

## حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی به ازای الگوی زمانی دلخواه منابع آلاینده نقطه‌ای توسط روش تابع گرین

ندا مشهدگر<sup>1</sup>، جمال محمد ولی سامانی<sup>2\*</sup>، مهدی مظاهری<sup>3</sup>

1- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های آبی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس

2- استاد گروه سازه‌های آبی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس

3- استادیار گروه سازه‌های آبی، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس

\* تهران، صندوق پستی 336 - 14115  
samani\_j@modares.ac.ir

**چکیده-** کاربرد مدل‌های ریاضی در زمینه انتقال آلودگی در رودخانه‌ها از اهمیت بسیاری برخوردار است. به‌کارگیری حل‌های تحلیلی در این زمینه به‌منظور صحت‌سنجی روش‌های حل عددی ضروری است. در این مقاله راه‌حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی<sup>1</sup> (ADRE) در حالت یک بعدی با ضرایب (سرعت و ضریب پراکندگی) ثابت و به ازای الگوهای زمانی دلخواه منابع آلاینده نقطه‌ای با استفاده از روش تابع گرین<sup>2</sup> تعیین می‌شود. ابتدا راه‌حل کلی معادله ADRE در دامنه نیمه محدود تعیین شد. بیان صریح راه‌حل نهایی مذکور، منوط به داشتن تابع گرین مرتبط با مسأله اصلی است. برای تعیین تابع گرین از ابزاری به نام عملگر الحاقی استفاده می‌شود. نهایتاً با قرار دادن تابع گرین در فرم کلی راه‌حل به‌دست آمده برای مسأله مقدار مرزی اصلی، راه‌حل معادله ADRE تعیین شد. ارزیابی رابطه پیشنهادی از طریق مقایسه نتایج حاصل از آن با نتایج حل تحلیلی Van Genachten and Alves (1982) به ازای شرایط یکسان جریان و برای آلاینده ورودی با الگوی زمانی بارگذاری پله‌ای انجام شد. نتایج به‌دست آمده با هر دو راه‌حل کاملاً بر یکدیگر منطبق بودند. هم‌چنین به‌منظور تعمیم نتایج به حالت واقعی، غلظت حاصل از بارگذاری دو منبع تخلیه آلاینده با الگوی زمانی نامنظم نیز با روش GFM تعیین شده و به دلیل عدم وجود حل تحلیلی در این موارد، نتایج آن با نتایج حاصل از نرم‌افزار MIKE11 مقایسه شد. نمودارهای نهایی و تحلیل شاخص‌های آماری حاکی از انطباق نتایج راه‌حل تحلیلی پیشنهادی با نتایج حاصل از MIKE11 می‌باشد. لازم به ذکر است، تعیین حل تحلیلی صورت کلی این معادله برای بیش از یک منبع آلاینده نقطه‌ای فعال با الگوهای زمانی نامنظم و دلخواه بارگذاری، از دستاوردهای مهم این مقاله به-شمار می‌رود.

**کلیدواژگان:** الگوی زمانی نامنظم، روش تابع گرین، منابع آلاینده نقطه‌ای، معادله ADRE، MIKE11.

**1- مقدمه**

انتشار آلودگی در رودخانه‌ها از مهم‌ترین مسائل و مشکلات موجود در محیط‌زیست است. معادله حاکم بر انتقال آلودگی در محیط‌های آبی اعم از رودخانه‌ها و جریان‌ات زیرسطحی، در حالات یک، دو و سه بعدی، معادله انتقال (معادله جابه‌جایی-پراکندگی-واکنش) است. این معادله یکی از مهم‌ترین معادلات دیفرانسیل جزئی بوده که از ترکیب معادله پیوستگی و قانون اول فیک به‌دست آمده و دارای کاربردهای وسیعی در علوم آب و جو، انتقال حرارت و علوم مهندسی است. بنابراین راه‌حل تحلیلی و یا عددی آن می‌تواند در جهت توضیح نحوه توزیع غلظت ماده آلوده‌کننده و رفتار آن در یک محیط باز مانند هوا، رودخانه و محیط متخلخل مؤثر واقع شود. به‌منظور پیش‌بینی نحوه توزیع زمانی و مکانی غلظت مواد آلاینده در رودخانه‌ها بایستی معادلات دیفرانسیل جریان و انتقال حل شوند. حل این معادلات تحت شرایطی که فرضیات ساده‌کننده در معادلات اعمال شود، به‌صورت تحلیلی امکان‌پذیر خواهد بود. اما به‌دلیل پیچیدگی رفتار واقعی یک سیستم در طبیعت و ورود پارامترهای بسیار زیادی که در حل مسئله دخیل هستند، ارائه یک راه‌حل تحلیلی بسیار پیچیده و دشوار است. به‌منظور پیش‌بینی حرکت ابر آلودگی، پایش و مدیریت کیفیت آب با وجود پیچیدگی‌های سیستم‌های هیدرولوژیکی، تعیین پارامترهای مؤثر بر مکانیزم انتقال و صحت‌سنجی روش‌های عددی، تا حد امکان استفاده از راه‌حل‌های تحلیلی ترجیح داده می‌شود (Batu, 2005).

این راه‌حل‌ها بر اساس مفاهیم ریاضی و فیزیکی استخراج شده و فارغ از خطاهای موجود در روش‌های عددی مانند خطاهای ناشی از ایجاد مقدار انتشار عددی<sup>1</sup> و قطع سری-سری‌ها که اغلب در شبیه‌سازی اتفاق می‌افتد، می‌باشد (Park and Zhan, 2001). شکل کلی این معادله

در حالت انتقال یک بعدی آلاینده که در معرض سه پدیده جابه‌جایی، پراکندگی و واکنش قرار دارد به صورت رابطه (1) است (Chapra, 1997):

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -V \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ D \frac{\partial c}{\partial x} \right] - kc \pm \varphi(x, t) \quad (1)$$

در رابطه (1)،  $t$  زمان (s)،  $x$  فاصله نقطه‌ای در پایین‌دست رودخانه از محل ورود آلاینده (m)،  $V$  سرعت میانگین در مقطع رودخانه در جهت طولی (m/s)،  $D$  ضریب پراکندگی طولی (m<sup>2</sup>/s)،  $k$  ثابت نرخ واکنش (s<sup>-1</sup>)،  $c=c(x, t)$  غلظت (که بصورت تابعی از زمان و مکان تعریف می‌شود) و  $\varphi(x, t)$  عبارت از چشمه<sup>2</sup> یا چاهک<sup>3</sup> است تحت شرایطی که  $\varphi(x, t)$  چشمه (یا منبع آلاینده خارجی) باشد، به غلظت ماده آلاینده در محیط خواهد افزود، لذا علامت آن مثبت در نظر گرفته می‌شود. در مواردی که  $\varphi(x, t)$  چاهک باشد، از غلظت ماده آلاینده در محیط خواهد کاست، لذا علامت آن منفی در نظر گرفته می‌شود.

به‌منظور تعیین پاسخ معادله (1) در حالت یک و دو بعدی روش‌های متفاوتی از جمله روش‌های تبدیل انتگرالی، روش تابع ویژه و جداسازی متغیرها توسط محققین اتخاذ شده است که بیشتر آن‌ها برای شرایط مرزی ساده و در موارد پیچیده‌تر تنها برای یک منبع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای زمانی بسیار ساده مانند الگوی زمانی ثابت، پله‌ای و نمایی می‌باشد. لازم به‌ذکر است که راه‌حل‌های تحلیلی ارائه شده بیشتر در محیط متخلخل بوده و مطالعات مرتبط با رودخانه‌ها محدود است.

حل تحلیلی معادله انتقال با روش‌های جداسازی متغیرها<sup>4</sup> و جانشینی ریاضی<sup>5</sup> از قدیمی‌ترین روش‌های حل هستند

2. Source

3. Sink

4. Separation Of Variables Method

5. Mathematical Substitutions Method

1. Numerical Dispersion

زیرزمینی با وجود یک منبع آلاینده نقطه‌ای با مقدار ثابت، از روش تابع گرین به منظور استخراج راه‌حل تحلیلی معادله انتقال در حالت تعادلی و غیرتعادلی استفاده کردند. هم‌چنین Park and Zhan (2001) راه‌حل تحلیلی معادله انتقال برای یک سفره آب زیرزمینی با ضخامت محدود و با فرض صفر بودن منبع آلاینده نقطه‌ای را با استفاده از روش تابع گرین تعیین کردند.

در این تحقیق راه‌حل معادله (1) به‌ازای شرط مرزی نوع اول با الگوی زمانی دلخواه و شرط اولیه با الگوی مکانی دلخواه و نیز برای شرایطی که چندین منبع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای زمانی نامنظم و دلخواه در طول مسیر وجود دارند، با استفاده از روش تابع گرین به‌دست خواهد آمد. ذکر این نکته ضروری است که راه‌حل‌های تحلیلی که تاکنون ارائه شده برای شرایط مرزی ساده و عموماً برای یک منبع نقطه‌ای به‌کار می‌روند.

## 2- مبانی و روش‌ها

روش تابع گرین یک ابزار قدرتمند به‌منظور تعیین راه‌حل معادلات دیفرانسیل جزئی ناهمگن است. با استفاده از این روش می‌توان شرایط مرزی و اولیه متفاوت و پیچیده را حتی در مواردی که هندسه محیط پیچیده است، با دقت خوبی در مسأله اعمال کرد. هم‌چنین از مزایای مهم این روش در حل معادله ADRE آن است که می‌توان الگوهای متفاوتی از منابع آلاینده نقطه‌ای را در مکان‌های متفاوتی در طول دامنه مورد مطالعه در نظر گرفته و توزیع مکانی و زمانی آن در محدوده مورد مطالعه را بررسی کرد (Beck et al., 1992).

### 1-2- استخراج تابع گرین

معادله ADRE در حالت یک بعدی با ضرایب ثابت، برای دامنه نیمه محدود، با شرط اولیه معلوم در  $t=0$ ، شرط

که توسط محققان از جمله Mikhailov and Ozisik (1984)، Marshall and Holmes (1979) و هم‌چنین Ogata and Banks (1961) مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

در زمینه حل تحلیلی معادله انتقال با تبدیل‌های انتگرالی، می‌توان به تحقیقات Van Genachten and Alves (1982)، Feike et al. (1993) و Massabo et al. (2011) اشاره کرد که در آن با استفاده از تبدیل لاپلاس و فوریه، به تعیین راه‌حل معادله انتقال در حالت تعادلی و غیرتعادلی<sup>1</sup> در حالت یک بعدی در محیط متخلخل برای شرایط مرزی نوع اول و سوم در ورودی با الگوی زمانی پیوسته، پله‌ای و نمایی و شرط اولیه به‌صورت یکنواخت پرداختند. یکی دیگر از روش‌های حل تحلیلی معادله انتقال، روش تبدیل انتگرالی کلی،<sup>2</sup> GITT می‌باشد. این روش بر پایه روش توابع ویژه<sup>3</sup> استوار است (Cotta, 1994). در این زمینه می‌توان به تحقیق Chen and Liu (2011) اشاره کرد که در آن راه‌حل تحلیلی معادله انتقال در محیط متخلخل و دامنه‌ی محدود با شرط مرزی نوع سوم با الگوی زمانی دلخواه در ورودی و شرط مرزی نوع دوم (تغییرات مکانی صفر غلظت)<sup>4</sup> در خروجی با استفاده از GITT تعیین شد. در پژوهش دیگری که توسط Guerrero et al. (2009) انجام شد، راه‌حل صریح معادله انتقال با ضرایب ثابت با استفاده از ترکیب روش‌های تبدیل‌های جانشینی ریاضی (تغییر متغیر) و شکل کلاسیک روش تبدیل انتگرالی کلی، بیان شد. در زمینه حل معادله انتقال با استفاده از روش تابع گرین تحقیقات اندکی موجود است که در محیط متخلخل انجام شده است. (Feike et al. (2000) و Feike and VanGenachten (2000) برای بررسی نحوه انتقال املاح در سفره‌ی آب

1. Non-Equilibrium

2. Generalized Integral Transform Technique

3. Eigen Functions

4. Zero Gradient

تصویری<sup>3</sup> و یا روش تابع ویژه، تابع گرین حاصل خواهد شد. به عبارت دیگر راه حل حاصله از مسأله الحاقی همان تابع گرین مورد نظر خواهد بود. با تعیین تابع گرین مربوط به مسأله مقدار مرزی الحاقی، می توان راه حل نهایی معادله دیفرانسیل را به صورت یک معادله انتگرالی به دست آورد. باید توجه داشت که روش تابع گرین به صورت مرتبط با سایر روش های حل تحلیلی مانند تبدیل های انتگرالی به منظور حل معادلات دیفرانسیل به کار می رود. این روش تنها برای حل معادلاتی به کار می رود که عملگر دیفرانسیلی آنها اصل برهم نهی را ارضا کند (Beck et al. 1992, Greenberg 1971).

منابع آلاینده مورد استفاده در این تحقیق از نوع منابع آلاینده نقطه ای در نظر گرفته می شوند. در حالت کلی عبارت منبع آلاینده را در معادلات می توان به صورت  $\phi(x,t)$  در نظر گرفت که توزیع زمانی و مکانی آنها را نشان می دهد. منبع آلاینده نقطه ای منبعی است که مساحت آن (مساحتی که تخلیه از آن صورت می گیرد) در مقایسه با مساحت محیطی که منبع در آن تخلیه می شود، بسیار ناچیز باشد؛ به طوری که بتوان آن را به صورت یک نقطه در نظر گرفت (Chapra, 1997). اگر منابع آلاینده مورد نظر شامل  $n_s$  منبع آلاینده نقطه ای باشد، می توان آنها را به صورت ریاضی به شکل رابطه (6) نشان داد (Fischer, 1979):

$$\phi(x,t) = \sum_{i=1}^{n_s} w_i(t) \delta(x-x_i) \quad (6)$$

در معادله (6)  $w_i(t)$  برابر با تابع شدت (تابع تخلیه یا الگوی زمانی) منبع آلاینده نقطه ای  $i$ ام،  $x_i$  برابر با مختصات مکانی منبع آلاینده نقطه ای  $i$ ام و  $\delta()$  نیز برابر تابع دلتای دیراک است.

لازم به ذکر است که به علت طولانی بودن مراحل استخراج حل تحلیلی، همه مراحل استخراج راه حل به تفصیل ارائه

مرزی دیریشلت<sup>1</sup> در  $x=0$  و عبارت منبع  $\phi(x,t)$  به صورت زیر است (Xu et al. 2007):

$$Lc = c_t + Vc_x - Dc_{xx} + kc = \phi(x,t), \quad (2)$$

$$0 < x < \infty, 0 < t < \infty$$

$$IC: c(x,0) = f(x) \quad (3)$$

$$BC(Upstream) : c(0,t) = h(t), \quad (4)$$

$$BC(Downstream): \frac{\partial c}{\partial x} \Big|_{x \rightarrow \infty} = 0$$

در رابطه (2)،  $L$  عملگر دیفرانسیلی مؤثر روی تابع غلظت  $c(x,t)$  است که به صورت رابطه (5) تعریف می شود (سایر مشخصات نیز مشابه رابطه (1) می باشند):

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + V \frac{\partial}{\partial x} - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k \quad (5)$$

در رابطه (5)  $V, D$  و  $k$  همان پارامترهای تعریف شده در رابطه (1) هستند. تابع گرین اساساً پاسخ یک معادله دیفرانسیل خاص متناظر با معادله دیفرانسیل مسأله اصلی با شرایط مرزی همگن متناظر با شرایط مرزی ناهمگن مسأله اصلی است که به ترتیب، معادله دیفرانسیل الحاقی و شرط مرزی الحاقی نام گذاری شده است. تعیین این معادله دیفرانسیل خاص به همراه شرایط مرزی همگن الحاقی متناظر دارای یک چارچوب اصولی معین است که بر اساس آن پس از تعیین عملگر دیفرانسیلی الحاقی، تابع عبارت منبع  $(\phi(x,t))$  در معادله الحاقی، با تابعی به صورت دلتای دیراک<sup>2</sup> جایگزین می شود. معادله دیفرانسیل جدید به دست آمده معادله الحاقی نامیده می شود. تعیین شرایط مرزی الحاقی نیز به کمک شرایط مرزی مسأله اصلی صورت می گیرد. مهم ترین ویژگی شرایط مرزی الحاقی به دست آمده همگن بودن آنهاست که حل معادله دیفرانسیل الحاقی را تسهیل می کند. نهایتاً با حل مسأله الحاقی متشکل از معادله الحاقی به همراه شرایط مرزی الحاقی با استفاده از روش های مختص حل معادلات دیفرانسیل جزئی مانند تبدیل های انتگرالی، روش

1. Dirichlet  
2. Dirac Delta Function

دلخواه از دامنه حل هستند که غلظت در آنجا مدنظر است. ذکر این نکته ضروری است که تابع گرین  $G(\xi, \tau; x, t)$  اثر عبارت منبع به صورت تابع دلتای دیراک واقع در مکان  $x$  و زمان  $t$  را در نقطه  $\xi$  و زمان  $\tau$  نشان می‌دهد. براساس قوانین معادلات دیفرانسیل معادله (8) یک معادله ناهمگن جزئی، خطی و از مرتبه دوم می‌باشد. حل معادله مذکور شامل دو بخش می‌باشد. بخش اول مربوط به حل معادله دیفرانسیل غیرهمگن بدون در نظر گرفتن هر نوع شرایط مرزی در دامنه بی-نهایت بوده که اصطلاحاً به آن جواب خصوصی گفته می‌شود. بخش دوم نیز مربوط به حل شکل همگن معادله (8) با توجه به شرایط مرزی داده شده در مسأله (معادله (9)) است که به جواب عمومی معروف است. بنابراین با فرض این‌که توابع  $U$  و  $g$  به ترتیب جواب خصوصی و جواب عمومی معادله (8) باشند و بر اساس اصل جمع آثار، راه‌حل معادله (8) با شرط مرزی داده شده برابر با مجموع توابع  $U$  و  $g$  خواهد بود. بر این اساس تابع گرین برابر است با:

$$G(\xi, \tau; x, t) = U(\xi, \tau; x, t) + g(\xi, \tau; x, t) \quad (11)$$

به منظور تعیین جواب خصوصی معادله (11) از تبدیل فوریه استفاده شد (Greenberg, 1971)؛ لذا پاسخ خصوصی معادله (8) به صورت رابطه (12) است.

$$U(\xi, \tau; x, t) = \frac{H(t-\tau)\exp(-k(t-\tau))}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} \exp\left[-\frac{[\xi-x+V(t-\tau)]^2}{4D(t-\tau)}\right] \quad (12)$$

در رابطه (12)،  $H(t-\tau)$  تابع هویساید<sup>1</sup> یا تابع پله‌ای واحد نام دارد. پاسخ عمومی معادله (8) نیز با استفاده از

۱- این تابع به نام الیور هویساید نام گذاری شده و طبق تعریف عبارت است از:

$$H(x-a) = \begin{cases} 0, & \text{if } x < a \\ 1, & \text{if } x > a \end{cases}$$

نشده است (Beck et al. 1992, Greenberg 1971). استفاده از تئوری گرین ثابت می‌شود که راه‌حل کلی معادله (2) با شرط مرزی نوع اول (دیرشلت) در بالادست (معادله (4)) و شرط اولیه به شکل معادله (3) به صورت زیر می‌باشد (Polyanin, 2002):

$$c(x, t) = \int_0^t \int_0^\infty G(\xi, \tau) \phi(\xi, \tau) d\xi d\tau + \int_0^\infty G(\xi, 0) f(\xi) d\xi + \int_0^t DG_\xi(0, \tau) h(\tau) d\tau \quad (7)$$

در رابطه (7)  $G$  تابع گرین متناظر با مسأله اصلی بوده که شکل اصلی نمایش آن به صورت  $G(\xi, \tau; x, t)$  است. به لحاظ فیزیکی مفهوم تابع گرین مرتبط با معادله انتقال عبارت است از توزیع غلظت ایجاد شده در مکان  $\xi$  و در زمان  $\tau$  که به علت اعمال مقدار غلظت وارد شده با شدت واحد با الگوی زمانی پالسی (بصورت تابع دلتای دیراک) در مکان  $x$  و زمان  $t$  می‌باشد (Xu et al. 2007, Haberman 1987, Greenberg 1971). با توجه به معادله (7)، اولین عبارت سمت راست بیانگر تأثیر عبارت منبع، دومین عبارت، تأثیر شرط اولیه و سومین عبارت بیانگر تأثیر شرط مرزی در توزیع زمانی و مکانی غلظت است. متعاقباً مسأله الحاقی برای تابع  $G$  را می‌توان به شکل رابطه (8) نوشت (Xu et al. 2007):

$$L^*G = -G_\tau - VG_\xi - DG_{\xi\xi} + kG = \delta(\xi - x, \tau - t), \quad 0 < \xi < \infty, 0 < \tau < \infty \quad (8)$$

$$G(0, \tau) = 0 \quad (9)$$

در معادلات فوق  $L^*$  عملگر الحاقی بوده و عبارت است از:

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial \tau} - V \frac{\partial}{\partial \xi} - D \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + k \quad (10)$$

$\delta(\cdot)$  تابع دلتای دیراک، پارامترهای  $x$  و  $t$  بیانگر مکان و زمان شروع بارگذاری و  $\xi, \tau$  متغیرهای آزاد انتگرال‌گیری بوده و نشان‌دهنده موقعیت زمانی و مکانی هر نقطه

### 3-2- صحت‌سنجی راه‌حل پیشنهادی

پس از تعیین راه‌حل تحلیلی معادله ADRE، بایستی راه-حل به‌دست آمده مورد ارزیابی قرار گیرد. لازم به‌ذکر است که راه‌حل‌های تحلیلی ارائه شده توسط محققان تنها برای چند الگوی زمانی ساده مربوط به آلاینده ورودی از شرط مرزی، اعم از الگوی زمانی بارگذاری پله‌ای، پیوسته و نمایی استخراج شده است. لذا حل تحلیلی به‌ازای الگو-های زمانی نامنظم منبع آلاینده نقطه‌ای ورودی از شرط مرزی و یا منابع نقطه‌ای فعال در طول مسیر کانال، خصوصاً در مجاری روباز و نهرها وجود ندارد. مطابق روال معمول به‌منظور ارزیابی حل‌های تحلیلی عموماً از مثال‌های فرضی استفاده می‌شود. لذا ممیزی راه‌حل تحلیلی پیشنهادی با راه‌حل تحلیلی ارائه شده توسط Van Genachten and Alves (1982)، به ازای یک منبع آلاینده نقطه‌ای ورودی از شرط مرزی با الگوی زمانی پله‌ای برای شرایط مذکور صورت می‌گیرد. به‌منظور ارزیابی دقت راه‌حل تحلیلی پیشنهادی، به علت نبودن حل تحلیلی برای الگوهای زمانی نامنظم بارگذاری، نتایج حاصله از راه‌حل تحلیلی مذکور با نتایج حاصله از نرم‌افزار MIKE11 به‌ازای دو منبع آلاینده نقطه‌ای فعال در فواصل 3 و 6 کیلومتری از ابتدای یک کانال 10 کیلومتری با الگوهای بارگذاری نامنظم مقایسه شد.

### 3- نتایج و بحث

به‌منظور ارزیابی راه‌حل به‌دست آمده، شبیه‌سازی برای دو مثال فرضی یکی با در نظر گرفتن منبع آلاینده نقطه‌ای فعال در نقطه مرزی با الگوی بارگذاری ساده و با فرض صفر بودن منبع آلاینده نقطه‌ای  $(\phi(x,t))$  و دیگری با فرض صفر بودن غلظت ناشی از شرط مرزی و شرط اولیه و با در نظر گرفتن دو منبع آلاینده فعال با الگوی زمانی بارگذاری نامنظم انجام شد.

روش تصویری برابر است با (Greenberg, 1971):

$$g(\xi, \tau; x, t) = -\frac{H(t-\tau)\exp(-k(t-\tau))}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} \exp\left(\frac{Vx}{D}\right) \exp\left[-\frac{[\xi-x+V(t-\tau)]^2}{4D(t-\tau)}\right] \quad (13)$$

لذا تابع گرین نهایی را با توجه به رابطه (11)، می‌توان به صورت رابطه (14) نوشت (Polyanin, 2002):

$$G(\xi, \tau; x, t) = \frac{H(t-\tau)\exp(-k(t-\tau))}{\sqrt{4\pi D(t-\tau)}} \left\{ \exp\left[-\frac{[\xi-x+V(t-\tau)]^2}{4D(t-\tau)}\right] - \exp\left[\frac{Vx}{D} - \frac{[\xi+x+V(t-\tau)]^2}{4D(t-\tau)}\right] \right\} \quad (14)$$

### 2-2- ارائه حل تحلیلی

برای تعیین راه‌حل کلی مسئله اصلی (معادله (2)) برای شرایط مرزی (رابطه (4))، شرط اولیه مشخص (رابطه (3)) و به‌ازای عبارت منبع شامل چندین منبع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای بارگذاری دلخواه کافی است تابع گرین به‌دست آمده (رابطه (14)) و معادله مربوط به منابع آلاینده نقطه‌ای متعدد با شدت‌های متفاوت (رابطه (6)) را در معادله (7) قرار داده و با استفاده از خاصیت انتقال<sup>1</sup> در تابع دلتای دیراک راه‌حل برای  $c(x,t)$  به‌دست خواهد آمد. لذا شکل بسته حل تحلیلی نهایی به ازای شرط مرزی نوع اول در بالادست در دامنه نیمه محدود به صورت رابطه (15) خواهد بود.

$$c(x,t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_i} \int_0^t w_i(\tau) G(x_i, \tau; x, t) d\tau}_{\text{Source Term}} + \int_0^\infty G(\xi, 0) f(\xi) d\xi + \int_0^t DG_\xi(0, \tau) h(\tau) d\tau \quad (15)$$

1- خاصیت انتقال در تابع دلتای دیراک به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x-a) dx = f(a)$$

$$c(x,t) = \begin{cases} c_1 A(x,t) + c_0 B(x,t) & 0 < t \leq t_0 \\ c_1 A(x,t) + c_0 B(x,t) - c_0 B(x,t-t_0) & t > t_0 \end{cases} \quad (19)$$

$$A(x,t) = \exp(-kt) \left\{ 1 - \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[ \frac{x-Vt}{2(Dt)^{\frac{1}{2}}} \right] - \frac{1}{2} \exp\left(\frac{Vx}{D}\right) \operatorname{erfc} \left[ \frac{x+Vt}{2(Dt)^{\frac{1}{2}}} \right] \right\} \quad (20)$$

$$B(x,t) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{(V-u)x}{2D}\right) \operatorname{erfc} \left[ \frac{x-ut}{2(Dt)^{\frac{1}{2}}} \right] + \frac{1}{2} \exp\left(\frac{(V+u)x}{2D}\right) \operatorname{erfc} \left[ \frac{x+ut}{2(Dt)^{\frac{1}{2}}} \right] \quad (21)$$

$$u = V \left( 1 + \frac{4kD}{V^2} \right)^{0.5} \quad (22)$$

که پارامترهای ارائه شده در روابط فوق همان پارامترهای معرفی شده قبلی هستند. نتایج حاصل از شبیه‌سازی هم-زمان توزیع غلظت با هر دو راه‌حل تحلیلی در زمان‌های متفاوت در سه مرحله تعیین شده است.

### 3-1- مثال اول: الگوی بارگذاری پله‌ای

در مثال اول الگوی بارگذاری آلاینده ورودی از مرز، به صورت پله‌ای فرض شده و راه‌حل به دست آمده با راه-حل تحلیلی Van Genachten and Alves (1982) مقایسه شد. رابطه کلی مربوط به نمایش این نوع بارگذاری را با توجه به تعریف تابع هویساید می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$c(0,t) = h(t) = c_0 [H(t-t_1) - H(t-t_2)] = \begin{cases} c_0, & t_1 < t < t_2 \\ 0, & \text{Others} \end{cases} \quad (16)$$

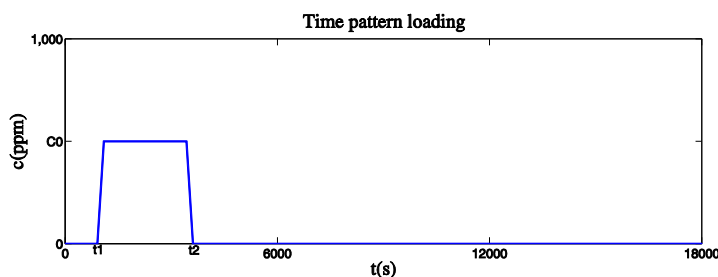
مقادیر پارامترهای جریان و آلاینده تخلیه شده در جدول 1 مشخص شده است:

که در آن  $T$  کل مدت زمان شبیه‌سازی و  $c_0$  و  $c_1$  نیز به ترتیب مقادیر غلظت مربوط به الگوی پله‌ای و غلظت اولیه در  $t=0$  است. لازم به ذکر است که راه‌حل تحلیلی Van Genachten and Alves (1982) برای بارگذاری پله‌ای (شکل 1) به صورت زیر خواهد بود:

$$IC: c(x,0) = c_1 \quad (17)$$

$$BC(\text{Upstream}): \begin{cases} c_0 & 0 < t \leq t_0 \\ 0 & t > t_0 \end{cases},$$

$$BC(\text{Downstream}): \frac{\partial c}{\partial x}(\infty, t) = 0 \quad (18)$$



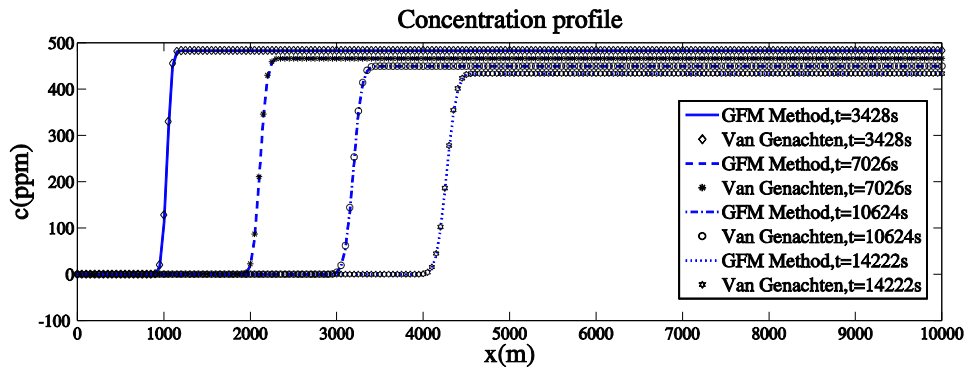
شکل 1 فرم شماتیک الگوی بارگذاری پله‌ای

جدول 1 مشخصات جریان و آلاینده ورودی با الگوی زمانی پله‌ای

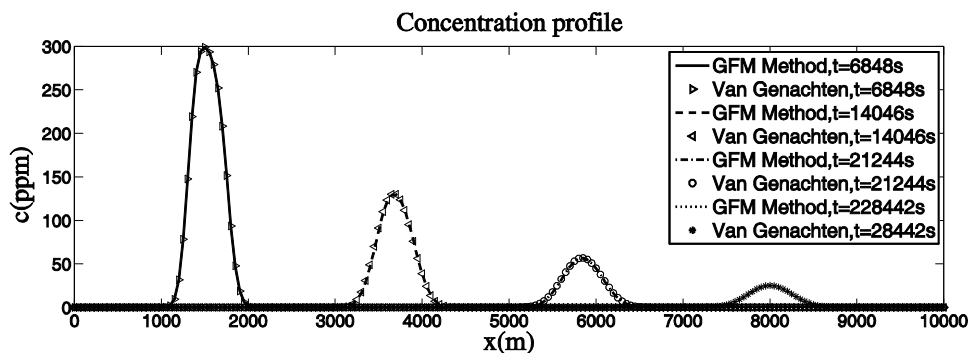
پارامتر	$V(\text{m/s})$	$D(\text{m}^2/\text{s})$	$k(1/\text{s})$	$t_1(\text{s})$	$t_2(\text{s})$	$T(\text{hr})$	$c_1(\text{kg}/\text{m}^3)$	$c_0(\text{kg}/\text{m}^3)$
مقدار	0/3	0/3	0/00001	1000	3600	5	0/5	0/5

شرط اولیه و شرط مرزی هیچ‌کدام صفر نباشند، تعیین و در شکل‌های 2 تا 4 نشان داده شده است. همان‌طور که در شکل‌های 2 تا 4 ملاحظه می‌شود، نتایج حاصل از هر دو راه‌حل انطباق و سازگاری کاملی با یکدیگر دارند.

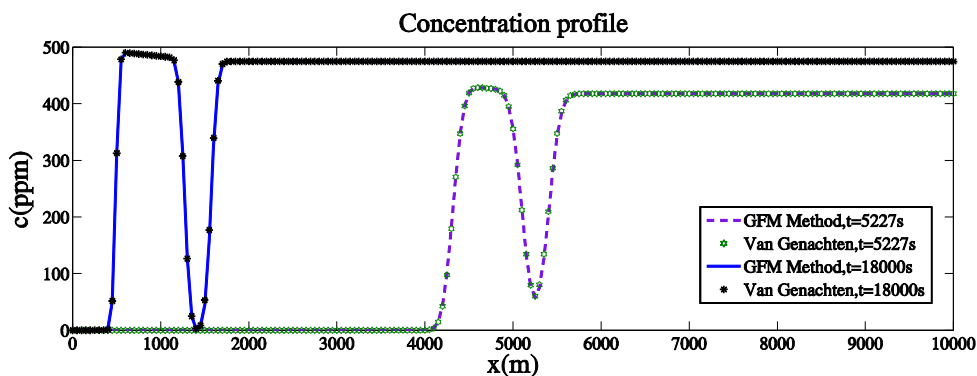
به این صورت که ابتدا پروفیل غلظت برای شرایطی که غلظت ورودی از مرز صفر و غلظت حاصل از شرط اولیه غیر صفر باشد، سپس شرایطی که غلظت اولیه موجود در محیط (حاصل از شرط اولیه) صفر و غلظت ورودی از مرز غیر صفر باشد و نهایتاً حالتی که غلظت حاصل از



شکل 2 مقایسه راه‌حل به‌دست آمده توسط GFM با راه‌حل Van Genachten and Alves (1982) با فرض بارگذاری پله‌ای و  $c_0=0$



شکل 3 مقایسه راه‌حل به‌دست آمده توسط GFM با راه‌حل Van Genachten and Alves (1982) با فرض بارگذاری پله‌ای و  $c_1=0$



شکل 4 مقایسه راه‌حل به‌دست آمده توسط GFM با راه‌حل Van Genachten and Alves (1982) با فرض بارگذاری پله‌ای



مرزی برابر با 0/5 کیلوگرم بر مترمکعب با الگوی بارگذاری پله‌ای و برای مقادیر 25 و 10، 5، 0/8، 0/3، D متر مربع بر ثانیه با هر دو راه‌حل تعیین شد و نتایج حاصل مقایسه شدند.

همان‌گونه که در شکل 5 مشخص است، علاوه بر تطبیق بسیار خوب نتایج راه‌حل پیشنهادی و راه‌حل ارائه شده توسط Van Genachten and Alves (1982) در تمام منحنی‌ها، هرچه زمان می‌گذرد از نقطه اوج غلظت پروفیل به علت پدیده پراکندگی و واکنش کاسته شده و منحنی پهن‌تر شده و حالت منظم‌تری به خود می‌گیرد. به عبارت بهتر با افزایش ضریب پراکندگی دامنه موج غلظت کمتر می‌شود. نکته قابل توجه دیگر آن است که هرچه اختلاف ضریب پراکندگی بیشتر باشد فاصله نقاط اوج پروفیل متناظر آن‌ها نیز بیشتر خواهد بود.

قبل از فعال شدن منبع آلاینده غلظت مربوط به شرط اولیه ( $c_1=0/5$ ) در محیط در طول مدت زمان شبیه‌سازی دچار افت می‌شود. با فعال شدن آلاینده ورودی با الگوی زمانی پله‌ای از نقطه مرزی، غلظت محیط افزایش یافته، اما با اتمام مدت زمان بارگذاری در اثر پدیده پخشیدگی نمودار توزیع غلظت یکنواخت‌تر می‌شود. هم‌چنین به علت تأثیر عامل واکنش با توجه به غیرصفر بودن ثابت نرخ واکنش ( $k$ ) در قسمت انتهایی نمودار در شکل‌های 2 تا 4 افت غلظت مشاهده می‌شود. در این نمودارها تأثیر عامل زمان در توسعه پروفیل غلظت و کاهش دامنه آن به علت تأثیر ضریب پراکندگی تا رسیدن به یک حالت پایدار نیز مشهود است. به عبارت دیگر هرچه زمان جلوتر می‌رود، پروفیل غلظت در رودخانه بیش‌تر پخش شده و پروفیل غلظت به سمت حالت ماندگار حرکت می‌کند.

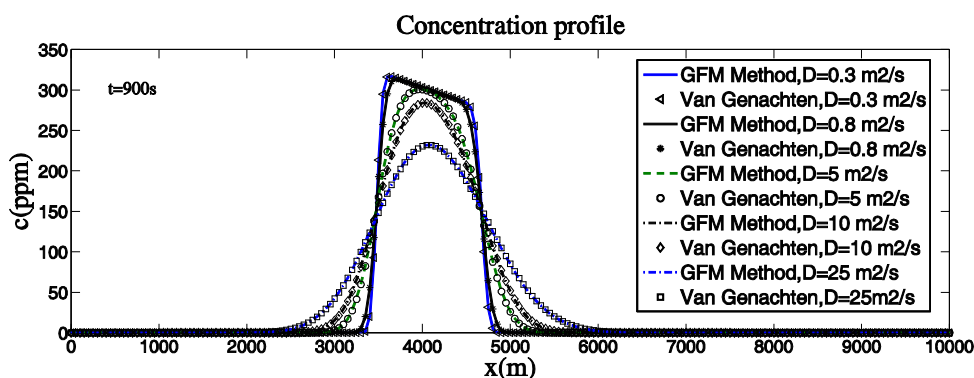
### 3-3- مثال دوم: الگوی بارگذاری نامنظم برای دو منبع

#### آلاینده نقطه‌ای فعال

با توجه به شکل انتگرالی رابطه (5)، با تعیین تابع گرین می‌توان راه‌حل معادله ADRE را برای الگوهای زمانی نامنظم بارگذاری حاصل از یک و یا بیش از یک منبع آلاینده نقطه‌ای نیز به دست آورد.

### 3-2- مقایسه و بررسی تأثیر ضریب پراکندگی

در این بخش به مقایسه تأثیر ضریب پراکندگی به عنوان یکی از پارامترهای مهم بر پروفیل غلظت حاصل با استفاده از راه‌حل پیشنهادی و راه‌حل Van Genachten and Alves (1982) پرداخته می‌شود. برای این منظور پروفیل غلظت با مشخصات داده شده در جدول 1، به ازای شرط اولیه برابر صفر و غلظت ورودی از شرط



شکل 5 تأثیر ضریب پراکندگی بر پروفیل غلظت

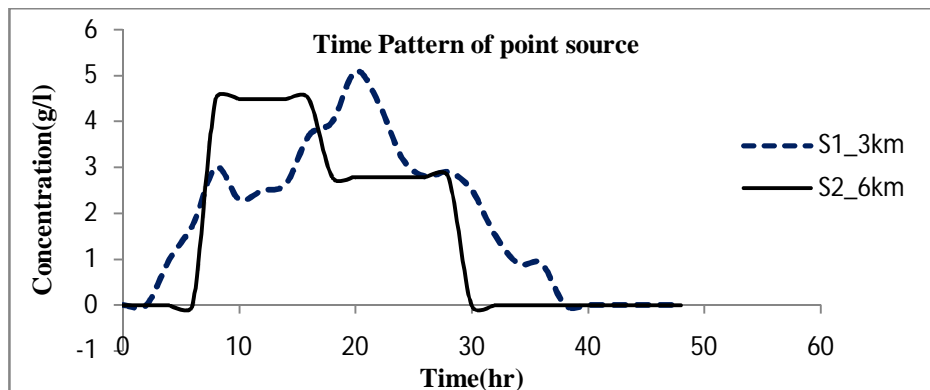
علت تفاوت شکل کلی سری زمانی غلظت در شکل‌های 7 و 8 ناشی از عدم هم‌زمانی در فعال شدن هر دو منبع آلاینده می‌باشد. با توجه به شکل 6 با گذشت زمان، ابتدا منبع S1 در 3 کیلومتری از ابتدای کانال فعال می‌شود. لذا تا قبل از فعال شدن منبع آلاینده S2، غلظت موجود در کانال تنها ناشی از منبع S1 است. با فعال شدن منبع آلاینده S2 با الگوی زمانی متفاوت، افزایش غلظت در محیط رخ داده و تا زمانی که هر دو منبع S1 و S2 توأماً فعال باشند، غلظت موجود در کانال ناشی از تأثیر هم‌زمان هر دو منبع آلاینده فعال خواهد بود که تحت تأثیر مکانیزم انتقال و انتشار آلودگی در محیط قرار می‌گیرد. همان‌طور که در شکل‌های فوق ملاحظه می‌شود نتایج به‌دست آمده با استفاده از MIKE11 دارای انطباق بسیار خوبی با نتایج حاصل از راه‌حل تحلیلی پیشنهادی است. این امر با ارائه شاخص‌های آماری هم‌چون شاخص جذر میانگین مربعات خطا (RMSE)، شاخص میانگین خطای مطلق (MAE) و مجذور ضریب همبستگی ( $R^2$ ) نیز به وضوح مشخص می‌باشد که نتایج حاصل از محاسبه این سه شاخص در جدول 3 نشان داده شده است.

لازم به ذکر است که در این حالت‌ها راه‌حل تحلیلی وجود ندارد. در این مثال غلظت توسط راه‌حل به دست آمده از GFM برای دو منبع تخلیه فعال در فواصل به-ترتیب 3 و 6 کیلومتری از ابتدای کانال با دبی تخلیه QS1 و QS2 با الگوی زمانی نامنظم محاسبه شد. سایر مشخصات مربوط به جریان و منابع آلاینده مطابق جدول 2 می‌باشد.

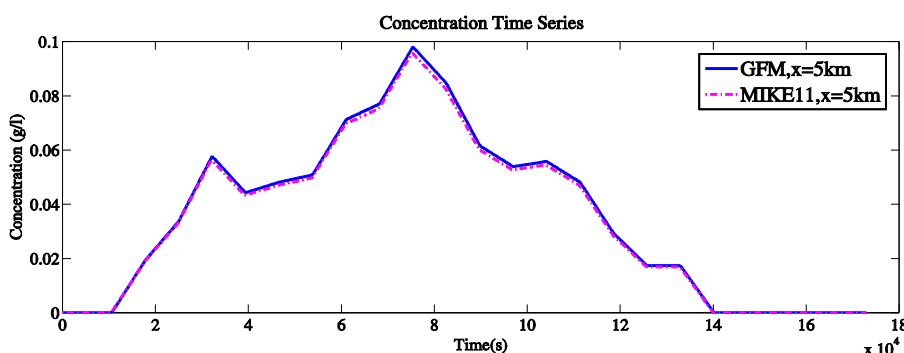
هم‌چنین سری زمانی غلظت ورودی از منابع آلاینده S1 و S2 در این مثال مطابق با شکل 6 در نظر گرفته شد. با شرایط مشابه برای جریان و الگوی زمانی بارگذاری ملاحظه شده در شکل 6، شبیه‌سازی با استفاده از نرم‌افزار MIKE11 نیز انجام گرفته و الگوی زمانی غلظت به‌دست آمده در فواصل 5 و 8 کیلومتری از ابتدای کانال با استفاده از راه‌حل تحلیلی پیشنهادی و نرم‌افزار MIKE11 با هم مقایسه شده و در شکل‌های 7 و 8 نمایش داده شده است. لازم به ذکر است که معادله ADRE در نرم‌افزار MIKE11 با الگوی عددی تمام ضمنی تفاضل محدود با تقریب مشتق مرکزی در مکان (با هدف کاهش مقدار انتشار عددی تولید شده) حل می‌شود.

جدول 2 مشخصات جریان و آلاینده تخلیه شده از دو منبع آلاینده نقطه‌ای

پارامتر	V (m/s)	D (m <sup>2</sup> /s)	QS1 (m <sup>3</sup> /s)	QS2 (m <sup>3</sup> /s)	T (hr)	$\Delta t$ (s)	$\Delta x$ (m)
مقدار	0/597	1	0/5	0/35	48	120	100

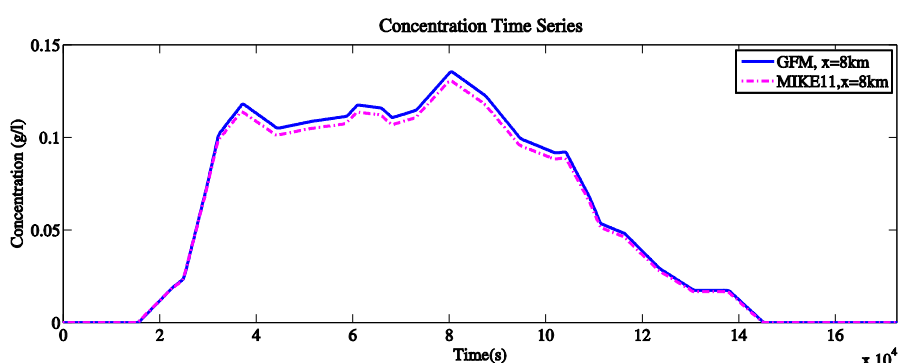


شکل 6 الگوی زمانی غلظت تخلیه شده توسط دو منبع تخلیه S1 و S2



شکل 7 مقایسه الگوی زمانی غلظت در فاصله 5 کیلومتری از ابتدای کانال

با استفاده راه حل تحلیلی پیشنهادی و نرم افزار MIKE11



شکل 8 مقایسه الگوی زمانی غلظت در فاصله 8 کیلومتری از ابتدای کانال

با استفاده راه حل تحلیلی پیشنهادی و نرم افزار MIKE11

جدول 3 شاخص های آماری به دست آمده به منظور مقایسه نتایج حاصل از نرم افزار MIKE11 و راه حل تحلیلی با GFM

شاخص	RMSE (g/l)	MAE (g/l)	R <sup>2</sup> (%)
مقدار	$2/7 \times 10^{-4}$	$2/03 \times 10^{-5}$	99/98

نامنظم تر است اختلاف جزئی بین نتایج محاسبه شده با راه حل پیشنهادی و نرم افزار MIKE11 وجود دارد. علت این امر افزایش تجمعی خطاهای ناشی از روش حل عددی به کار رفته در نرم افزار MIKE11 می باشد که با گذشت زمان و نامنظم تر شدن الگوی بارگذاری مقدار این خطا افزایش خواهد یافت.

#### 4- نتیجه گیری

برای تخمین میزان و نحوه انتشار غلظت ماده آلاینده در رودخانه و یا در کانال اصلی استفاده از مدل های تحلیلی و

با توجه به این که مقادیر بیشینه غلظت های محاسبه شده با راه حل پیشنهادی و نرم افزار MIKE11 به ترتیب برابر 0/130 و 0/135 گرم بر لیتر است، ناچیز بودن مقادیر شاخص های MAE و RMSE نسبت به این مقادیر بیشینه حاکی از جزئی بودن اختلاف بین نتایج حاصل از هر دو روش می باشد. همچنین بالا بودن مقدار ضریب R<sup>2</sup> به دست آمده نیز نشان دهنده وجود هم بستگی مطلوبی بین نتایج حاصل از راه حل تحلیلی پیشنهادی و نرم افزار MIKE11 می باشد.

با توجه به شکل های 7 و 8 در نواحی که بارگذاری

$g(\xi, \tau; x, t)$	جواب عمومی مسأله الحاقی
$H(t-\tau)$	تابع پله‌های واحد
$k$	ثابت نرخ واکنش
$L$	عملگر دیفرانسیلی معادله انتقال آلودگی
$L^*$	عملگر دیفرانسیلی الحاقی
$t$	زمان
$U(\xi, \tau; x, t)$	جواب خصوصی مسأله الحاقی
$V$	سرعت میانگین
$x_i$	مختصات مکانی منبع آلاینده $i$ ام
$x$	مکان
$w_i(t)$	تابع شدت تخلیه منبع آلاینده
$\phi(x, t)$	تابع عبارت منبع
$\delta()$	تابع دلتای دیراک
$\xi$	مولفه مکانی فرضی (متغیر انتگرال‌گیری)
$\tau$	مولفه زمانی فرضی

## 6- منابع

Batu, V., (2005). *Applied flow and solute transport modeling in aquifers, fundamental principles and analytical and numerical methods*, CRC Press.

Beck, J.V., et al., (1992). *Heat conduction using Green's functions*. Hemisphere Publishing Corporation Washington DC.

Chapra, S.C. (1997). *Surface water-quality modeling*, Vol. 1, McGraw-Hill New York.

Chen, J.-S. and Liu, C.-W. (2011). Generalized analytical solution for advection-dispersion equation in finite spatial domain with arbitrary time-dependent inlet boundary condition, *Hydrology and Earth System Sciences Discussions*, 8(2), pp. 4099-4120.

Cotta, R.M. (1994). The integral transform method in computational heat and fluid flow, in *Institution of Chemical Engineers Symposium Series*, Hemisphere Publishing Corporation.

Fischer, H.B., (1979). *Mixing in inland and coastal waters*, Academic press.

Greenberg, M.D., (1971). *Application of Green's functions in science and engineering*, Vol. 30, Prentice-Hall New York New York.

Haberman, R., (1987). *Elementary applied partial differential equations: with Fourier series and boundary value problems*, Prentice-Hall Englewood

یا عددی بسته به میزان پیچیدگی مسأله گسترش می‌یابد. در این تحقیق حل تحلیلی معادله ADRE در دامنه نیمه محدود برای شرط مرزی دیریشلت با استفاده از GFM به دست آمد. همان‌طور که گفته شد تعیین حل تحلیلی معادله ADRE برای چند منبع آلاینده فعال با الگوهای زمانی نامنظم یکی از مهم‌ترین جنبه‌های نوآوری این تحقیق به‌شمار می‌رود. راه‌حل تحلیلی ارائه شده می‌تواند در مواردی که سرعت و ضریب پراکنندگی ثابت می‌باشد، جایگزین راه‌حل‌های عددی باشد. همچنین این راه‌حل به دلیل دقت و سرعت بالای محاسباتی نسبت به حل‌های عددی، انعطاف پذیری فوق‌العاده در اعمال شرط مرزی، شرط اولیه و منابع آلاینده نقطه‌ای با الگوهای پیچیده، عدم ایجاد مشکلات مربوط به پایداری فیزیکی و نشان دادن کلیه پارامترهای مؤثر بر فرایند انتقال، در فرایند شبیه‌سازی و بهینه‌سازی، عملکرد مناسب و مؤثری خواهد داشت. در گام بعدی راه‌حل تحلیلی پیشنهادی با راه‌حل Van Genuchten and Alves (1982) مقایسه شد. برای تعمیم نتایج به واقعیت، شبیه‌سازی برای الگوی زمانی نامنظم بارگذاری ناشی از دو منبع فعال، با راه‌حل پیشنهادی انجام شده و به علت عدم وجود حل تحلیلی در حالت‌های پیچیده، ارزیابی نتایج راه‌حل پیشنهادی با MIKE11 صورت پذیرفت. شاخص‌های آماری به دست آمده انطباق نتایج حاصل از راه‌حل مذکور و MIKE11 و همچنین توانمندی و دقت راه‌حل پیشنهادی را در حد مطلوبی ارزیابی می‌کنند.

## 5- فهرست علائم

$c(x, t)$	تابع توزیع غلظت
$D$	ضریب پراکنندگی طولی
$G(\xi, \tau; x, t)$	تابع گرین ناشی در مکان $\xi$ و زمان $\tau$ ناشی از منبع آلاینده اعمال شده در مکان $x$ و در زمان $t$

- Ogata, A. and Banks, R.B. (1961). *A solution of the differential equation of longitudinal dispersion in porous media*, US Government Printing Office Washington, DC.
- Park, E. and Zhan, H. (2001). Analytical solutions of contaminant transport from finite one-, two-, and three-dimensional sources in a finite-thickness aquifer, *Journal of Contaminant Hydrology*, 53(1), pp. 41-61.
- Pérez Guerrero, J., et al., (2009). Analytical solution of the advection–diffusion transport equation using a change-of-variable and integral transform technique, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 52(13), pp. 3297-3304.
- Polyanin, A.D., (2002). *Linear partial differential equations for engineers and scientists*, Chapman & Hall/CRC.
- Van Genuchten, M.T. and Alves, W. (1982). Analytical solutions of the one-dimensional convective-dispersive solute transport equation, *Technical Bulletin*, 1982(1661).
- Xu, Z., Travis, J.R. and Breitung, W. (2007). Green's function method and its application to verification of diffusion models of GASFLOW Code, *Forschungszentrum Karlsruhe*.
- Cliffs, NJ.
- Leij, F.J., N. Toride, and Van Genuchten, M.T. (1993). Analytical solutions for non-equilibrium solute transport in three-dimensional porous media. *Journal of Hydrology*, 151(2), pp. 193-228.
- Leij, F.J. and Van Genuchten, M.T. (2000). Analytical modeling of nonaqueous phase liquid dissolution with Green's functions. *Transport in Porous Media*, 38(1-2), pp. 141-166.
- Leij, F.J., Priesack, E. and Schaap, M.G. (2000). Solute transport modeled with Green's functions with application to persistent solute sources, *Journal of Contaminant Hydrology*, 41(1), pp. 155-173.
- Massabó, M., Cianci, R. and Paladino, O. (2011). An analytical solution of the advection dispersion equation in a bounded domain and its application to laboratory experiments, *Journal of Applied Mathematics*, V. 2011, Art. ID. 493014, 14p.
- Mikhaïlov, M.D. and Özişik, M.N. (1984). *Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion*, Dover Publications.
- Marshall, T.J. and Holmes, J.W. (1979). *Soil physics*, Cambridge University Press.