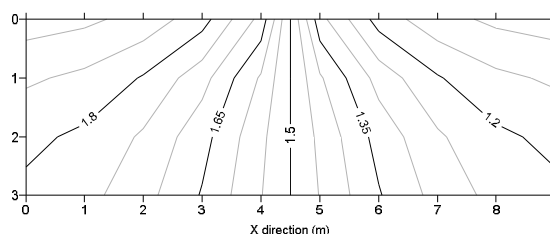
شکل 4 جریان سیال داخل کانال



شکل 2 شماتیک مسأله نشت آب از زیر تیغه آب بند

جدول 3 مقایسه‌ی سرعت‌های به دست آمده از روش MLPG و خطای آن

	X	Y	دقیق	بدون شبکه	% خطا	% خطا	% خطا
	(m)	(m)	(m/sec)	(m/sec)	بدون شبکه	ایزوژئومتریک	اجزاء محدود
8/350	0/2	0/2	0/0662	0/0651	1/629	1/629	8/350
14/410	0/4	0/4	0/0936	0/0939	0/319	0/350	14/410
22/020	0/5	0/2	0/0969	0/0966	0/267	0/300	22/020
13/560	0/2	0/4	0/0991	0/0989	0/162	0/180	13/560
20/940	0/4	0/4	0/1445	0/1445	0/009	0/010	20/940
27/310	0/5	0/4	0/1500	0/1498	0/120	0/130	27/310
17/150	0/2	0/6	0/1157	0/1156	0/098	0/110	17/150
24/790	0/4	0/6	0/1711	0/1711	0/029	0/030	24/790
30/560	0/5	0/6	0/1779	0/1779	0/027	0/030	30/560
19/860	0/2	0/8	0/1235	0/1236	0/092	0/100	19/860
27/160	0/4	0/8	0/1836	0/1836	0/017	0/020	27/160
32/270	0/5	0/8	0/1911	0/1911	0/009	0/010	32/270
20/590	0/2	1/0	0/1258	0/1258	0/027	0/030	20/590
31/620	0/4	1/0	0/1873	0/1873	0/019	0/020	31/620
34/070	0/5	1/0	0/1950	0/1950	0/021	0/020	34/070



شکل 3 خطوط هم پتانسیل به روش بدون شبکه از زیر آب بند

همان‌طور که در شکل واضح است، با حرکت سیال از بالادست به پایین دست از هد سیال به مرور کاسته شده تا در پایین دست که به میزان 1 متر می‌رسد.

سیس مسأله جریان آب داخل کانال شیب‌دار در شکل 4 برای حالت پایدار مورد بررسی قرار می‌گیرد.

به منظور صحت سنجی از نتایج روش بدون شبکه برای شیب 1 درجه و لزجت $0/1 \text{ (m}^2\text{s}^{-1}\text{)}$ در مسأله با ابعاد یک متر در یک متر با گره‌های منظم در مقایسه با روش دقیق، اجزای محدود و ایزوژئومتریک (امینی و همکاران، 1394)، در جدول 3 آمده است.

در جدول 3 می‌توان کارایی روش بدون شبکه پتروف-گلرکین در برابر روش اجزای محدود و ایزوژئومتریک را به وضوح مشاهده کرد. در روش بدون شبکه پتروف-گلرکین تابع شکل چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برابر $0/19$ می‌باشد که خطای بسیار کمی می‌باشد.

در حالی که در روش ایزوژئومتریک درصد متوسط خطای مطلق برابر $0/21$ و در روش اجزای محدود با همان تعداد معادلات درصد متوسط خطای مطلق برابر $22/98$ شده که خطای بسیار زیاد می‌باشد. برای رسیدن به خطای مناسب باید تعداد نقاط گرهی را بیشتر کرد که باعث افزایش تعداد معادلات و در نتیجه افزایش زمان حل و همچنین افزایش حافظه‌ی مورد نیاز برای ذخیره‌ی اطلاعات می‌شود.

جدول 4 تأثیر تعداد گره‌ها در روش MLPG و خطای آن

X (m)	Y (m)	بدون شبکه		بدون شبکه	
		9 گرهی (m/sec)	16 گرهی (m/sec)	%خطا	%خطا
0/2	0/2	0/0483	0/0623	5/943	1/629
0/4	0/2	0/0768	0/0901	3/778	0/319
0/5	0/2	0/0838	0/0944	2/561	0/267
0/2	0/4	0/0895	0/0968	2/321	0/162
0/4	0/4	0/1354	0/1427	1/262	0/009
0/5	0/4	0/1438	0/1484	1/078	0/120
0/2	0/6	0/1117	0/1149	0/693	0/098
0/4	0/6	0/1661	0/1701	0/588	0/029
0/5	0/6	0/1727	0/1771	0/441	0/027
0/2	0/8	0/1204	0/1230	0/371	0/092
0/4	0/8	0/1795	0/1828	0/446	0/017
0/5	0/8	0/1873	0/1903	0/397	0/009
0/2	1/0	0/1240	0/1255	0/263	0/027
0/4	1/0	0/1856	0/1869	0/221	0/019
0/5	1/0	0/1931	0/1946	0/192	0/021

و در نهایت، مسأله جریان آب در مسأله شکست سد مورد بررسی قرار می‌گیرد. هندسه مسأله شکست سد در شکل 6 نشان داده شده است (Nithiarasu, 2005).

ارتفاع اولیه ستون آب را 0/2 متر و عرض آن را 0/1 متر در نظر گرفته می‌شود. در این بخش به بررسی نتایج مدل‌سازی جریان آب در مسأله شکست سد با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی پرداخته می‌شود و سپس مقایسه آن با نتایج روش ایزوژئومتریکی (Amini et al., 2016) و بدون شبکه حداقل مربعات (Shobeyri & Afshar, 2010) صورت می‌پذیرد. بدین منظور سطح آزاد آب به دست آمده از نتایج روش بدون شبکه با تابع پایه تابع شعاعی چند جمله‌ای در زمان‌های 0/1 و 0/15 ثانیه در مسأله با ابعاد شکل 6 با گره‌های منظم در مقایسه با روش حداقل مربعات و ایزوژئومتریکی، در شکل‌های 7 و 8 آمده است.

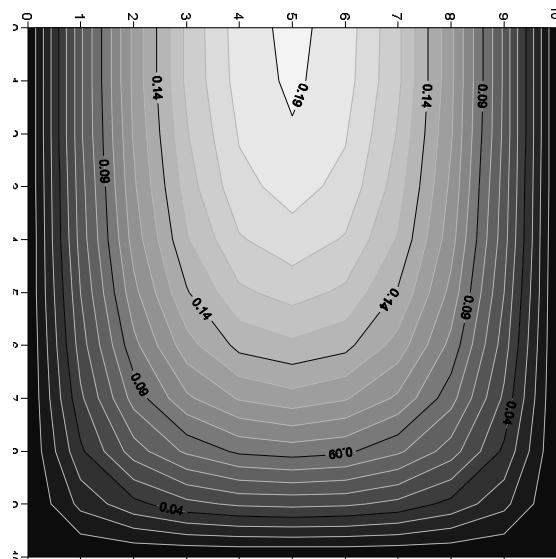
از مقایسه‌ی پروفیل سطح آزاد بین دو روش ایزوژئومتریکی و حداقل مربعات بدون شبکه به راحتی می‌توان متوجه شد روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی به علت دقت بالا در ایجاد ارتباط با گره‌ها، سطح آزاد را با دقت بسیار بالاتری نمایش می‌دهد.

شکل 5 نشان‌دهنده کانتورهای سرعت جریان در روش بدون شبکه در کانال جریان می‌باشد.

همان‌طور که قابل پیش‌بینی بود به علت شرایط مرزی سرعت در کف کانال و کنار جدارها به صفر می‌رسد و بیشترین سرعت در سطح کانال در قسمت میانی رخ می‌دهد.

به منظور بررسی عدم وابستگی نتایج به تعداد نقاط محاسباتی در شبکه‌ی فرضی گره‌ها و تأثیر تعداد گره‌ها بر دقت این روش عددی، نتایج حاصله از حل مسأله با 9، 16 و 36 گره با روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه شعاعی چندضلعی مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصله در جدول 4 نشان داده شده است.

در جدول 4 می‌توان مطالعه‌ی شبکه‌ی فرضی گره‌ها و روند افزایش دقت مسأله را در روش بدون شبکه مشاهده کرد. در روش بدون شبکه پترو-گلرکین با تابع پایه تابع شعاعی چندضلعی، درصد متوسط خطای مطلق برای مسأله با 9، 16 و 36 گره به ترتیب برابر 6/54، 1/38 و 0/19 می‌باشد که نشان می‌دهد با افزایش تعداد گره‌ها افزایش دقت و البته کاهش سرعت رخ می‌دهد. از خطای کاملاً قابل قبول 1/9 در این جدول، عدم وابستگی نتایج به افزایش تعداد گره‌ها از تعداد 36 نقطه محاسباتی به بعد مشهود است.



شکل 5 کانتورهای سرعت در روش بدون شبکه

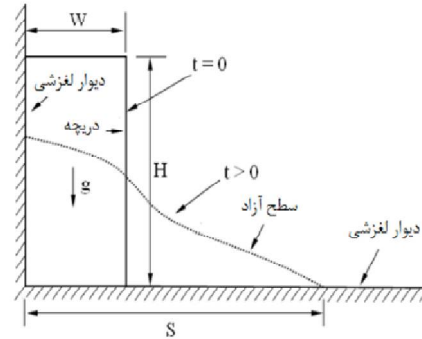
شبکه محلی پترو-گلرکین با روش بدون شبکه حداقل مربعات کاملاً واضح است که نتایج از همخوانی مناسبی برخوردار باشند.

5- نتیجه گیری

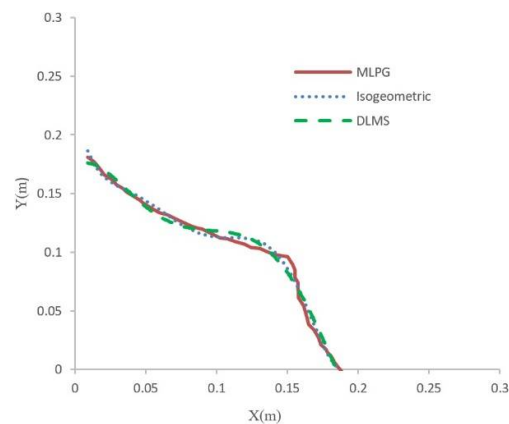
با توجه به تحلیل فوق و هدف مدل سازی جریان داخل کانال، نتیجه می شود که روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین ابزاری است که در مدل سازی مسائل با شرایط مرزی متغیر کاملاً سازگار است، زیرا تنها با تولید نقاط در هر مرحله تحلیل با شرایط مرزی جدید بدون نگرانی از ارتباط بین گره ها و رعایت پیوستگی بین آن ها، مدل سازی در کمترین زمان ممکن انجام می شود. کاملاً آشکار است که مدل سازی چنین مسائلی در روش اجزاء محدود پیچیده بوده زیرا با کوچک ترین تغییر در شرایط مرزی شبکه بندی مسئله به یک مرحله زمان بر و پیچیده تبدیل می شود. از طرف دیگر در مسائل با مرزهای غیرمسلح (منحنی) ایجاد المان هایی که از نظر شکل و ظاهر متناسب با فرضیات روش اجزاء محدود باشد پیچیده بوده در حالی که در روش پیشنهادی این مشکل به آسانی قابل رفع می باشد. به طور کلی روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین یک طرح هوشمند در حل مسائل شرایط هندسی متغیر است.

6- فهرست علائم

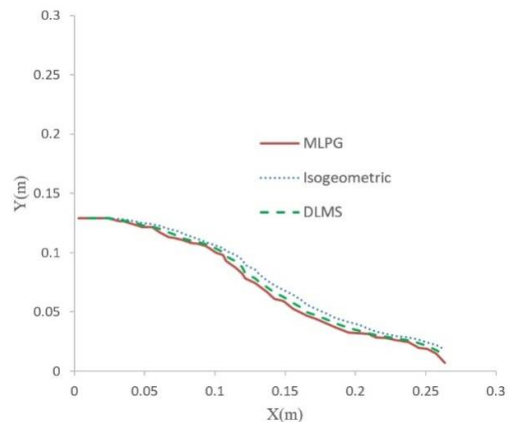
$a_i(x_Q)$	ضریب تابع پایه ای
$B_i(x)$	تابع پایه ای تعریف شده در مسئله پیرامون فضای
$X^T = [x, y, x]$	دکارتی
D و B	عملگر دیفرانسیلی
$\frac{D}{Dt}$	عملگر مشتق مادی
d_s	فاصله بین گره ها
f و g	تابع نیرویی
g	شتاب جاذبه (ms^{-2})
k	تعداد گره هایی است که در دامنه تحت پوشش واقع شده اند.
l_0	فاصله ای اولین ذره (m)
n	تعداد عضوی چند جمله ای
P	بردار عضوی چند جمله ای
P	فشار ($kgm^{-1}s^{-2}$)



شکل 6 هندسه مسأله شکست سد



شکل 7 مقایسه ی پروفیل سطح آزاد بین روش های ایزوژئومتریک، حداقل مربعات و بدون شبکه در زمان 0/1 ثانیه



شکل 8 مقایسه ی پروفیل سطح آزاد بین روش های ایزوژئومتریک، حداقل مربعات و بدون شبکه در زمان 0/15 ثانیه

از سوی دیگر به علت ماهیت نزدیک به هم روش بدون

صبحی، ه، نیک سرشت، ا، ح، و روزگار، س. ج. (1393). استفاده از یک نیروی مانع ساده برای شبیه‌سازی عبور جریان از زیر یک دریچه‌های پویالاستیک به کمک روش هیدرودینامیک ذرات هموار. نشریه هیدرولیک، 9(3)، صص. 14-1.

غیائی طرزی، ا، و ذونعمت کرمانی، م. (1393). استفاده از روش عددی بدون شبکه المان طبیعی در حل معادلات حاکم بر سیال با سطح آزاد. نشریه هیدرولیک، 9(4)، صص. 14-1.

قدم‌پور، ز، طالب بیدختی، ن، هاشمی، س. م، و نیک سرشت، ا. ح. (1392). مدل‌سازی عددی جریان به روش ISPH در مسائل شکست سد، جریان از روی سرریز و عملکرد همزمان دریچه و سرریز. نشریه هیدرولیک، 7(1)، صص. 29-47.

کریمی، س، لشکربلوک، م، و جباری، ا. (1392). وزن‌دهی تطبیقی دوبعدی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش. نشریه هیدرولیک، 7(2)، صص. 63-76.

محتشمی، ع، اکبرپور، ا، و ملازاده، م. (1396). مدل‌سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد در حالت ماندگار به روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین. مهندسی مکانیک مدرس، 17(2)، صص. 393-403.

محمدی، آ، و قائینی حصاروئی، م. (1395). مدل‌سازی جریان آبخوان دشت نیشابور به دو روش بدون شبکه المان تحلیلی و هم‌آبی نقطه‌ای. نشریه هیدرولیک، 11(3)، صص. 47-58.

Amini, R., Maghsoodi, R., & Moghaddam, N. (2016). Simulating free surface problem using isogeometric analysis. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(2), pp. 413-421.

Atluri, S. N., Kim, H.-G., & Cho, J. Y. (1999). A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation (LBIE) methods. *Computational mechanics*, 24(5), pp. 348-372.

Belytschko, T., Lu, Y. Y., & Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2), pp. 229-256.

Cueto, E., Sukumar, N., Calvo, B., Martínez, M., Cegonino, J., & Doblaré, M. (2003). Overview and recent advances in natural neighbour Galerkin methods. *Archives of computational methods in engineering*, 10(4), pp. 307-384.

Hardy, R. L. (1990). Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of

R_{Ω}	باقی‌مانده‌ی مسأله در داخل دامنه
R_{Γ}	باقی‌مانده‌ی مسأله بر روی مرزها
$R_i(x)$	تابع پایه شعاعی
U_s	بردار تغییر مکان
\tilde{V}_i	تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی برای R_{Γ}
\hat{W}_i	تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی برای R_{Ω}
α	ضرایب چندجمله‌ای
α_s	ضریب بدون بعد برای کنترل اندازه دامنه‌ی تحت پوشش
$u^h(x)$	تابع میدان تقریبی
u_i	تابع میدان در i آمین نقطه در داخل دامنه تحت پوشش
$\varphi_i(x)$	تابع شکل در i آمین نقطه در داخل دامنه تحت پوشش
$\Phi^T(x)$	بردار تابع شکل
u	مؤلفه‌های سرعت در راستای X (ms^{-1})
u^*	سرعت در مرحله حدس (ms^{-1})
ρ^*	چگالی در مرحله حدس (kgm^{-3})
$\Delta\rho^*$	تغییرات چگالی در مرحله حدس (kgm^{-3})
$\Delta\rho$	تغییرات چگالی در مرحله تصحیح (kgm^{-3})
Δu^*	تغییرات سرعت در مرحله حدس (ms^{-1})
Δu	تغییرات سرعت در مرحله تصحیح (ms^{-1})
u_{max}	حداکثر سرعت ذره در محاسبات (ms^{-1})
ρ	چگالی (kgm^{-3})
v	لزجت سینماتیکی (m^2s^{-1})

7- منابع

امینی، ر، مقصودی، ر، و ظریف مقدم باصفت، ن. (1393). استفاده از روش ایزوژئومتریکی در مدل‌سازی شکست سد با دیدگاه لاگرانژی. مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، 4(3)، صص. 45-55.

امینی، ر، مقصودی، ر، ظریف مقدم باصفت، ن، و توکلی، س. م. (1394). مدل‌سازی جریان در کانال با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریکی. مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، 5(4)، صص. 15-26.

ثابت قدم، ف، و شجری قاسم خیلی، ع. (1396). استفاده از روش مسایل معکوس در اعمال مرزهای مستغرق جامد به فرمولاسیون تاوایی-تابع جریان سیال تراکم ناپذیر لزج. مهندسی مکانیک مدرس، 17(10)، صص. 397-404.

شاه مردان، م، م، نوروزی، م، و نقی خانی، ا. (1393). شبیه‌سازی عددی جریان سیال غیرنیوتنی از میان کانال با یک حفره. مهندسی مکانیک مدرس، 14(6)، صص. 35-40.

- Nayroles, B., Touzot, G., & Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational mechanics*, 10(5), pp. 307-318 .
- Nithiarasu, P. (2005). An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic based split (CBS) scheme. *International journal for numerical methods in fluids*, 48(12), pp. 1415-1428 .
- Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O., & Taylor, R. (1996). A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *International journal for numerical methods in engineering*, 39(22), pp. 3839-3866 .
- Shao, S., & Lo, E. Y. (2003). Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface. *Advance in Water Resources*, 26(7): pp. 787-800.
- Shobeyri, G., & Afshar, M. (2010). Simulating free surface problems using discrete least squares meshless method. *Computers & Fluids*, 39(3), pp. 461-470 .
- Wang, J. S., Ni, H. G., & He, Y. S. (2000). Finite-difference TVD scheme for computation of dam-break problems. *Journal of hydraulic engineering*, 126(4), pp. 253-262.
- Wendland, H. (1999). Meshless Galerkin methods using radial basis functions. *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, 68(228), pp. 1521-1531 .
- Zienkiewicz, O. C., & Codina, R. (1995). A general algorithm for compressible and incompressible flow-Part I. the split, characteristic based scheme. *International journal for numerical methods in fluids*, 20(8□9), pp. 869-885 .
- discovery 1968–1988. *Computers & Mathematics with Applications*, 19(8-9), pp. 163-208 .
- Liu, G.-R., & Gu, Y.-T. (2005). *An introduction to meshfree methods and their programming*: Springer Science & Business Media.
- Liu, G.-R., & Gu, Y. (2001). A point interpolation method for two-dimensional solids. *International journal for numerical methods in engineering*, 50(4), pp. 937-951 .
- Liu, G., & Gu, Y. (2001). A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids. *Journal of Sound and vibration*, 246(1), pp. 29-46 .
- Liu, W. K., Jun, S., & Zhang, Y. F. (1995). Reproducing kernel particle methods. *International journal for numerical methods in fluids*, 20(8□9), pp. 1081-1106 .
- Melenk, J., & Babuska, I. (1997). Approximation with harmonic and generalized harmonic polynomials in the partition of unity method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4, pp. 607-632 .
- Moussavinezhad, S., Shahabian, F., & Hosseini, S. M. (2013a). Two-dimensional elastic wave propagation analysis in finite length FG thick hollow cylinders with 2D nonlinear grading patterns using MLPG method. *CMES Comput. Model. Eng. Sci*, 91, pp. 177-204 .
- Moussavinezhad, S., Shahabian, F., & Hosseini, S. M. (2013b). Two-dimensional stress-wave propagation in finite-length FG cylinders with two-directional nonlinear grading patterns using the MLPG method. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(3), 575-592 .