

معرفی شرط مرزی دیوار تک‌لایه با استفاده از روش نیمه‌ضمنی ذرات متحرک توسعه یافته

مسعود آرامی فدافن¹، مسعود رضا حسامی کرمانی^{2*}

1- دانشجوی دکترای سازه‌های هیدرولیکی، بخش مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان
2- استادیار بخش مهندس عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهید باهنر کرمان

*Hessami@uk.ac.ir

چکیده - روش نیمه‌ضمنی ذرات متحرک، یک روش کاملاً لاگرانژی است که در آن به هیچ نوع شبکه‌بندی نیاز نبوده و به طور گسترده در مسایل مختلف مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. مشخصه‌های جریان نظیر سرعت و فشار به هر ذره اختصاص یافته و ذرات نقش شبکه‌ی محاسباتی را ایفا می‌کنند. شکل اصلی این روش دچار نوسانات فشار بوده و تلاش‌های بسیاری برای کاهش این نوسانات انجام شده است. همچنین این روش به ندرت در شبیه‌سازی مسایل مهندسی با هندسه‌های شامل خطوط منحنی به کار رفته است. در این مطالعه روندی برای توسعه روش تراکم‌ناپذیر نیمه‌ضمنی ذرات متحرک پیشنهاد شده است که علاوه بر بهبود فشار، امکان شبیه‌سازی مسایل با هندسه‌های پیچیده شامل خطوط منحنی را فراهم می‌سازد. به منظور صحت‌سنجی روش پیشنهادی، مسایل مختلف هیدرولیکی مانند مسئله فشار هیدرواستاتیک و شکست سد به عنوان آزمون‌های معمول و جریان روی سرریز اوجی با مرزهای باز به عنوان آزمون جدید روش پیشنهادی شبیه‌سازی شده‌اند و نتایج به دست آمده، توزیع فشار هموار و نزدیک به مقادیر تئوری یا آزمایشگاهی در دسترس را نشان می‌دهند.

کلیدواژگان: روش MPS، توزیع فشار هموار، شرط مرزی دیوار تک‌لایه.

1- مقدمه

مدل‌های دینامیک سیالات محاسباتی در مقایسه با مدل‌های فیزیکی از انعطاف‌پذیری بیشتری برخوردار بوده و نیاز کمتری به صرف هزینه و زمان دارند (Chanel and Doering, 2007). شبیه‌سازی عددی مسایل هیدرولیکی و هیدرودینامیکی جریان‌های سطح آزاد به دلیل وقوع جابه‌جایی‌های نسبی بزرگ در سیالات به ویژه در مسایلی که همراه با گسستگی‌ها و پیوستگی‌های جریان می‌باشد، همراه با پیچیدگی‌هایی است که از جمله آن می‌توان به تعیین سطح آزاد اشاره کرد. از آنجا که تعیین موقعیت در حرکت سطح آزاد با نقاط ثابت را به دشواری می‌توان تعریف کرد، به کار بردن شرط مرزی سطح آزاد در

روش‌های اویلری نسبت به روش‌های مبتنی بر ذره لاگرانژی پیچیده‌تر می‌باشد. تعیین سطح آزاد در روش‌های لاگرانژی فقط با یک رابطه ساده انجام می‌شود. همچنین روش‌های مبتنی بر ذره به طور ذاتی برای تحلیل و شبیه‌سازی گسستن‌ها و به هم‌پیوستن‌های جریان سیال مناسب می‌باشند، زیرا که با یک سیستم متشکل از ذرات گسسته بدون اتصال ثابت (لیست همسایگی‌ها) معرفی می‌شوند (Asai et al., 2012). همچنین در روش‌های لاگرانژی مشکل انتشار عددی ناشی از جملات انتقالی معادلات ناویر-استوکس مطرح نمی‌باشد (Shobeyri and Afshar, 2012). علت نوع گسسته‌سازی می‌باشد. گسسته‌سازی مستقل جملات جابجایی و انتشار

شناخته شوند. در این حالت یک ذره داخلی که به اشتباه ذره سطح آزاد تشخیص داده شده، فشار صفر را به خود اختصاص داده و میدان فشار ناهموار ایجاد می‌کند. برای اجتناب از موضوع مذکور در این بررسی، روش ساده تشخیص ذرات سطح آزاد در روش اصلی اصلاح شده است. همچنین برای توزیع یکنواخت ذرات، از روشی مشابه روش XSPH (Monaghan and Kos, 1999) استفاده شده است. عامل بعدی نوسانات فشار مربوط به جمله پواسون فشار روش اصلی می‌باشد و روش‌های پیشنهادی محققان بیشتر بر اصلاح این جمله متمرکز بوده است که در عین تولید میدان‌های فشار هموار، معادله پواسون فشار چند جمله‌ای شده و برای دستیابی به نتایج مناسب، نیاز به پیش آنالیز در تعیین ضرایب جملات دارند و یا محدود به استفاده از یک تابع کرنل خاص می‌شوند. معادله پواسون فشار پیشنهادی در تحقیق حاضر بسیار شبیه به معادله روش اصلی بوده و تک جمله‌ای می‌باشد. عامل سوم نوسانات فشار مربوط به معادله مومنوم غیر بقایی در روش اصلی MPS می‌باشد که متقارن نیست و طی شبیه‌سازی منجر به رشد خطاها می‌شود. اصلاح موارد مطرح شده در تحقیق حاضر، منجر به تولید نتایج قابل قبول از شبیه‌سازی‌های لاگرانژی شده که با نتایج تئوری، تحلیلی و آزمایشگاهی موجود تطابق قابل قبول دارد. پس از معرفی معادلات حاکم بر مسئله و شکل اصلی روش MPS به برخی اصلاحات فشار ارائه شده توسط محققان اشاره می‌شود.

2- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر مسئله، معادلات پیوستگی و ناویر-استوکس هستند که به شکل روابط (1 و 2) نمایش داده شده‌اند (Adami and Adams, 2012):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \nu \nabla^2 \bar{u} + \bar{F} \quad (2)$$

که در آن ρ چگالی ذره سیال، t زمان، \bar{u} سرعت ذره، P فشار و \bar{F} معرف نیروهای حجمی است. در صورت استفاده از روش لاگرانژی سمت چپ معادلات ناویر-استوکس (رابطه 2) مشتق‌گیری لاگرانژی شامل جمله‌های

(دیفرانسیل‌های جزئی) در روش‌های اوپلری، در قالب یک جمله (دیفرانسیل ذاتی) در روش‌های مبتنی بر ذره انجام می‌شوند. از طرفی، هرچند روش‌های اوپلری نتایج رضایت‌بخشی را در شبیه‌سازی‌های عددی ایجاد می‌کنند، اما موفقیت آن‌ها اغلب بستگی به تعریف شبکه‌های مناسب، به‌ویژه نزدیک مرزها و سطوح مرزی مشترک دارد (Ma, 2005). موارد اشاره شده بخشی از مزیت‌های نسبی روش‌های لاگرانژی نسبت به روش‌های اوپلری می‌باشد و با این وجود مقبولیت روش‌های اوپلری برای هزینه‌های محاسباتی کمتر مورد توجه می‌باشد. روش نیمه‌ضمنی ذرات متحرک (MPS) یک روش کاملاً لاگرانژی می‌باشد که توسط Koshizuka and Oka (1996) ارائه شده است. از این روش به طور گسترده در شبیه‌سازی مسایل مختلف مهندسی و جریان سطح آزاد، مانند مهندسی هسته‌ای (Duan et al, 2003 و Koshizuka et al, 1999)، مهندسی کشتی و بارهای مکانیکی وارد بر عرشه آن (Shibata and Koshizuka 2007، شبیه‌سازی بهمن‌برف (Otsuka et al, 2009)، مسایل هیدرودینامیک و مکانیک سیالات (Shibata et al. و Farhadi and Ataie-Ashtiani 2004) استفاده شده است. مشخصه‌های جریان نظیر سرعت و فشار به هر ذره اختصاص یافته و ذرات نقش شبکه‌ی محاسباتی را ایفا می‌کنند. با توجه به این که روش MPS در شکل اصلی خود دچار ضعف در تعیین صحیح فشار محاسباتی می‌باشد، روش‌های متعدد اصلاح فشار برای آن ارائه شده است (Khayyer and Gotoh, 2009, Khayyer and Gotoh, 2010; Shakibaeinia and Jin, 2010; Kondo and Koshizuka, 2011) در تحقیق حاضر روشی ارائه شده است که علاوه بر بهبود فشار، امکان شبیه‌سازی مسایل با هندسه‌های پیچیده، شامل خطوط منحنی را فراهم می‌سازد. برای اصلاح فشار روش MPS، ابتدا علل وقوع نوسانات عددی فشار در روش مذکور مورد بررسی قرار گرفته و سپس راهکار برطرف نمودن آن پیشنهاد شده است. از عوامل اصلی نوسانات فشار در روش MPS، توزیع مکانی غیر یکنواخت ذرات در محدوده‌ی تحت تاثیر تابع کرنل می‌باشد که می‌تواند منجر به کاهش عدد چگالی ذره در یک یا چند گام زمانی شود و در ادامه ذرات داخلی به عنوان ذرات سطح آزاد

کرنل استاندارد و تابع کرنل Wendland 2D مرتبه چهار اصلاح شده توسط نویسندگان برای روش MPS استفاده شده است (Koshizuka and Oka, 1996; Wendland, 1995):

$$w(\bar{r}_{ij}) = \begin{cases} \frac{r_e}{\bar{r}_{ij}} - 1 & 0 \leq \bar{r}_{ij} \leq r_e \\ 0 & \bar{r}_{ij} > r_e \end{cases} \quad (6-الف)$$

$$w(\bar{r}_{ij}) = \begin{cases} \frac{7}{\pi r_e^2} (1 + 4(\frac{\bar{r}_{ij}}{r_e})) (1 - (\frac{\bar{r}_{ij}}{r_e}))^4 & 0 \leq \bar{r}_{ij} \leq r_e \\ 0 & \bar{r}_{ij} > r_e \end{cases} \quad (6-ب)$$

از آنجایی که ناحیه‌ای که با این توابع کرنل پوشش داده شده است، محدود می‌باشد، ذره با تعداد متناهی از ذرات همسایه اندرکنش خواهد داشت. شعاع ناحیه‌ی اندرکنش توسط پارامتر r_e تعیین می‌گردد. لازم به ذکر است که استفاده از هر تابع کرنل که ویژگی‌های مثبت بودن، شعاع تاثیر محدود، یکتایی و واحد بودن و یکنواختی نزولی را دارا بوده و رفتاری مشابه رفتار تابع دلتا داشته باشد امکان‌پذیر است (Liu, 2003).

3-2- عدد چگالی ذره

عدد چگالی ذره در موقعیت \bar{r}_i که ذره‌ی i در آن قرار دارد به صورت رابطه (7) تعریف می‌شود (Koshizuka and Oka, 1996):

$$n_i = \sum_{j \neq i} w(|\bar{r}_j - \bar{r}_i|) \quad (7)$$

فرض می‌شود که ذرات، جرم‌های یکسان داشته باشند، بنابراین معادله‌ی پیوستگی در صورتی که عدد چگالی ذره ثابت بماند، ارضا می‌شود. این مقدار ثابت با n^0 مشخص می‌شود.

3-3- مدل‌سازی تراکم‌ناپذیری

به منظور حفظ پیوستگی و بقا جرم، چگالی سیال باید ثابت بماند و در روش MPS این موضوع بدین معناست که عدد چگالی ذره، n^0 ، ثابت بماند. از آنجایی که عدد چگالی ذره، n^* با n^0 برابر نیست، به طور ضمنی می‌بایست اصلاح شود (Koshizuka and Oka, 1996):

$$n^* + n' = n^0 \quad (8)$$

که در آن n' مقدار اصلاح می‌باشد. این مقدار با مقدار

جایجایی خواهد بود که به طور مستقیم با ردیابی حرکت ذره محاسبه می‌شود و سمت راست معادله شامل جمله‌های گرادیان فشار و نیروهای خارجی است. تمامی این جملات با عملگرهای دیفرانسیلی اندرکنش بین ذرات جایگزین می‌شوند.

3- گسسته‌سازی به روش MPS

عملگرهای گرادیان و لاپلاسیان برای ذره i با استفاده از مدل‌های اندرکنش متوسط‌گیری شده محلی ذره در روش اصلی MPS به صورت زیر تعریف می‌شود (Koshizuka and Oka, 1996):

$$\langle \nabla \phi \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\phi_j - \phi'_i}{|\bar{r}_j - \bar{r}_i|^2} (\bar{r}_j - \bar{r}_i) w(\bar{r}_{ij}) \right] \quad (3)$$

$$\langle \nabla^2 P \rangle_i = \frac{2d}{n^0 \lambda} \sum_{j \neq i} (P_j - P_i) w(\bar{r}_{ij}) \quad (4)$$

پارامتر λ به منظور برابر سازی افزایش واریانس و حل تحلیلی به صورت زیر معرفی می‌شود (Koshizuka and Oka, 1996):

$$\lambda = \frac{\int_V w(\bar{r}) \bar{r}^2 dv}{\int_V w(\bar{r}) dv} = \frac{\sum_{j \neq i} |\bar{r}_j - \bar{r}_i|^2 w(\bar{r}_{ij})}{\sum_{j \neq i} w(\bar{r}_{ij})} \quad (5)$$

در این مدل‌ها، d معرف بعد مسئله (2 برای مسایل دو بعدی و 3 برای مسایل سه‌بعدی)، ϕ مقدار پارامتر، ϕ'_i مقدار کمینه پارامتر در دامنه تحت پوش ذره i بردار موقعیت ذره، P فشار، n^0 مقدار اولیه عدد چگالی ذره و $w(\bar{r}_{ij})$ تابع کرنل می‌باشد.

3-3-1- تابع کرنل

به عنوان یک روش بدون شبکه، اندرکنش‌ها در روش MPS روی مجموعه‌ای از نقاط نامنظم در یک محیط پیوسته بدون شبکه انجام می‌شود و تابع کرنل به عنوان یک تابع هموار کننده مقادیر فیزیکی پیرامون یک ذره در نظر گرفته می‌شود (Shakibaeinia and Jin, 2010) که بر اساس آن، با استفاده از مقادیر فیزیکی ذرات همسایه، مقدار پارامتر مورد نظر برای ذره مرکزی محاسبه می‌گردد. یک ذره با سایر ذرات در همسایگی آن که توسط تابع کرنل $w(\bar{r}_{ij})$ پوشش داده شده‌اند، اندرکنش خواهد داشت. \bar{r}_{ij} فاصله بین دو ذره است. در این تحقیق از تابع

محاسبات فشار، تفاضل زمانی دقیق تری برای چگالی عددی ذرات به کار برده و معادله پواسون فشار را با جمله منبع مرتبه بالاتر به صورت رابطه (14) اصلاح کرده اند:

$$\nabla^2 P_i^{k+1} = -\frac{\rho}{n^0 \Delta t} \sum_{j \neq i} \frac{r_e}{r_{ij}^3} (x_{ij} \vec{u}_{ij}^* + y_{ij} \vec{v}_{ij}^*) \quad (14)$$

لازم به توضیح است این معادله پواسون فشار مرتبه بالا، تنها برای تابع کرنل استاندارد روش MPS قابل استفاده می باشد.

(Shakibaeinia and Jin, 2010) در مدل WC-MPS خود، برای بهبود محاسبات فشار و کاهش زمان پردازش عددی، سیال را به جای کاملاً غیر قابل تراکم، به صورت نسبتاً تراکم پذیر در نظر گرفتند. آن ها به جای حل معادله پواسون فشار به صورت ضمنی، از معادله حالت، مشابه روش SPH، که به صورت صریح حل می شود، استفاده نمودند.

$$P_i^{k+1} = \frac{\rho c_s^2}{\gamma} \left(\left(\frac{n_i^*}{n^0} \right)^\gamma - 1 \right) \quad (15)$$

که در آن γ ضریبی برابر 7 و c_s سرعت صوت می باشد. (Kondo and Koshizuka, 2011) برای مهار نوسانات فشار، جمله منبع معادله پواسون فشار را به صورت رابطه (16) به حالت مجموع چند جمله در نظر گرفته و ضرایبی برای جبران خطا ارائه داده اند.

$$-\frac{1}{\rho^0} \nabla^2 P_i^{k+1} = \frac{1 - \beta \frac{n_i^*}{n^0} - 2n_i^k + n_i^{k-1}}{\Delta t^2 \frac{n_i^*}{n^0}} + \frac{\beta - \gamma \frac{n_i^*}{n^0} - n_i^k}{\Delta t^2 \frac{n_i^*}{n^0}} + \frac{\gamma \frac{n_i^*}{n^0} - n^0}{\Delta t^2 \frac{n_i^*}{n^0}} \quad (16)$$

که در آن β و γ ضرایب جبران خطا می باشند $0 \leq \gamma \leq \beta \leq 1$.

(Ataie-Ashtani, Shobeyri and Farhadi, 2008) برای اصلاح فشار روش SPH رابطه (17) را پیشنهاد دادند که در واقع جایگزینی دیورژانس سرعت با تغییرات چگالی سیال می باشد. این تبدیل به طور کامل در تحقیق آن ها تشریح شده است.

$$\frac{1}{\rho^*} \nabla^2 P = \frac{1}{\rho^0 dt} \sum_j m_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \cdot \nabla_j W_{ij} \quad (17)$$

در رابطه دیگری که توسط Tanaka and Masunaga (2010) برای مهار نوسانات فشار پیشنهاد شده است، جمله منبع معادله پواسون فشار به صورت رابطه (18) تغییر یافته

اصلاح سرعت \vec{u}' از طریق رابطه ی بقای جرم در ارتباط است (Koshizuka and Oka, 1996):

$$\frac{1}{\Delta t} \frac{n'}{n^0} = -\frac{1}{n^0} \frac{n_i^* - n^0}{\Delta t} = -\nabla \cdot \vec{u}' \quad (9)$$

مقدار اصلاح سرعت از ترم گرادین فشار در حالت ضمنی استخراج می شود، بنابراین (Koshizuka and Oka, 1996):

$$\vec{u}' = -\frac{\Delta t}{\rho} \nabla P^{n+1} \quad (10)$$

معادله ی پواسون فشار با توجه به معادلات (8) تا (10) به دست می آید:

$$\langle \nabla^2 P^{n+1} \rangle_i = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n_i^* - n^0}{n^0} \quad (11)$$

عبارت سمت راست بیانگر انحراف عدد چگالی ذره از مقدار ثابت است، در حالی که در روش های مبتنی بر شبکه، معمولاً عبارت سمت راست در معادله پواسون فشار دیورژانس سرعت می باشد. در نهایت معادلات هم زمان در قالب یک ماتریس متقارن خطی بیان شده و دستگاه معادلات حل می شود. همان طور که اشاره شد حل معادله (11) میدان فشار همواری ارایه نمی دهد، لذا روابط متعدد برای اصلاح میدان فشار ارایه شده اند که در ادامه به چند مورد اشاره می شود.

(Khayyer and Gotoh, 2009) با هدف محدودسازی نوسانات عددی در مدل MPS اصلاح شده (CMPS) اصلاحاتی در گرادین فشار انجام دادند. آن ها با ارضای بقای مومنوم خطی و زاویه ای، رابطه جدیدی برای محاسبه گرادین فشار معرفی کردند که برای غلبه بر نوسانات فشار، اجازه می دهد سیال تا حدی تراکم پذیر شود:

$$\nabla P_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \frac{(P_i + P_j) - (\hat{P}_i + \hat{P}_j)}{|\vec{r}_{ij}|^2} (\vec{r}_{ij})_w (\vec{r}_{ij}) \quad (12)$$

لازم به توضیح است اپراتور گرادین معرفی شده تنها برای تابع کرنل استاندارد روش MPS قابل استفاده می باشد. آن ها همچنین با در نظر گیری تراکم پذیری جزئی و ترکیب آن با معادله حالت، معادله پواسون فشار را به صورت رابطه (13) پیشنهاد نموده اند:

$$\nabla^2 P_i^{t+1} = \frac{1}{\Delta t^2 c_s^2} (P^{t+1} - P^t)_i + \frac{\rho}{\Delta t} (\nabla \cdot \vec{u}^{*,t})_i \quad (13)$$

که در آن c_s سرعت صوت می باشد. (Khayyer and Gotoh, 2009, 2010) با هدف ارتقای

است:

$$\nabla^2 P_i^{k+1} = \frac{\rho}{\Delta t} (\nabla \bar{u}^*)_i + \gamma \frac{\rho}{\Delta t^2} \frac{n^0 - n_i^k}{n^0} \quad (18)$$

که در آن γ ضریب کاهش می‌باشد. با استفاده از این رابطه نه تنها توزیع فشار هموارتری به دست می‌آید، بلکه حجم سیال نیز ثابت بوده و تغییر تراکم نخواهد داشت.

4- منقطع‌سازی زمانی و الگوریتم حل

معادلات حاکم بر اساس عملگرهای گرادیان و لاپلاسین گسسته شده و در دو سطح زمانی حال و آینده نوشته می‌شوند. آنچنان‌که از نام روش حرکت نیمه ضمنی ذرات پیداست، معادلات به صورت نیمه ضمنی حل می‌شوند، یعنی برخی جمله‌ها به صورت صریح و برخی دیگر به طور ضمنی در نظر گرفته می‌شوند.

الگوریتم حل روش MPS را می‌توان در 6 گام زیر خلاصه نمود (Atai-Ashtiani and Farhadi, 2006):

1- چیدن اولیه ذرات و شرایط اولیه مسئله، برای هر گام زمانی Δt ؛

2- محاسبه نیروها و اعمال آن به ذرات، تعیین موقعیت و سرعت میانی ذرات؛

در منقطع‌سازی زمانی از روش پیش‌بینی - اصلاح با نام الگوریتم دو گام جزیی یا پروجکشن استفاده می‌شود. در این روش، جملات جابجایی و انتشار معادله ناویر-استوکس از جمله فشار به صورت مجزا منقطع شده و در نیم گام زمانی اول که مرحله‌ی پیش‌بینی نامیده می‌شود، معادلات حاکم بدون در نظر گرفتن جمله فشار و بدون اعمال تراکم‌ناپذیری به طور صریح حل می‌شوند (Shobeyri and Afshar, 2012). در این مرحله به دلیل عدم ارضای تراکم‌ناپذیری، بقای جرم ارضا نشده و به عبارتی مقدار چگالی عددی ذره با مقدار چگالی استاندارد اختلاف دارد. سرعت و موقعیت میانی را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود (Shobeyri, and Afshar, 2012):

$$\Delta \bar{u}^* = (\bar{F} + \nu \nabla^2 \bar{u}) \Delta t \quad (19)$$

$$\bar{u}^* = \bar{u}^n + \Delta \bar{u}^* \quad (20)$$

$$\bar{r}^* = \bar{r}^n + \bar{u}^* \Delta t \quad (21)$$

\bar{u}^n و \bar{r}^n سرعت و موقعیت ذره در زمان t و \bar{u}^* و \bar{r}^* سرعت و موقعیت میانی ذرات است. $\Delta \bar{u}^*$ تغییرات

سرعت ذره طی گام پیش‌بینی است.

3- محاسبه‌ی عدد چگالی ذره n^* با در نظر گرفتن موقعیت جدید ذرات؛

4- حل معادله‌ی پواسون فشار پس از گسسته‌سازی آن در یک سیستم خطی معادلات در روش تراکم‌ناپذیر و یا استفاده از معادله حالت در روش تراکم‌پذیر ضعیف؛

در نیم‌گام دوم که مرحله‌ی تصحیح نامیده می‌شود، نتایج حاصل از مرحله‌ی پیش‌بینی شامل سرعت و موقعیت ذرات با در نظر گرفتن ترم فشار، اصلاح می‌شود.

5- محاسبه‌ی سرعت اصلاح شده از معادله فشار، رابطه (10)؛

6- محاسبه موقعیت و سرعت ذرات در گام زمانی بعدی (Shobeyri, and Afshar, 2012).

$$\bar{u}^{n+1} = \bar{u}^* + \bar{u}' \quad (22)$$

$$\bar{r}^{n+1} = \bar{r}^n + \bar{u}^{n+1} \Delta t \quad (23)$$

5- شرایط مرزی

1-5- شرط مرزی سطح آزاد

در روش اصلی، سطوح آزاد تنها با اعمال شرط زیر حاصل می‌شود (Koshizuka and Oka, 1996):

$$n_i^* < \beta n^0 \quad (24)$$

بر اساس رابطه‌ی فوق ذراتی که عدد چگالی ذره‌ی آن‌ها از مقدار مشخصی کمتر باشد، به عنوان ذرات سطح آزاد شناسایی می‌شوند. پارامتر β عددی کوچک‌تر از 1 است که مقدار آن بین 0/8 تا 0/99 انتخاب می‌شود. ذراتی که عدد چگالی ذره‌ی آن‌ها کمتر از مقدار مشخص شده باشد، در حل معادله‌ی پواسون فشار اعمال نمی‌شوند.

روش دیگر تعیین ذرات سطح آزاد در ادامه توضیح داده شده است. دیورژانس موقعیت یک ذره را در روش MPS می‌توان با استفاده از رابطه (25) محاسبه نمود (Lee et al., 2008).

$$\langle \nabla \cdot \bar{r} \rangle_i = \frac{d}{n^0} \sum_{j \neq i} \left[\frac{\bar{r}_j - \bar{r}_i}{|\bar{r}_j - \bar{r}_i|^2} (\bar{r}_j - \bar{r}_i) w(\bar{r}_{ij}) \right] \quad (25)$$

این مقدار برای ذرات داخلی در شبیه‌سازی دو بعدی برابر 2 و برای شبیه‌سازی‌های سه بعدی برابر 3 می‌باشد. برای ذرات واقع بر سطح که شامل همسایگی کامل نمی‌باشند،

Adami et al. (2012) به موضوع اصلاح پروفیل سرعت روی مرزهای صلب در حضور ذرات مجازی پرداختند. روش پیشنهادی آن‌ها در واقع روش اصلاح شده ذرات مجازی است. با توجه به این که سرعت ذرات دیواره و ذرات مجازی به طور معمول صفر در نظر گرفته می‌شود، روش مطرح شده توسط این محققین شرایط مرزی دیوار بدون لغزش و لغزش آزاد را فراهم می‌آورد.

Tavakkol et al. (2017) با استفاده از تبدیل هندسی، با حفظ ذرات مجازی، فضای هندسی مسئله را تغییر دادند. واضح است که استفاده از تبدیل هندسی نسبت به استفاده از هندسه اصلی به دلیل عملیات محاسباتی بیشتر، هزینه محاسباتی بیشتری به همراه داشته و لیکن به خوبی مسایل شامل خطوط منحنی را شبیه‌سازی کرده است. در روش معرفی شده توسط Barker et al. (2014) نیز ذرات مجازی حفظ شده و با اعمال فاکتور حجم، حجم ذرات در اطراف مرزهای منحنی با توجه به موقعیت قرارگیری آن‌ها اصلاح شده است.

در این مطالعه رابطه‌ای ساده ارایه شده که با استفاده از آن می‌توان از یک ردیف از ذرات به عنوان ذرات دیواره استفاده نمود و اثر ذرات مجازی را به صورت محاسباتی و با حذف چیدمان آن‌ها در هندسه مسئله، از رابطه (27) منظور نمود:

$$\langle n_i^t \rangle_{Corrected} = \langle n_i^t \rangle + (n_0 - \langle n_i^* \rangle) \cong n_0 \quad (27)$$

توضیح استفاده از رابطه به دلیل حذف مقدار یکسان (n_{dummy}) برای ذره i در هر دو گام پیش‌بینی و اصلاح می‌باشد که اثر آن در صورت رابطه پواسون اعمال می‌گردد $((n_i^* - n_{dummy_i}) - (n_i^t - n_{dummy_i}))$. اما حذف مقدار (n_{dummy}) از منجر کسر صحیح نبوده و با حذف آن از منجر کسر، معادله (1) بقا جرم تأمین نمی‌گردد. استفاده از رابطه (27)، متضمن حفظ پیوستگی در عین ساده‌سازی ترسیم هندسه مسئله، کاهش تعداد ذرات به دلیل حذف ذرات مجازی و متعاقب آن کاهش هزینه‌های محاسباتی می‌باشد. با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای پارامتر β و استفاده از رابطه کمکی زیر، امکان مدل‌سازی مسایل با هندسه دیواره‌ی منحنی میسر می‌شود. لازم به توضیح است که اغلب مسایل مدل شده به روش MPS تراکم‌پذیر،

مقدار محاسبه شده از رابطه بالا در مدل‌سازی دو بعدی کمتر از 2 می‌باشد و لذا با انتخاب مقداری مینا، معمولاً حدود 1/5 و یا هر مقدار مناسب دیگر، می‌توان ذرات سطح آزاد را تعیین نمود.

در تحقیق حاضر از روش اصلاح شده اول برای تعیین ذرات سطح آزاد، مطابق رابطه (26) استفاده شده است:

$$\langle n_{re} \rangle_i^* < \beta_1 n_{re}^0$$

$$\langle n_{re,lap} \rangle_i^* < \beta_2 n_{re,lap}^0 \quad (26)$$

مقدار β برای ذرات در محدوده r_e و r_{e_Lap} به ترتیب برابر $\beta_1 = 0/97$ و $\beta_2 = 0/85$ انتخاب شده است. انتخاب β کوچکتر برای ذرات سیال، موجب همواری توزیع فشار و پایداری بیشتر در تبدیل این ذرات به ذرات سطح آزاد و بالعکس می‌گردد. لذا انتخاب مقدار مناسب این پارامتر بسیار اهمیت دارد؛ هرچند که در روند کلی حل تغییری ایجاد نمی‌کند، اما پارامتری است که در تعیین اندازه ماتریس حل مؤثر می‌باشد و لذا سعی بر آن است تا مقدار بیشینه ممکن که پایداری حل را نیز به همراه داشته باشد، انتخاب گردد. لذا در این تحقیق از دو معیار برای ذرات سطح آزاد استفاده شده است.

5-2- شرط مرزی دیوار

اطراف مرزهای صلب نظیر دیوارها و کف‌ها و همچنین در نزدیکی سطح آزاد، عدد چگالی ذره به دلیل عدم وجود ذره در طرف دیگر مرز کاهش می‌یابد. کاهش عدد چگالی در نزدیکی مرزهای صلب موجب خطاهایی در برآورد مقادیر فیزیکی می‌شود و در صورتی که از معیار سطح آزاد کمتر باشد، موجب می‌شود که ذرات دیواره به عنوان ذره سطح آزاد شناخته شده و به عنوان مرز جامد عمل نکنند. یک راه حل مفید و ساده برای حل این مشکلات، قرار دادن چند ردیف ذره مجازی (ساختگی) در سمت بیرونی مرزهای جامد به منظور تأمین چگالی ذرات دیوار می‌باشد. در این صورت مقادیر فیزیکی تنها برای ذرات دیوار و سیال محاسبه شده و مقادیر محاسبه شده برای ذرات دیوار به این ذرات نیز تخصیص داده می‌شود. تعداد ردیف‌های مورد نیاز ذرات مجازی بستگی به شعاع مؤثر تابع کرنل دارد (Shao and Lo 2003).

A در هندسه مسئله)، به منظور نشان دادن قابلیت مدل پیشنهادی در کاهش نوسانات فشار، در شکل 3 نشان داده شده است.

با توجه به شکل 3 ملاحظه می‌گردد که تقریباً بلافاصله پس از شروع شبیه‌سازی، فشار محاسباتی به فشار تئوری نزدیک شده و با نوسان محدود حول مقدار تئوری تا انتهای شبیه‌سازی ادامه می‌یابد. به منظور اطمینان از دقت روش پیشنهادی در تولید میدان فشار هموار با نوسان محدود، در ادامه مسئله‌ی شکست سد به عنوان مسئله‌ای دینامیکی شبیه‌سازی می‌شود.

2-7- فروپاشی ستون آب (شکست سد)

به منظور مقایسه نتایج مدل‌سازی مسئله شکست سد از نتایج آزمایش انجام شده توسط Koshizuka and Oka (1996) استفاده است. شرایط اولیه هندسه‌ی مسئله در شکل 4 نشان داده شده است. در شبیه‌سازی لاگرانژی فاصله اولیه بین ذرات 0/008 متر انتخاب شده است. تعداد ذرات سیال 648 عدد، مطابق با آنچه که Shobeyri and Afshar (1996) و Koshizuka and Oka (2012) انتخاب نموده‌اند، در نظر گرفته شده است. ذرات دیواره‌ها دارای سرعت صفر در کل محاسبات بوده و موقعیتشان ثابت می‌ماند. در هر گام زمانی، معادله پواسون فشار برای ذراتی از دیوار و سیال که عدد چگالی آن‌ها بیشتر از مقدار مشخص (معیار سطح آزاد) می‌باشد، حل می‌گردد. تاریخچه زمانی نوسانات فشار با استفاده از روش‌های اصلی و پیشنهادی MPS در شکل 5 نشان داده شده است. همان‌طور که این شکل نشان می‌دهد، نوسانات فشار با استفاده از روش پیشنهادی نسبت به روش اصلی کاهش یافته است.

شکل 6 توزیع فشار روش اصلی MPS و روش پیشنهادی را با استفاده از تابع کرنل اصلی در زمان‌های 0/2s و 2/5s نشان می‌دهد. نتایج نشان‌دهنده توزیع فشار هموار و از نظر مقداری نزدیک به مقدار تئوری هیدرواستاتیک در زمان 2/5s (زمان رسیدن به حالت تعادل استاتیک و کاهش سرعت حرکت ذرات) با استفاده از روش پیشنهادی می‌باشد.

محدود به هندسه با خطوط پاره‌ای مستقیم می‌باشد.

$$f(i) = \begin{cases} 1 & \text{if number of fluid particle in} \\ & \text{the vicinity of particle } i \geq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (28)$$

$$\beta_{\text{wall}}(i) = \begin{cases} = 0.5\beta_{1 \text{ fluid}} & \text{if } f(i)=1 \text{ Straight wall} \\ < 0.5\beta_{1 \text{ fluid}} & \text{if } f(i)=1 \text{ Curved wall} \\ = \beta_{1 \text{ fluid}} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (29)$$

3-5- شرط مرزی ورودی

چند ردیف از ذرات با سرعت برابر سرعت ورودی به منظور تأمین چگالی ذرات ورودی تعریف شده‌اند. اولین لایه داخلی ذرات ورودی را تشکیل داده و بقیه تنها به منظور حفظ چگالی ذرات ورودی اعمال می‌شوند. ذرات این لایه در محاسبات فشار وارد شده و بین ذرات سیال و لایه‌های ماقبل خود قرار می‌گیرند. این ذرات با سرعت ورودی حرکت کرده و هنگامی که به اندازه کافی (به اندازه فاصله اولیه بین ذرات) وارد محیط اصلی شدند، ذرات ورودی جدید به مسئله وارد می‌شوند. دوره ورود ذرات جدید (K) بستگی به سرعت ورودی، اندازه گام زمانی و فاصله اولیه بین ذرات دارد.

4-5- شرط مرزی خروجی

هر ذره‌ای که مرز محدوده‌ی محاسباتی را ترک کند از محاسبات حذف شده و این مرز خروجی در نظر گرفته می‌شود.

6- الگوریتم حل پیشنهادی

منقطع‌سازی زمان و الگوریتم حل پیشنهادی در شکل 1 نشان داده شده است.

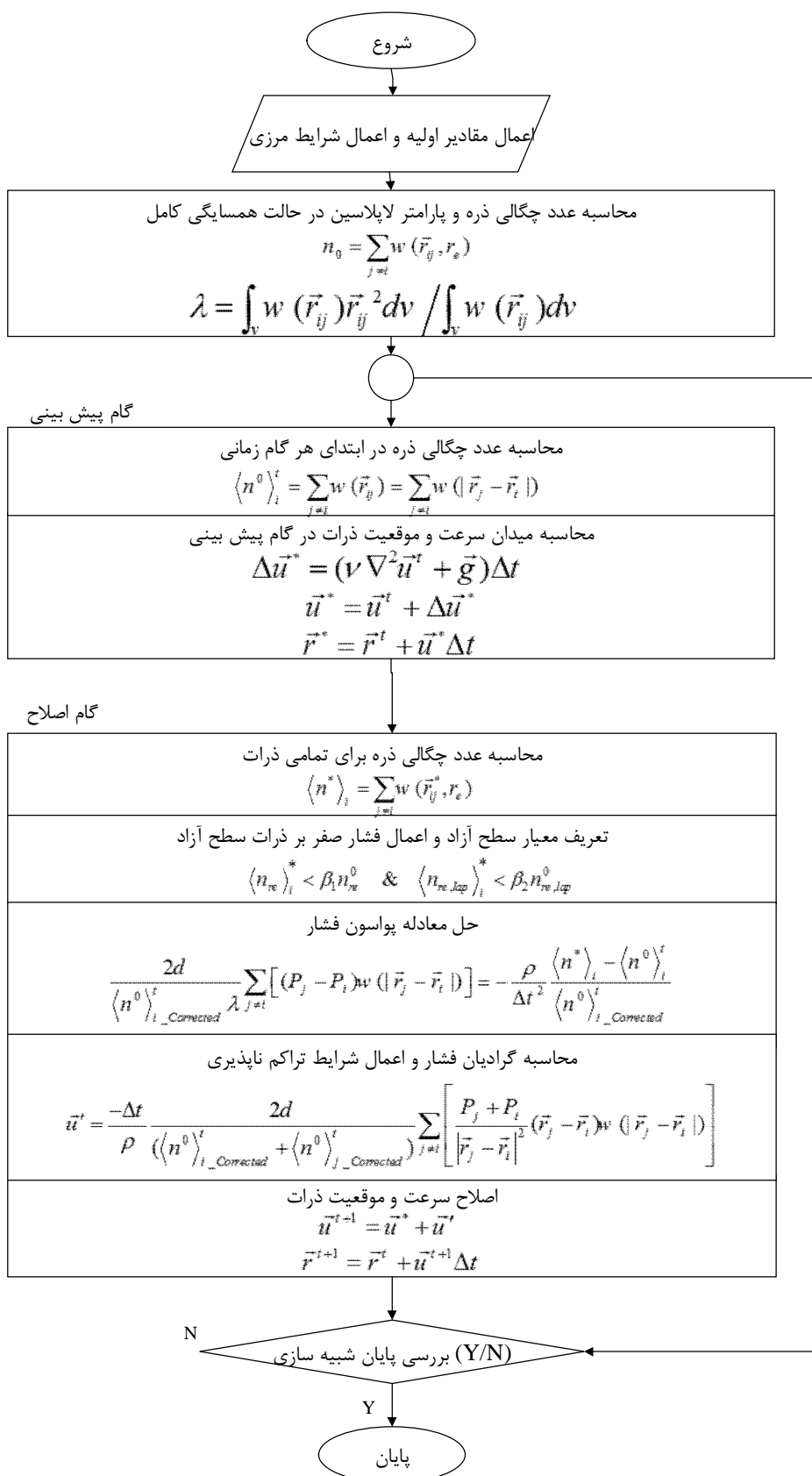
7- کاربردهای مدل در مسایل سطح آزاد و

مدل‌های عددی

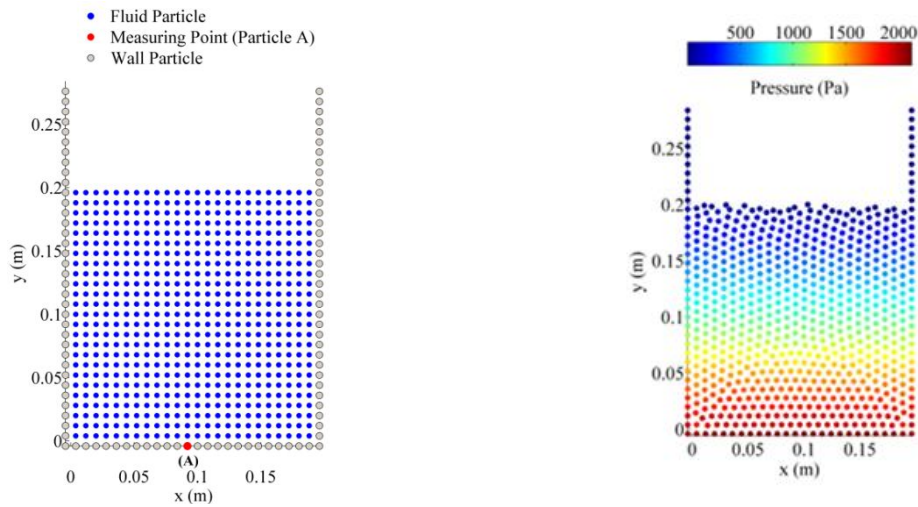
1-7- فشار هیدرواستاتیک

هر چند مسئله فشار هیدرواستاتیک مسئله‌ای ساده است، اما به روشنی قابلیت محاسبه فشار عددی روش پیشنهادی را نشان می‌دهد. شکل 2 هندسه مسئله و میدان فشار محاسباتی را در زمان 2s می‌دهد.

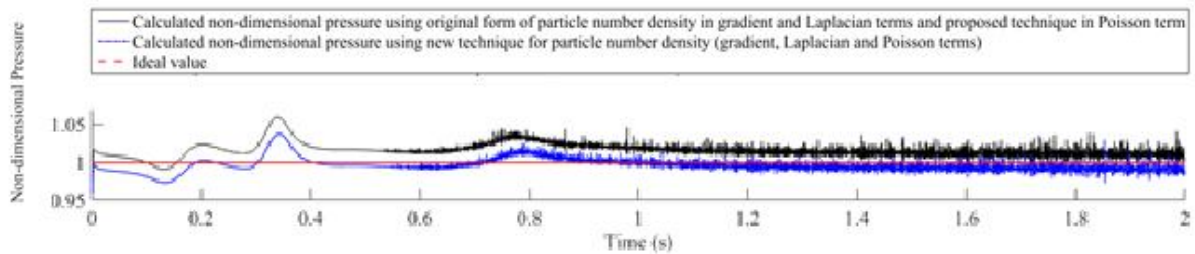
همچنین تاریخچه زمانی فشار در نقطه میانی بستر (نقطه



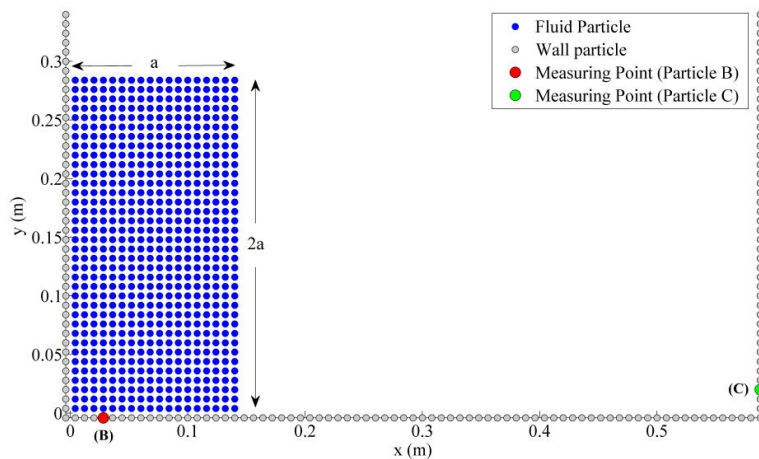
شکل 1 الگوریتم حل روش پیشنهادی



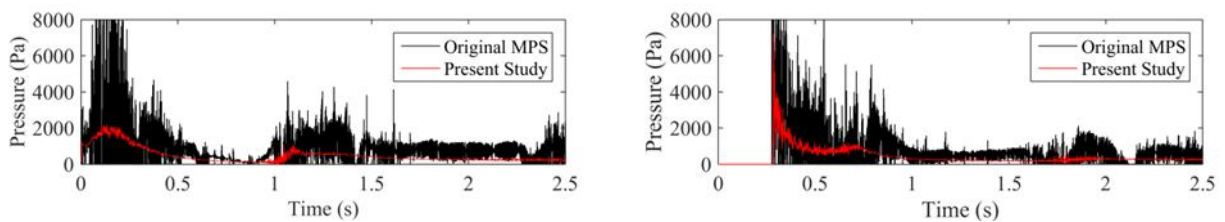
شکل 2 هندسه مسئله و میدان فشار محاسباتی $t = 2s$



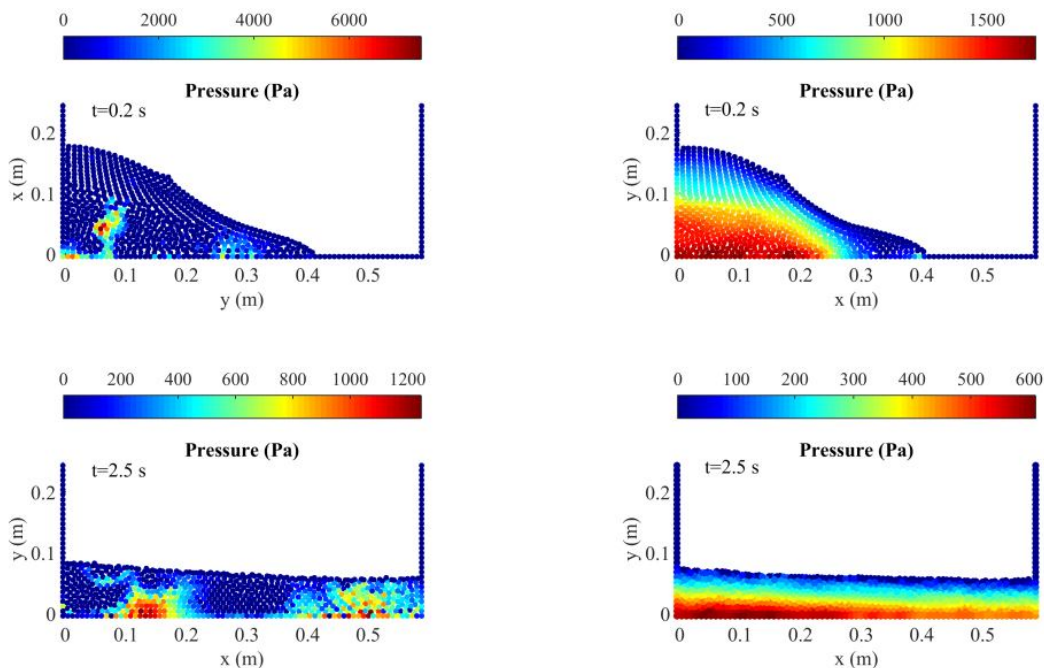
شکل 3 تاریخچه زمانی فشار نقطه A در شکل 2



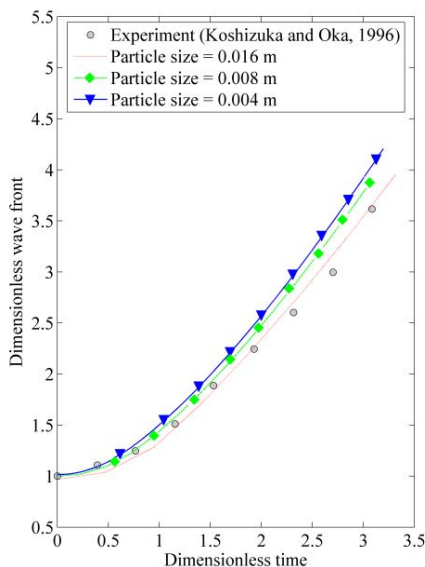
شکل 4 هندسه اولیه مسئله شکست سد



شکل 5 تاریخچه زمان فشار در نقاط B (سمت چپ) و C (سمت راست) نشان داده شده در شکل 4



شکل 6 مقایسه توزیع فشار عددی با استفاده از روش پیشنهادی (سمت راست) و روش اصلی MPS (سمت چپ)



شکل 7 مقایسه نتایج عددی جبهه پیش‌رونده برای مسئله شکست سد با اندازه ذرات مختلف و مقادیر آزمایشگاهی

در این مطالعه سرعت ورودی $0/1025 \text{ m/s}$ متناظر با نسبت هد طراحی $1/5$ می‌باشد. در این بررسی توابع کرنل 6- ب برای تراز سطح آب $0/0508 \text{ m}$ نسبت به تاج سرریز در روش MPS انتخاب شده‌اند.

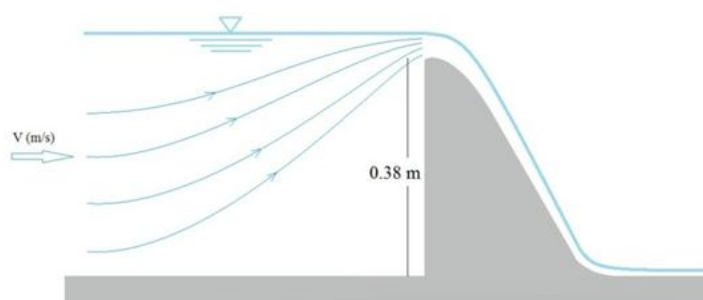
شکل 9 نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی جریان روی سرریز را با استفاده از روش پیشنهادی نشان می‌دهد.

شکل 7 حرکت جبهه‌ی پیش‌رونده ستون آب را که روی بستر افقی جریان دارد (قبل از برخورد جریان به دیواره سمت راست)، نشان می‌دهد. Koshizuka and Oka (1996) در مقاله خود بیان کرده‌اند که در نتایج آزمایشگاهی سرعت جبهه پیش‌رو کمتر از مقادیر محاسباتی است که علت آن اصطکاک بین سیال و بستر می‌باشد.

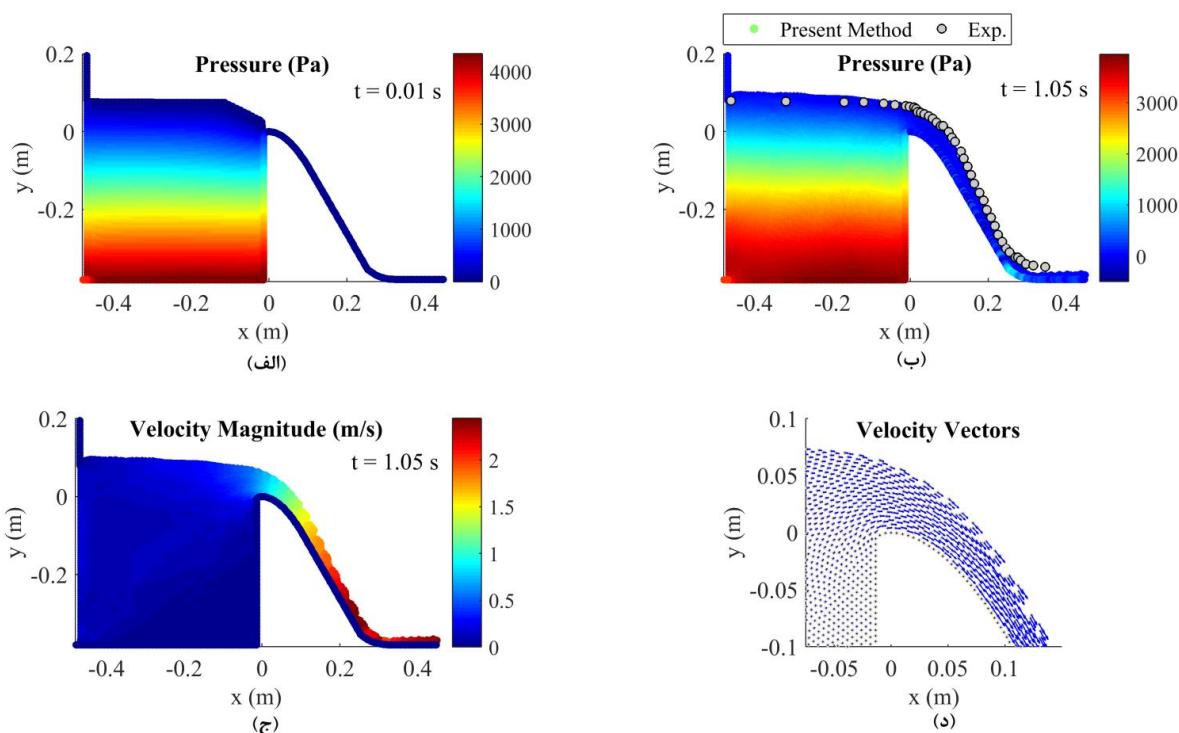
7-3- جریان روی سرریز

در بررسی حاضر از شرایط و داده‌های اندازه‌گیری شده در آزمایش‌های Chatila and Tabbara (2004) برای شبیه‌سازی جریان روی سرریز اوجی استفاده شده است. هندسه تاج سرریز بر اساس پروفیل‌های طراحی هیدرولیکی USACE-WES (USA corps of Eng., 1952) انجام شده است.

دیواره بالادست سرریز قائم بوده و منحنی‌های بالادست بر اساس شعاع‌های $0/2H_d$ و $0/5H_d$ طرح شده‌اند. خط مرکزی پروفیل پایین‌دست تاج از معادله‌ی $x^{1/85} = 2H_d^{0/85} y$ پیروی کرده و هد طراحی برابر $H_d = 0/0508$ متر و زاویه شیب شوت در ناحیه مستقیم سرریز 60° می‌باشد. آزمایش‌ها در شیب بستر صفر انجام شده است. هندسه مدل در شکل 8 نشان داده شده است.



شکل 8 هندسه مدل سرریز اوجی



شکل 9 الف) میدان فشار در ابتدای شبیه‌سازی، ب) میدان فشار در انتهای شبیه‌سازی همراه با مقایسه پروفیل سطح آب عددی و آزمایشگاهی ج) میدان سرعت و د) بردار سرعت جریان روی سرریز

هندسه‌های پیچیده دارای خطوط منحنی می‌باشد. مسئله مذکور توسط Jafari-Nodoushan et al. (2016) با استفاده از روش نیمه‌ضمنی ذرات متحرک تراکم‌پذیر (WC-MPS) و استفاده از ذرات مجازی دیواره شبیه‌سازی شده است و نتایج سطح جریان به دست آمده منطبق بر مقادیر آزمایشگاهی می‌باشد. همچنین اصلاح شرط ورودی جریان در روش توسعه یافته آن‌ها، موج‌های فشار تولید شده در روش معمول MPS را بهبود داده است.

در زمان $t=0/01s$ ، فشار بیشینه منطبق با فشار هیدرو استاتیک بوده که نشان از دقت محاسبه فشار روش پیشنهادی می‌باشد. همچنین پس از جاری شدن جریان روی سرریز، سطح جریان منطبق بر مقادیر آزمایشگاهی بوده و بردارهای سرعت نشان داده شده، عدم نفوذ ذرات سیال در شرط مرزی صلب پیشنهادی (دیوار تک‌لایه) را نشان می‌دهد که مبین صحت روش بکار برده شده و قابلیت شرط مرزی پیشنهادی در مدل‌سازی مسایل با

8- نتیجه گیری

t	زمان
\bar{u}	سرعت ذره
\bar{u}'	مقدار اصلاح سرعت
$w(\bar{r})$	تابع کرنل
β	پارامتر سطح آزاد
ϕ_i	پارامتر جایگزین (سرعت، فشار و ...) ذره i
λ	پارامتر مدل لاپلاس
ν	لزجت سینماتیک سیال، ضریب انتشار
ρ	چگالی ذره سیال

شبیه‌سازی‌های عددی در کنار مدل‌سازی‌های فیزیکی راهکاری مناسب برای پیش‌بینی و تحلیل رفتار جریان می‌باشند. روش MPS در شکل اصلی خود دچار ضعف در محاسبه عددی فشار بوده و فشار محاسبه شده بدون در نظر گرفتن هیچ‌گونه اصلاحی در روش مذکور، همراه با نوسانات شدید فشار و ناپایداری عددی ناشی از انفجارهای عددی¹ می‌باشد (Koshizuka and Oka, 1996). در بررسی حاضر، روشی برای اصلاح نوسانات عددی فشار روش نیمه‌ضمنی ذرات متحرک تراکم‌ناپذیر ارائه شد که علاوه بر تولید میدان‌های فشار هموار و امکان استفاده از یک لایه دیوار با حذف ذرات مجازی/ ساختگی، امکان تعریف هندسه‌های با مرزهای منحنی را در روش MPS بیش از پیش فراهم می‌کند. استفاده از دو معیار تعیین ذرات سطح آزاد، پارامتر β ، برای ذرات دیوار و ذرات سیال به طور جداگانه در حفظ همواری فشار بسیار مؤثر است. این موضوع با شبیه‌سازی عددی مسایل مختلف جریان سطح آزاد بررسی شده و نتایج آن با مقادیر تئوری و آزمایشگاهی موجود مقایسه شده است. همچنین کاربرد شرط مرزی ورودی معرفی شده، مانع از ایجاد پالس‌های فشار ناشی از ورود ذرات شده است. مقایسه نتایج نشان دهنده‌ی دقت مدل و توانایی روش پیشنهادی در شبیه‌سازی و پیش‌بینی جریان‌های سطح آزاد می‌باشد.

9- فهرست علائم

Adami, S., X. Y. Hu, and N. A. Adams. (2012) "A generalized wall boundary condition for smoothed particle hydrodynamics". *Journal of Computational Physics* Vol. 231, pp. 7057-7075.

Asai, M., Aly, A.M., Sonoda, Y. and Sakai, Y. (2012). "A stabilized incompressible SPH method by relaxing the density invariance condition". *Journal of Applied Mathematics*, Article ID 139583, p. 24.

Ataie-Ashtiani, B. and Farhadi, L. (2006), "A stable moving-particle semi-implicit method for free surface flows", *Journal of Fluid Dynamics Research*, Vol. 38, pp. 241-256.

Ataie-Ashtani, B., Shobeyri, G. and Farhadi, L. (2008). "Modified incompressible SPH method for simulating free surface problems". *Journal of Fluid Dynamics Research*, Vol. 40, pp. 637-661.

Barker, Daniel J., Pablo Brito-Parada, and Stephen J. Neethling. (2014). Application of B-splines and curved geometries to boundaries in SPH. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* Vol. 76, pp.51-68.

Chanel, P.G. and Doering, J.C. (2007). "An evaluation of computational fluid dynamics for spillway modelling". 16th Australasian Fluid Mechanics Conference, Crown Plaza, Gold Coast.

Chatila J. and Tabbara M. (2004). "Computational modeling of flow over an ogee spillway", *Journal of Computers and Structures*, Vol. 82, 1805-1812.

Duan, R.Q., Koshizuka, S., and Oka, Y. (2003). "Two-dimensional simulation of drop deformation and breakup around the critical Weber number", *Journal of Nuclear Engineering and Design*, Vol. 225, pp. 37-48.

Farhadi, L., and Ataie-Ashtiani, B. (2004), "A fully

d	معرف چند بعدی بودن مسئله
\bar{F}	نیروهای حجمی
m_i	جرم ذره i
n	عدد چگالی ذره
n^0	عدد چگالی ذره (ثابت)
n^*	عدد چگالی ذره در گام پیش‌بینی
n'	مقدار اصلاح عدد چگالی ذره
P	فشار
\vec{r}_i	موقعیت ذره i
r_e	شعاع تأثیر

¹ Numerical Explosion

Coastal, and Ocean Engineering, 125(3): 145-154.

Otsuka, T., Shimizu, Y., Kimura, I, Otsuki, M., and Saito, Y. (2009), "Fundamental studies on applications of MPS method for computing snow avalanches", International Snow Science Workshop, Davos.

Shakibaeinia, A. and Jin, Y.C. (2010). "A weakly compressible MPS method for modeling of open-boundary free-surface flow". International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 63, pp. 1208-1232.

Shao, S. and Lo, E.Y.M. (2003). "Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface". Journal of Advances in Water Resources, Vol. 26, pp. 787-800.

Shibata, K., and Koshizuka, S. (2007) "Numerical analysis of shipping water impact on a deck using a particle method," Journal of Ocean Engineering, Vol. 34, pp. 585-593

Shibata, K., Koshizuka, S., and Oka, Y. (2004), "Numerical analysis of jet breakup behavior using particle method", Journal of Nuclear Science and Technology, Vol. 41, No. 7, pp. 715-722.

Shobeyri, G. and Afshar, M.H. (2012). "Corrected discrete least-squares meshless method for simulating free surface flows". Journal of Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 36, pp. 1581-1594.

Tanaka, T. and Masunaga, T., (010), "Stabilization and smoothing of pressure in MPS method by quasi-compressibility", Journal of Computational Physics, Vol. 229, pp. 4279-4290.

Tavakkol, S., Zarrati, A.R. and Khanpour, M., (2017). "Curvilinear smoothed particle hydrodynamics". International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 83, pp. 115-131.

United States Army Corps of Engineering (USACE). Hydraulic design of spillway, Technical Engineering and Design Guides, No. 12, ASCE, 1995.

Wendland H. (1995). "Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree." Journal of Advances in Computational Mathematics, Vol. 4, pp. 389-396.

mesh-less Lagrangian numerical method for prediction of free water surface", Taylor and Francis Group, Hydraulics of Dams and River Structures, pp. 345-352.

Jafari-Nodoushan, E., Hosseini, K., Shakibaeinia, A. and Mousavi, S.F. (2016). "Meshless particle modeling of free surface flow over spillways". Journal of Hydroinformatics, Vol. 18, No. 2, pp. 354-370.

Khayyer, A. and Gotoh, H. (2009). "Modified moving particle semi-implicit methods for the prediction of 2D wave impact pressure". Journal of Coastal Engineering, Vol. 56, pp. 419-440.

Khayyer, A. and Gotoh, H. (2010). "A higher order Laplacian model for enhancement and stabilization of pressure calculation by the MPS method". Journal of Applied Ocean Research, Vol. 32, pp. 124-131.

Kondo, M. and Koshizuka, S. (2011). "Improvement of stability in moving particle semi-implicit method". International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 65, pp. 638-654.

Koshizuka, S. and Oka, Y. (1996). "Moving-particle semi-implicit method for fragmentation of incompressible fluid". Journal of Nuclear Science and Engineering, Vol. 123, pp. 421-434.

Koshizuka, S., Ikeda, H., and Oka, Y. (1999). "Numerical analysis of fragmentation mechanism in vapor explosions", Journal of Nuclear Engineering and Design, Vol. 189, pp. 423-433.

Lee E.-s, Moulinec C., Xu R., Violeau D., Laurence, D., & Stansby P. (2008). Comparisons of weakly compressible and truly incompressible algorithms for the SPH mesh free particle method. Journal of Computational Physics, Vol. 227, pp. 8417-8436.

Liu, G.R., (2003). "Mesh free methods: moving beyond the finite element method". 2nd Edition, CRC Press, Boca Raton, FL 33487-2742.

Ma, Q.W., "Meshless local Petrove-Galerkin method for two-dimensional nonlinear water wave problems". (2005). Journal of Computational Physics, Vol. 205, pp. 611-625.

Monaghan, J.J. and Kos, A. (1999). "Solitary waves on a certain beach". Journal of Waterway, Port,