

مقایسه روش‌های شبکه بولتزمن و تفاضل محدود در حل هم‌زمان معادلات آب زیرزمینی و انتقال آلودگی

هاتف کشاورزی¹، علی اکبر حکمت زاده^{2*}، ناصر طالب بیدختی³

1- کارشناس ارشد آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی شیراز

2- استادیار دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی شیراز

3- استاد بخش راه و ساختمان، دانشکده مهندسی، دانشگاه شیراز

* hekmatzadeh@sutech.ac.ir

چکیده - روش شبکه بولتزمن یک روش عددی قدرتمند برای شبیه‌سازی جریان سیال است. برای بیان روابط حاکم بر جریان آب زیرزمینی در محیط متخلخل دو رویکرد اصلی وجود دارد. رویکرد اول استفاده از معادله ناویر استوکس و رویکرد دوم استفاده از معادله انتشار برای جریان می‌باشد. در این پژوهش برای جریان آب زیرزمینی از رویکرد دوم استفاده شده است. همچنین معادله حاکم بر انتقال آلودگی در محیط متخلخل، معادله انتقال-پخش می‌باشد. حل هم‌زمان معادلات جریان و انتقال آلودگی به وسیله روش شبکه بولتزمن در این پژوهش برای اولین بار صورت پذیرفت. همچنین از روش تفاضل محدود صریح و کرنک نیکلسون برای مقایسه با روش شبکه بولتزمن استفاده شد. نتایج این پژوهش نشان داد که روش شبکه بولتزمن قادر به حل هم‌زمان معادله آب زیرزمینی و انتقال آلودگی با دقت بالایی است، به طوری که دقت آن با روش کرنک نیکلسون برابر می‌باشد، اما سرعت اجرای آن بسیار بیشتر از روش کرنک نیکلسون است. در ضمن در مقایسه با روش تفاضل محدود صریح، روش شبکه بولتزمن در حل معادلات فوق دارای محدوده پایداری و سازگاری بزرگتری می‌باشد. در این رابطه عدد پکلت شبکه کوچکتر از 7 برای روش شبکه بولتزمن D1Q2 پیشنهاد می‌شود.

کلید واژگان: روش شبکه بولتزمن، روش کرنک نیکلسون، معادله انتشار، معادله انتقال-پخش، آب زیرزمینی.

1- مقدمه

روش شبکه بولتزمن (LBM)¹ یک روش جدید در شبیه سازی و حل معادلات حاکم بر جریان‌های مختلف سیال می‌باشد. این روش که از سال 1988 گسترش پیدا کرده، مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. روش شبکه بولتزمن مسائل را در مقیاس مزوسکوپیک بررسی می‌کند که بین مقیاس ماکروسکوپیک و میکروسکوپیک قرار دارد. در مقیاس مزوسکوپیک به جای یک مولکول و یا یک ذره منفرد، رفتار مجموعه‌ای از مولکول‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد که باعث کاهش حجم محاسبات

می‌گردد (Mohamad, 2011). به طور کلی روابط حاکم بر جریان آب زیرزمینی در محیط متخلخل با دو رویکرد قابل استخراج می‌باشند. در رویکرد اول از معادلات ناویر استوکس² برای مدل‌سازی جریان در محیط متخلخل استفاده می‌گردد (Chen and Doolen, 1998; Grucelski and Pozorski, 2012; Guo and Zhao, 2002; Anwar and Sukop, 2009a; Gao et al., 2014; Guo and Zhao, 2005; Rong et al., 2010). در رویکرد دوم با کمک رابطه داری و رابطه بقای جرم، معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی بدست می‌آید که شبیه معادله انتشار³ می‌باشد (Budinski et al., 2015; Zhou, 2007b; Zhou, 2007a;

² Navier-Stokes

³ Diffusion

¹ Lattice Boltzmann Method

جابجایی-پخش از زمان آسایش دوگانه⁶ استفاده گردید. نتایج این پژوهش نشان داد که روش شبکه بولتزمن قادر به حل معادلات جریان و جابجایی-پخش در توپوگرافی پیچیده می‌باشد و از دقت مناسبی برخوردار است.

Liu et al. (2013) مسئله انتقال نمک در آب‌های سطحی را بررسی کردند. برای ارزیابی روش شبکه بولتزمن 3 مسئله مختلف حل گردید و نتایج آن‌ها نشان داد که روش شبکه بولتزمن قادر به تخمین دقیق مقدار نمک در آب‌های کم عمق و نواحی دارای تغییرات زیاد غلظت می‌باشد.

Liu et al. (2014) مسئله انتقال حرارت را در محیط متخلخل بررسی نمودند. در این پژوهش برای جریان از معادله نایر استوکس و برای انتقال حرارت از معادله جابجایی-پخش استفاده شد و برای هر دو معادله از زمان آسایش چندگانه استفاده شد. همچنین مشاهده شد که در مقایسه با حل تحلیلی، استفاده از زمان آسایش چندگانه دقت بیشتری نسبت به زمان آسایش یگانه نشان می‌دهد. Seta et al. (2006) مسئله هم‌زمان انتقال حرارت در محیط متخلخل را بررسی نمودند و کارایی و قابلیت روش شبکه بولتزمن را با وجود تداخل ارزیابی نمودند. در این پژوهش اثر محیط متخلخل با اضافه کردن تداخل به تابع توزیع تعادل در نظر گرفته شد و از مقدار تداخل‌های گوناگون استفاده گردید. مقایسه با کارهای پیشین نشان می‌دهد که مدل معرفی شده در این پژوهش در اعداد داری گوناگون نتایج مناسبی ارائه می‌دهد.

در برخی از نرم‌افزارهای مهندسی ابتدا معادله آب زیرزمینی تحلیل می‌گردد و سپس با ذخیره کردن اطلاعات مربوط به سرعت، معادله جابجایی-پخش حل می‌شود که زمان اجرا طولانی می‌گردد و حافظه زیادی اشغال می‌گردد؛ بنابراین لازم است که حل هم‌زمان معادلات بررسی شود. تاکنون در رابطه با حل هم‌زمان معادله آب زیرزمینی و انتقال آلودگی به روش شبکه بولتزمن در حالی که از معادله انتشار برای آب زیرزمینی استفاده شده باشد، پژوهشی انجام نگرفته است. همچنین ارزیابی محدودی در زمینه مقایسه سرعت و دقت روش

Anwar and Sukop, 2009b). تاکنون بیشتر پژوهش‌های انجام گرفته به‌وسیله روش شبکه بولتزمن در رابطه با جریان آب زیرزمینی، با رویکرد استفاده از معادله نایر استوکس در اعداد ماخ پایین بوده است و با رویکرد دوم پژوهش‌های کمی انجام شده است.

در مورد معادله جابجایی-پخش¹ نیز پژوهش‌هایی انجام گرفته است. Zhou (2009) معادله جابجایی-پخش را برای مسئله انتقال مواد محلول با روش شبکه بولتزمن حل نمود. او در این پژوهش با انتخاب تابع توزیع تعادل $(f^{eq})^2$ مناسب توانست الگوی شبکه‌بندی مستطیلی را به جای الگوی مربعی به کار ببرد. الگوی شبکه‌بندی مستطیلی برای مسائلی که فرایندی در یک جهت نسبت به جهت دیگر غالب است، مناسب‌تر از الگوی مربعی می‌باشد. تابع توزیع تعادل معرفی شده در این پژوهش را می‌توان برای الگوی مربعی نیز استفاده نمود. مدل معرفی شده در چند مسئله مختلف مورد ارزیابی قرار گرفت و با حل تحلیلی مقایسه شد که نشان از دقت مناسب این مدل داشت. Bin et al. (2005) از یک مدل شبکه بولتزمن با زمان آسایش یگانه³ برای حل معادله جابجایی-پخش با وجود ترم منبع استفاده نمودند. در این پژوهش ترم منبع به معادله اصلی شبکه بولتزمن اضافه شد و در تابع توزیع تعادل تغییری ایجاد نشد، نتایج این پژوهش بیانگر دقت بالای این مدل در مقایسه با حل تحلیلی می‌باشد.

Li et al. (2013) معادله جابجایی-پخش را در مختصات استوانه‌ای و با زمان آسایش چندگانه (MRT)⁴ بررسی نمودند. این معادله در مختصات استوانه‌ای تبدیل به معادله جابجایی-پخش در مختصات کارتزین و چند ترم اضافی می‌شود که با این ترم‌های اضافی مانند ترم منبع⁵ برخورد شده و به معادله شبکه بولتزمن اضافه می‌شوند. همچنین در این پژوهش از الگوی شبکه‌بندی D2Q5 استفاده گردید.

Li and Huang (2008) حل هم‌زمان معادله آب‌های سطحی و معادله جابجایی-پخش را بررسی کردند. برای معادله آب سطحی از زمان آسایش چندگانه و برای معادله

¹ Advection-Dispersion equation

² Equilibrium Distribution Function

³ Single Relaxation Time

⁴ Multiple Relaxation Time

⁵ Source Term

⁶ Two Relaxation Time

در این رابطه C بیانگر غلظت آلودگی، u سرعت جریان، D ضریب پخش هیدرودینامیکی آلودگی در محیط متخلخل و F ترم منبع یا نشت آلودگی می‌باشد. ضریب پخش در محیط متخلخل نسبت به طول و زمان متغیر است و می‌توان آنرا به صورت رابطه (4) بیان کرد (Zheng and Bennett, 2002).

$$D = \alpha_L u + D^* \quad (4)$$

در اینجا α_L ضریب پخش طولی و D^* ضریب پخش مولکولی مؤثر است که معمولاً عدد بسیار کوچکی است. معادله شبکه بولتزن با وجود ترم منبع و با تقریب BGK² به صورت رابطه (5) می‌باشد (Mohamad and Kuzmin, 2012).

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(x, t) + \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(x, t) - f_i(x, t)] + w_i \Delta t \times F \quad (5)$$

که در آن f تابع توزیع است که ویژگی مجموعه‌ای از ذرات را بیان می‌کند، اندیس i در f_i نشان دهنده جهت حرکت ذره مورد نظر است، f^{eq} تابع توزیع در حالت تعادل، τ زمان آسایش³، w ضریب وزن ذرات، Δt گام زمانی، Δx گام مکانی و c سرعت ذرات می‌باشد و از رابطه (6) بدست می‌آید.

$$c = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (6)$$

روند حل معادله شبکه بولتزن در دو مرحله صورت می‌گیرد، مرحله برخورد⁴ و مرحله جاری شدن⁵. در مرحله برخورد، توابع توزیع (ذرات) با یکدیگر برخورد کرده و مقدار آن‌ها تغییر می‌کند (رابطه 7).

$$f_i'(x, t + \Delta t) = f_i(x, t) + \frac{1}{\tau} [f_i^{eq}(x, t) - f_i(x, t)] \quad (7)$$

در مرحله جاری شدن، مطابق رابطه (8) توابع توزیع جدید از هر نقطه به نقطه مجاور منتقل می‌شوند.

$$f_i(x + c_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i'(x, t + \Delta t) \quad (8)$$

با انتخاب تابع توزیع تعادل و زمان آسایش مناسب می‌توان معادله بولتزن را متناظر با معادلات حاکم بر مسئله در نظر گرفت. برای معادله آب زیرزمینی (معادله انتشار) تابع توزیع تعادل به صورت رابطه (9) بدست می‌آید

شبکه بولتزن با روش‌های عددی مانند روش تفاضل محدود صورت پذیرفته است. در این مقاله دقت و سرعت روش شبکه بولتزن در حل معادلات انتشار و جابجایی-پخش با روش‌های تفاضل محدود صریح و کرنک نیکلسون¹ مقایسه می‌گردد. همچنین یکی از مشکلات روش‌های عددی مسئله سازگاری نتایج می‌باشد و تاکنون در مورد سازگاری روش شبکه بولتزن پژوهش‌های کمی صورت پذیرفته است که در این مقاله برای الگوی DIQ2 یک محدوده سازگاری معرفی می‌شود. در پایان دو الگوی DIQ2 و DIQ3 در روش شبکه بولتزن با یکدیگر مقایسه می‌شوند.

2- تئوری

در جریان آب زیرزمینی با پدید آمدن اختلاف ارتفاع در نقاط گوناگون محیط، جریان آب از نقاط با انرژی بیشتر به سمت نقاط با انرژی کمتر حرکت می‌کند. معادله حاکم بر جریان آب زیرزمینی در آبخوان محصور با کمک رابطه داری و رابطه بقای جرم، به صورت رابطه (1) بدست می‌آید (Wang and Anderson, 1982).

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{T}{S} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \quad (1)$$

که T ضریب انتقال و S ضریب ذخیره آب در محیط متخلخل می‌باشد. همچنین h هد آب، t زمان و x معرف طول است. بر اساس قانون داری سرعت جریان توسط رابطه (2) محاسبه می‌گردد (Zheng and Bennett, 2002).

$$V = -K \frac{dh}{dl} \quad (2)$$

که در آن $\frac{dh}{dl}$ گرادیان هیدرولیکی و K ضریب هدایت هیدرولیکی است.

در جریان آب‌های زیرزمینی، هم‌زمان با حرکت آب در خاک، آلودگی نیز به‌وسیله جریان آب منتقل شده و در محیط خاک انتشار می‌یابد. رابطه حاکم بر انتقال آلودگی در محیط متخلخل، معادله جابجایی-پخش می‌باشد. این معادله به صورت رابطه (3) نشان داده می‌شود (مشهدگره و همکاران 1392؛ Perko and Patel, 2014).

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial(uC)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} \right) + F \quad (3)$$

¹ Crank-Nicolson

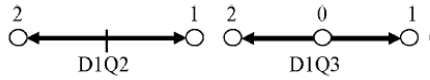
² Bhatnagar, Gross and Krook

³ Relaxation Time

⁴ Collision

⁵ Streaming

شبکه اضافه می‌شود. این دو الگو در شکل 1 نشان داده شده‌اند (Graille, 2014).



شکل 1 الگوهای شبکه‌بندی D1Q3 و D1Q2 (Mohamad, 2011)

ضرایب وزن برای این دو الگو به صورت روابط (15) می‌باشد (Mohamad, 2011):

$$D1Q2 \begin{cases} w_1 = \frac{1}{2} \\ w_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad D1Q3 \begin{cases} w_0 = \frac{4}{6} \\ w_1 = \frac{1}{6} \\ w_2 = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (15)$$

کمیت‌های مورد نیاز در معادله حاکم (مانند هد آب) در هر نقطه محیط را می‌توان از مجموع توابع توزیع در آن نقطه مطابق رابطه (16) بدست آورد.

$$h = \sum f_i \quad (16)$$

از روش تفاضل محدود در دو حالت صریح و کرنک نیکلسون برای مقایسه با روش شبکه بولتزمن استفاده شد. گسسته‌سازی معادلات آب زیرزمینی و انتقال آلودگی با الگوی تفاضل مرکزی² به ترتیب مطابق روابط (17) و (18) می‌باشد.

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = \frac{T}{S} \left[\omega \frac{h_{i+1}^{n+1} - 2h_i^{n+1} + h_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + (1-\omega) \frac{h_{i+1}^n - 2h_i^n + h_{i-1}^n}{(\Delta x)^2} \right] \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{C_j^{n+1} - C_j^n}{\Delta t} = & (1-\omega) \left[\frac{[(D_j^n + D_{j+1}^n)(C_{j+1}^n - C_j^n)] - [(D_{j-1}^n + D_j^n)(C_j^n - C_{j-1}^n)]}{2\Delta x^2} \right. \\ & \left. - \frac{[(u_j^n + u_{j+1}^n)(C_j^n + C_{j+1}^n)] - [(u_{j-1}^n + u_j^n)(C_{j-1}^n - C_j^n)]}{4\Delta x} \right] \\ & + (\omega) \left[\frac{[(D_j^{n+1} + D_{j+1}^{n+1})(C_{j+1}^{n+1} - C_j^{n+1})] - [(D_{j-1}^{n+1} + D_j^{n+1})(C_j^{n+1} - C_{j-1}^{n+1})]}{2\Delta x^2} \right. \\ & \left. - \frac{[(u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1})(C_j^{n+1} + C_{j+1}^{n+1})] - [(u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1})(C_{j-1}^{n+1} - C_j^{n+1})]}{4\Delta x} \right] + F_j \quad (18) \end{aligned}$$

(Mohamad, 2011).

$$f_i^{eq} = w_i h \quad (9)$$

برای معادله انتقال آلودگی (معادله جابجایی-پخش) نیز تابع توزیع تعادل به صورت رابطه (10) معرفی می‌شود (Perko and Patel, 2014).

$$f_i^{eq} = w_i C \left[1 + \frac{uc_i}{c_s^2} \right] \quad (10)$$

در اینجا c_s سرعت صوت است و مقدار آن به نوع الگوی شبکه‌بندی وابسته می‌باشد. برای الگوهای D1Q2 و D1Q3 سرعت صوت به ترتیب مطابق روابط (11) و (12) می‌باشد (Mohamad et al., 2015).

$$c_s = c \quad (11)$$

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3}} \quad (12)$$

زمان آسایش بیانگر نرخ حرکت مجموعه به سمت وضعیت تعادل می‌باشد که می‌توان آنرا برای هر معادله با استفاده از بسط چند مییاسی چاپمن-انسکاگ¹ بدست آورد. بدین منظور با مقیاس‌دهی به مکان و زمان و همچنین بسط دادن تابع توزیع f ، معادله شبکه بولتزمن به معادله مورد نظر تبدیل می‌شود و در انتهای این فرایند مقدار زمان آسایش بر اساس پارامترهای معادله حاکم (مانند لزجت در معادله ناویراستوکس و ضریب پخش در معادله جابجایی-پخش) بدست می‌آید. مقدار زمان آسایش برای معادله آب زیرزمینی بر اساس رابطه (13) بدست می‌آید (Mohamad, 2011).

$$\tau = \frac{T}{S} \times \frac{1}{\Delta t c_s^2} + \frac{1}{2} \quad (13)$$

لازم به یادآوری است که T ضریب انتقال و S ضریب ذخیره می‌باشد. زمان آسایش برای معادله جابجایی-پخش نیز بر اساس رابطه (14) محاسبه می‌گردد (Perko and Patel, 2014).

$$\tau = \frac{D}{\Delta t c_s^2} + \frac{1}{2} \quad (14)$$

ساده‌ترین و رایج‌ترین الگوی شبکه‌بندی برای مسائل یک بعدی الگوی D1Q2 می‌باشد که دارای دو تابع توزیع در دو جهت است. همچنین الگوی D1Q3 نیز از الگوهای رایج است که در آن یک تابع توزیع با سرعت صفر به مرکز

² Central

¹ Chapman-Enskog expansion

در نقطه ابتدایی محیط، تابع توزیع f_2 از مرحله جاری شدن⁴ بدست می‌آید و مقداری معلوم دارد، ولی مقدار f_1 در این مرز مجهول است و مطابق رابطه (25) بدست می‌آید.

$$f_1 = (w_1 + w_2) \times C - f_2 \quad (25)$$

اگر در مرز انتهایی محیط (نقطه m) شرط مرزی نیومن برقرار باشد، با کمک روش تفاضل محدود رابطه (26) بدست می‌آید.

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0 \rightarrow \frac{C(m) - C(m-1)}{\Delta x} = 0 \rightarrow C(m) = C(m-1) \quad (26)$$

با کمک معادله (16)، رابطه (27) بدست می‌آید.

$$\begin{cases} C(m) = f_1(m) + f_2(m) \\ C(m-1) = f_1(m-1) + f_2(m-1) \end{cases} \quad (27)$$

از ترکیب روابط (26) و (27)، رابطه (28) حاصل می‌شود.

$$f_1(m) + f_2(m) = f_1(m-1) + f_2(m-1) \quad (28)$$

در نهایت برای هر یک از توابع توزیع رابطه (29) بدست می‌آید.

$$\begin{cases} f_1(m) = f_1(m-1) \\ f_2(m) = f_2(m-1) \end{cases} \quad (29)$$

برای بررسی دقت روش‌های عددی شبکه بولتزمن و تفاضل محدود، از روش آماری جذر میانگین مربعات خطا⁵ استفاده شد. در این معیار هرچه مقدار RMSE بدست آمده از رابطه (30) کمتر باشد، به معنای دقت بیشتر روش عددی مورد نظر است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum (r_i - x_i)^2}{n}} \quad (30)$$

در این رابطه، r مقدار بدست آمده توسط روش عددی، x مقدار بدست آمده توسط حل تحلیلی و n تعداد داده‌های مورد نظر می‌باشد (نصرتی و همکاران، 1386).

3- نتایج

در این مقاله 4 مسئله متفاوت مورد حل و بررسی قرار می‌گیرند. هندسه و شرایط مرزی هر یک از این 4 مسئله در ادامه توضیح داده می‌شود. در دو مسئله اول از حل تحلیلی نیز استفاده شده است، اما برای دو مسئله 3 و 4 حل تحلیلی وجود ندارد.

در این روابط اگر w برابر صفر شود، معادلات به صورت کاملاً صریح درمی‌آیند، اگر w برابر 1 شود، این معادلات کاملاً غیر صریح می‌شوند و اگر مقدار w برابر 0/5 باشد، روش کرنک نیکلسون حاصل می‌گردد. لازم به ذکر است که در روش تفاضل محدود صریح، مقدار گام زمانی بایستی از حد معینی کوچکتر باشد تا پایداری حفظ شود. این محدوده برای معادله انتشار و معادله جابجایی-پخش به ترتیب از روابط (19) و (20) بدست می‌آید (Zheng and Bennett, 2002).

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2 S}{2T} \quad (19)$$

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2D + u\Delta x} \quad (20)$$

عدد پکلت (Pe)¹ اهمیت نسبی فرایند جابجایی نسبت به پخش را بیان می‌کند (رابطه 21) (Charbeneau Randall, 2000). در معادله جابجایی-پخش هر چه مقدار عدد پکلت بزرگتر باشد، فرایند جابجایی نسبت به پخش برتری پیدا می‌کند.

$$Pe = \frac{u \cdot L}{D} \quad (21)$$

L در اینجا طول محیط است.

نحوه اعمال شرایط مرزی از نوع دیریکله² و نیومن³ در معادله انتقال آلودگی برای الگوی DIQ2 توضیح داده می‌شود. به طور مثال اگر در نقطه ابتدایی محیط ($x=0$)، شرط مرزی دیریکله برقرار باشد، مطابق اصل بقای جرم رابطه (22) بدست می‌آید.

$$f_1^{eq} - f_1 + f_2^{eq} - f_2 = 0 \quad (22)$$

توابع توزیع برای معادله جابجایی-پخش مطابق روابط 23 می‌باشند.

$$\begin{cases} f_1^{eq} = w_1 \times C [1 + \frac{uc}{c_s^2}] \\ f_2^{eq} = w_2 \times C [1 - \frac{uc}{c_s^2}] \end{cases} \quad (23)$$

با جایگذاری روابط (23) در رابطه (22)، رابطه (24) بدست می‌آید:

$$(w_1 + w_2) \times C - f_1 - f_2 = 0 \quad (24)$$

⁴ Streaming

⁵ RMSE

¹ Peclet Number

² Dirichlet

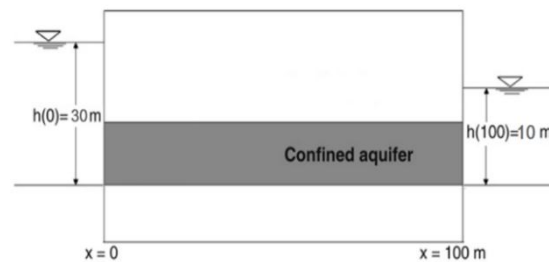
³ Neumann

3-1- مسئله 1

در این مسئله معادله آب زیرزمینی به تنهایی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در یک آبخوان محصور ابتدا هد آب در تمام نقاط محیط یکسان و برابر 30 متر است. در انتهای آبخوان، هد آب به صورت ناگهانی دچار افت می‌شود و به مقدار 10 متر می‌رسد (شکل 2). به تدریج و با گذشت زمان، هد آب در سایر نقاط محیط نیز کاهش پیدا می‌کند و اختلاف هد به وجود آمده در این آبخوان باعث حرکت آب از نقاط با هد بیشتر به سمت نقاط با هد کمتر می‌شود. شرایط مرزی و اولیه برای این مسئله در رابطه (31) بیان شده است.

$$\begin{cases} H(x,0) = 30 \text{ m} \\ H(0,t) = 30 \text{ m} \quad t \geq 0 \\ H(L,t) = 10 \text{ m} \quad t > 0 \end{cases} \quad (31)$$

طول این آبخوان برابر 100 متر، عرض آن 10 متر، ضریب هدایت هیدرولیکی 0/002 متر بر دقیقه و ضریب ذخیره 0/006 در نظر گرفته شد. در این مسئله روش شبکه بولتزنم با دو الگوی D1Q2 و D1Q3 و روش تفاضل محدود صریح و کرنک نیکلسون با حل تحلیلی مقایسه می‌شوند. حل تحلیلی این مسئله در (Zhou (2007a) معرفی شده است.

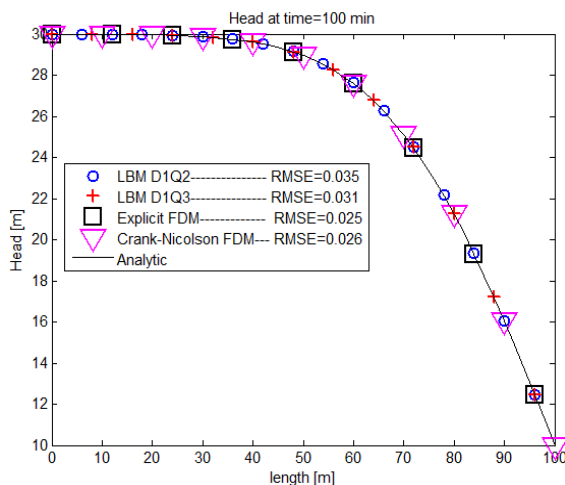


شکل 2 هد آب در ابتدا و انتهای آبخوان

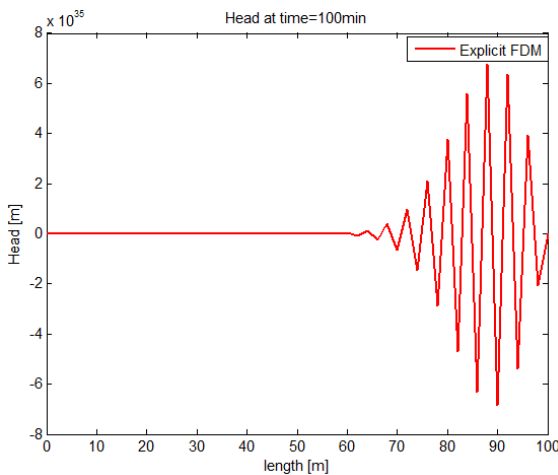
پیداست روش تفاضل محدود صریح دچار ناپایداری شد، اما روش‌های شبکه بولتزنم با هر دو الگوی D1Q2 و D1Q3 همچنان پایدار می‌مانند و منطبق بر حل تحلیلی می‌باشند (شکل 3).

نتایج بدست آمده نشان می‌دهد که روش شبکه بولتزنم دقتی مناسب و نزدیک به روش تفاضل محدود صریح و کرنک نیکلسون دارد. همچنین از نظر پایداری مشاهده شد که روش شبکه بولتزنم محدوده پایداری بیشتری نسبت به روش تفاضل محدود صریح دارد.

این موضوع بیانگر برتری روش شبکه بولتزنم بر روش تفاضل محدود صریح از نظر پایداری است. شکل‌های 3 تا 5 تغییرات هد آب نسبت به طول محیط در در زمان 100 دقیقه پس از افت ناگهانی را نشان می‌دهند.



شکل 3 تغییرات هد آب نسبت به طول محیط



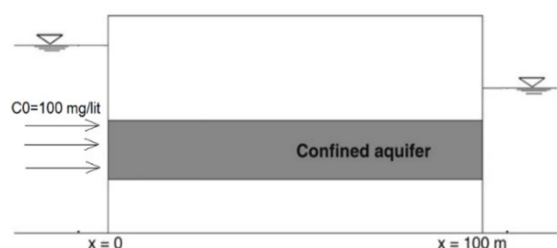
شکل 4 نمودار تغییرات هد آب نسبت به طول محیط برای روش تفاضل محدود صریح

نتایج بدست آمده از این مسئله در شکل‌های 3 تا 5 نشان داده شده است. در این مسئله، ابتدا مقادیر گام زمانی (Δt) و گام مکانی (Δx) به ترتیب 0/5 دقیقه و 2 متر انتخاب شدند که همه روش‌ها جواب‌های مناسبی داشتند و نتایج آن‌ها در شکل 3 نشان داده شده است. مقایسه مقادیر RMSE نیز بیانگر دقت مناسب روش شبکه بولتزنم با روش‌های تفاضل محدود می‌باشد. به منظور بررسی پایداری، گام زمانی افزایش داده شد و مقدار آن 2 دقیقه انتخاب شد. با افزایش گام زمانی، همان‌گونه که از شکل 4

D1Q2 و D1Q3، روش تفاضل محدود صریح و کرنک نیکلسون با حل تحلیلی معرفی شده در Charbeneau (Randall, 2000) مورد مقایسه قرار می‌گیرند.

جدول 1 مشخصات مدل‌های ارائه شده

ضریب پخش D (m ² /min)	گام مکانی Δx (m)	گام زمانی Δt (min)	عدد پکلت	مدل
0/05	1	1	100	مدل 1
0/0005	1	1	10000	مدل 2
0/05	1	11	100	مدل 3

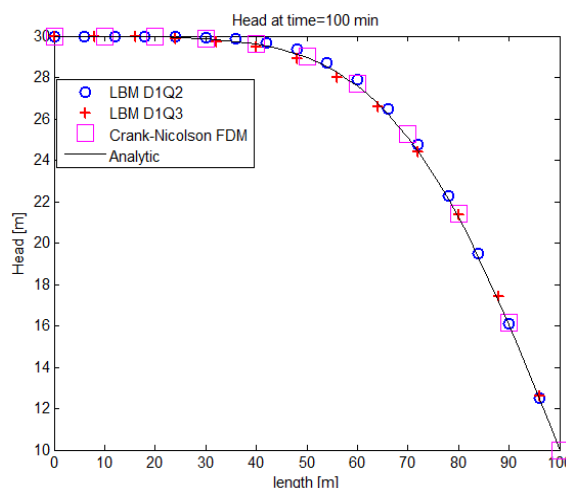


شکل 6 ورود آلودگی به آبخوان

نتایج 3 مدل معرفی شده به ترتیب در شکل‌های 7 تا 9 نشان داده شده است. تغییرات غلظت آلودگی نسبت به زمان برای مدل شماره 1 در شکل 7 نشان داده شده است. در این مدل هر دو فرایند جابجایی و پخش سهیم می‌باشند و همان‌طور که مشاهده می‌شود حل‌های عددی شبکه بولتزنم و تفاضل محدود صریح و کرنک نیکلسون بر حل تحلیلی منطبق می‌باشند. مقایسه مقادیر RMSE نیز نشان می‌دهد که روش شبکه بولتزنم از دقت مناسبی برخوردار می‌باشد.

برای مدل شماره 2 که فرایند جابجایی نسبت به پخش غالب می‌باشد، نمودار تغییرات غلظت نسبت به زمان در شکل 8 نشان داده شده است.

مشاهده می‌گردد که حل حاصل از روش کرنک نیکلسون و شبکه بولتزنم D1Q2 بر یکدیگر منطبق می‌باشند و از مقادیر RMSE نیز مشخص است که این دو روش دارای دقت یکسان می‌باشند. بیشترین نوسان¹ مربوط به روش تفاضل محدود صریح می‌باشد.



شکل 5 نمودار تغییرات هد آب نسبت به طول محیط

همان‌طور که در شکل 5 مشاهده می‌شود روش شبکه بولتزنم با هر دو الگو پایدار باقی مانده است.

2-3- مسئله 2

در این مسئله، معادله جابجایی-پخش مورد بررسی قرار می‌گیرد. سرعت جریان در طول محیط متخلخل ثابت و برابر 0/05 متر بر دقیقه انتخاب شد. در تحلیل مسئله انتقال آلودگی، از دو ضریب پخش متفاوت استفاده گردید و مطابق جدول 1، 3 مدل در نظر گرفته شد. دو ضریب پخش طوری انتخاب گردید که در مدل شماره 1 هر دو فرایند جابجایی و پخش سهیم باشند و در مدل شماره 2 فرایند جابجایی نسبت به پخش غالب باشد. مدل شماره 3 نیز همان مدل شماره 1 است، با این تفاوت که گام زمانی بزرگتر در نظر گرفته شده است. علت انتخاب گام زمانی بزرگتر، مقایسه پایداری روش‌های شبکه بولتزنم و تفاضل محدود صریح می‌باشد.

همان‌طور که در شکل 6 نشان داده شده است، آلودگی با غلظت 100 میلی گرم بر لیتر وارد محیط می‌شود. شرایط مرزی و اولیه برای این مسئله در رابطه 32 ارایه شده است.

$$\begin{cases} C(x, 0) = 0 \\ C(0, t) = 100 \text{ mg / lit} \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad t \geq 0, x = L \end{cases} \quad (32)$$

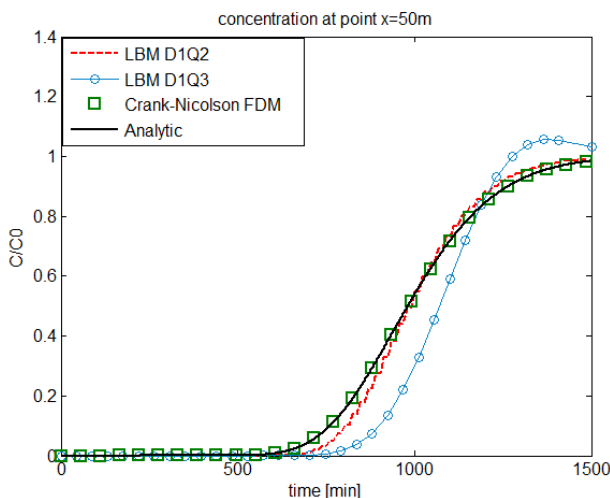
در حل این مسئله روش شبکه بولتزنم با دو الگوی

¹ Oscillation

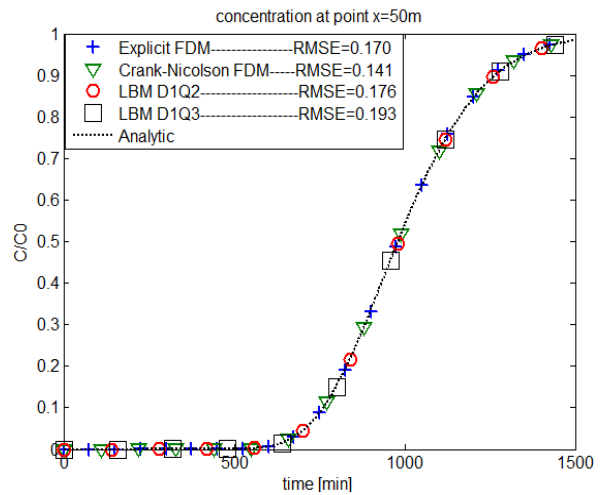
گام زمانی مورد نظر همچنان پایدار می‌باشد، در حالیکه روش تفاضل محدود صریح ناپایدار شده است. البته الگوی D1Q2 دارای پایداری بهتری نسبت به الگوی D1Q3 می‌باشد.

نتایج مدل‌سازی نشان می‌دهد که در معادله جابجایی-پخش هنگامی که هر دو فرایند جابجایی و پخش سهمیه باشند، روش شبکه بولتزمن و روش تفاضل محدود بر حل تحلیلی منطبق می‌باشند؛ اما هنگامی که فرایند جابجایی نسبت به پخش غالب باشد، روش شبکه بولتزمن با الگوی D1Q3 نسبت به سایر روش‌ها، دارای انطباق بیشتری با حل تحلیلی آن است و دارای نوسانات کمتری نیز می‌باشد. همچنین از نظر پایداری مشاهده شد که روش شبکه بولتزمن محدوده پایداری بزرگتری نسبت به روش تفاضل محدود صریح دارد.

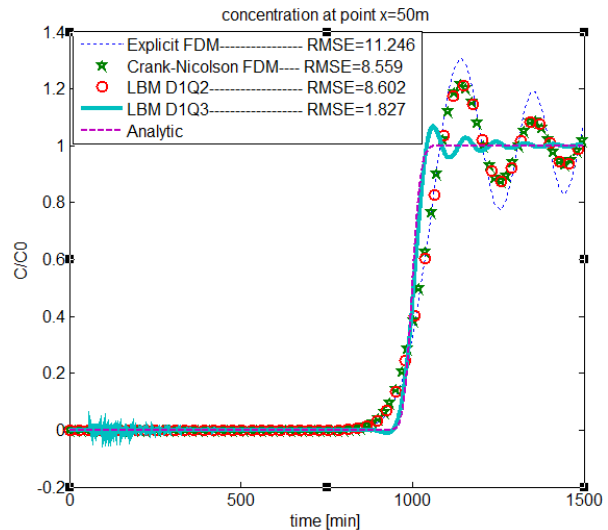
در مسئله شماره 1 مشاهده شد که روش شبکه بولتزمن با الگوی D1Q2 و D1Q3 نتایج نسبتاً مشابهی دارد. در حل معادله جابجایی-پخش در حالتی که فرایند جابجایی نسبت به پخش غالب است، اگرچه الگوی D1Q3 انطباق بیشتری با حل تحلیلی دارد، اما دارای نوسانات غیر عادی در ابتدای نمودار خود می‌باشد و همچنین از لحاظ پایداری در شکل 9 دیده می‌شود که این الگو نسبت به الگوی D1Q2 دارای پایداری کمتری است. بنابراین در مسائل 3 و 4 که در ادامه بررسی خواهند شد، فقط از الگوی D1Q2 استفاده می‌شود.



شکل 9 تغییرات غلظت آلودگی نسبت به زمان در نقطه $x=50$ m



شکل 7 تغییرات غلظت آلودگی نسبت به زمان در نقطه $x=50$ m



شکل 8 تغییرات غلظت آلودگی نسبت به زمان در نقطه $x=50$ m

همچنین بیشترین انطباق با حل دقیق مربوط به روش شبکه بولتزمن D1Q3 است، اگرچه این روش دارای نوساناتی در ابتدای نمودار خود می‌باشد.

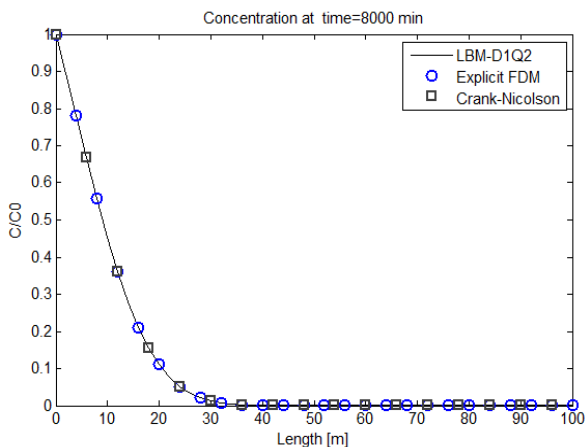
در مدل شماره 3 مقدار گام زمانی 11 دقیقه انتخاب شد. در این حالت روش تفاضل محدود صریح دچار ناپایداری شد و نمودار این روش از شکل حذف گردید. روش شبکه بولتزمن با هر دو الگوی D1Q3 و D1Q2 پایدار مانده است و نمودار این روش در مقایسه با حل تحلیلی و روش کرنک نیکلسون در شکل 9 نشان داده شده است.

همان‌طور که مشاهده می‌شود، روش شبکه بولتزمن در

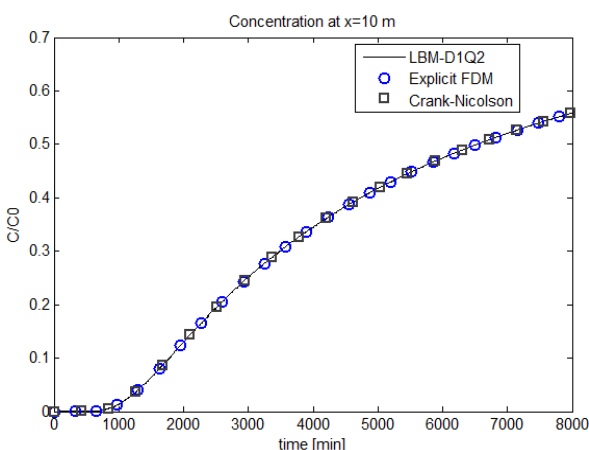
3-3- مسئله 3

در این مسئله حل هم‌زمان دو معادله آب زیرزمینی و انتقال آلودگی مورد بررسی قرار می‌گیرند. شرایط مرزی معادله آب زیرزمینی و انتقال آلودگی به ترتیب مطابق شرایط مرزی معرفی شده در مسئله 1 و 2 می‌باشد.

در این مسئله مقادیر گام زمانی و مکانی به ترتیب برابر 0/5 دقیقه و 2 متر انتخاب شدند. نتایج در شکل‌های 10 تا 13 ارائه شده است. شکل‌های شماره 10 و 11 مربوط به آب زیرزمینی و شکل‌های 12 و 13 مربوط به انتقال آلودگی هستند. شکل 10 تغییرات هد آب در طول محیط را در زمان 500 دقیقه نشان می‌دهد. در شکل 11 نیز تغییرات هد آب نسبت به زمان در یک نقطه مشخص ($x=50\text{ m}$) مشاهده می‌شود.

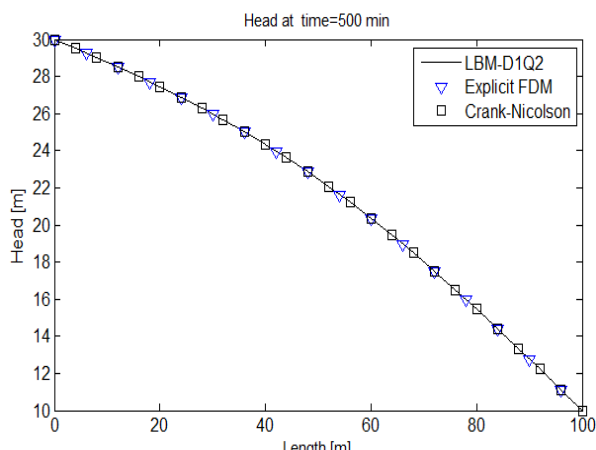


شکل 12 تغییرات غلظت آلودگی نسبت به طول محیط

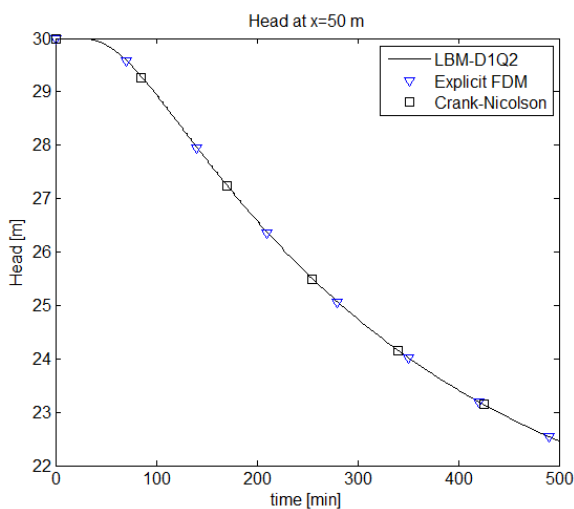


شکل 13 تغییرات غلظت آلودگی نسبت به زمان در نقطه $x=10\text{m}$

شکل‌های 10 تا 13 بیانگر نتایج نزدیک و مشابه روش‌های شبکه بولتزمن D1Q2، تفاضل محدود صریح و کرنک نیکلسون است. در این مسئله، زمان انجام محاسبات برای روش‌های تفاضل محدود و شبکه بولتزمن بدست آمده و در جدول 2 نشان داده شده است. زمان‌های انجام محاسبات توسط نرم‌افزار متلب 2013 با استفاده از پردازنده‌ای با مشخصات core i7-2670QM CPU @ 2.20 GHz بدست آمده‌اند. مشاهده می‌شود که در حل این



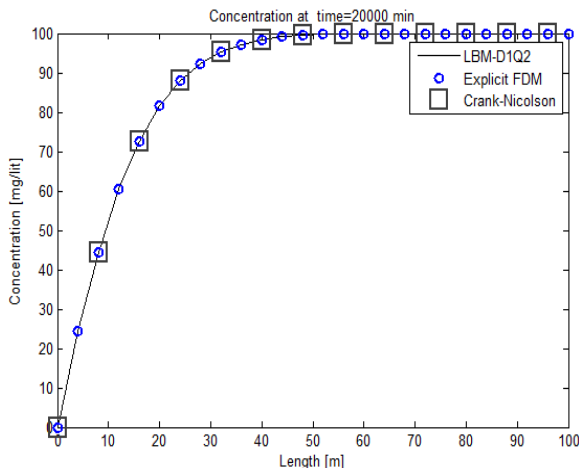
شکل 10 تغییرات هد آب نسبت به طول محیط



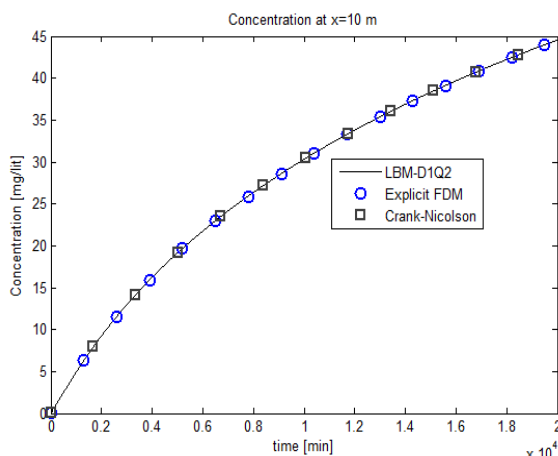
شکل 11 تغییرات هد آب نسبت به زمان در نقطه $x=50\text{m}$

در این مسئله گام زمانی و مکانی به گونه‌ای انتخاب شدند که همه روش‌ها پایدار بمانند. مقادیر گام زمانی و گام مکانی به ترتیب 2 دقیقه و 4 متر در نظر گرفته شد. نمودارهای آب زیرزمینی این مسئله مشابه مسئله شماره 3 می‌باشد. نمودارهای مربوط به انتقال آلودگی در شکل‌های 15 و 16 مشاهده می‌شوند. در شکل 15 تغییرات غلظت نسبت به طول محیط در زمان 20000 دقیقه و در شکل 16 تغییرات غلظت نسبت به زمان در نقطه $x=10$ m نشان داده شده‌اند.

با توجه به شکل‌های 15 و 16 هر سه روش عددی نتایج مناسب و مطابق بر هم ارائه دادند. بنابراین روش شبکه بولتزنم توانایی مناسبی در برخورد با ترم منبع آلودگی دارد.



شکل 15 تغییرات غلظت آلودگی نسبت به طول محیط



شکل 16 تغییرات غلظت آلودگی نسبت به زمان در نقطه $x=10$ m

مسئله، سرعت روش شبکه بولتزنم حدود 1000 برابر بیشتر از روش پایدار کرنک نیکلسون و حدود 3 برابر روش تفاضل محدود صریح می‌باشد.

نتایج حل هم‌زمان معادلات آب زیرزمینی و انتقال آلودگی نشان داد که با حفظ دقت، سرعت روش شبکه بولتزنم بسیار بالاتر از روش‌های تفاضل محدود صریح و کرنک نیکلسون است.

3-4- مسئله 4

در این مسئله مجدداً حل هم‌زمان معادلات آب زیرزمینی و انتقال آلودگی انجام می‌پذیرد، اما در معادله انتقال آلودگی ترم منبع وجود دارد و مطابق شکل 14 در سیستم نشت آلودگی در نظر گرفته شده است. در این مسئله شرط مرزی معادله آب زیرزمینی مطابق شرایط مرزی مسئله 1 است و شرط مرزی معادله انتقال آلودگی در رابطه (33) بیان شده است.

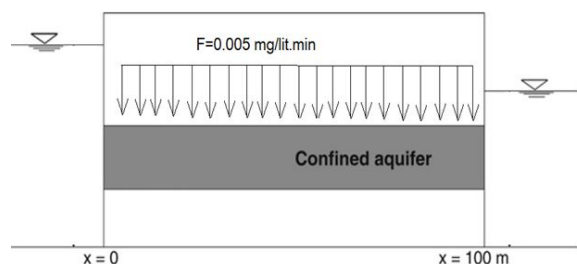
$$\begin{cases} C(x,0) = 0 \\ C(0,t) = 0 \quad t \geq 0 \\ \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad t \geq 0, x = L \\ F = 0.005 \text{ mg/lit.min} \end{cases} \quad (33)$$

مقدار ضریب پخش طولی (α_L) در محاسبات 20 متر فرض شد، بنابراین مقدار ضریب پخش آلودگی بر حسب سرعت جریان مطابق رابطه (34) بدست می‌آید.

$$D = \alpha_L u = 20u \quad (34)$$

جدول 2 زمان انجام محاسبات روش‌های عددی (مسئله 3)

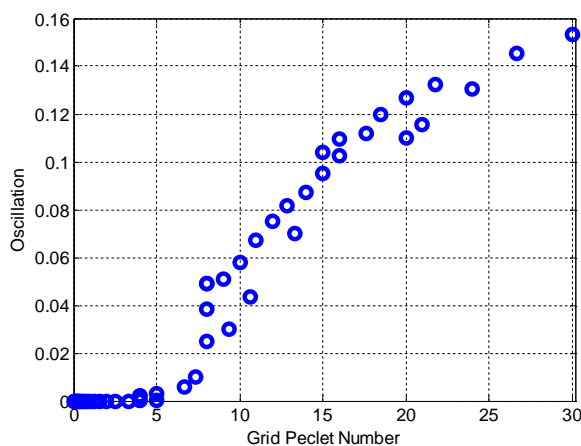
روش	زمان محاسبات (ثانیه)
تفاضل محدود صریح	3/19
کرنک نیکلسون	1379/26
شبکه بولتزنم D1Q2	1/13



شکل 14 نشت آلودگی به آبخوان

جدول 3 زمان انجام محاسبات هر یک از روش‌ها (مسئله 4)

زمان محاسبات (ثانیه)	روش
1/01	تفاضل محدود صریح
437/33	کرنک نیکلسون
0/50	شبکه بولتزن DIQ2



شکل 17 نمودار نوسان روش عددی بر حسب عدد پکلت شبکه

4- نتیجه‌گیری

در این پژوهش ابتدا معادله آب زیرزمینی مورد بررسی قرار گرفت و با توجه به مقادیر RMSE بدست آمده، مشاهده شد که روش شبکه بولتزن دارای دقت مناسبی در حل معادله آب زیرزمینی می‌باشد. از نظر پایداری نیز مشاهده شد که با افزایش گام زمانی، روش تفاضل محدود صریح زودتر دچار ناپایداری شد، در حالی که روش شبکه بولتزن با هر دو الگوی DIQ2 و DIQ3 دارای نتایج مناسبی است و پایداری بیشتری دارد. حل معادله جابجایی-پخش نیز بررسی شد و نتایج نشان داد در حالتی که هر دو فرایند جابجایی و پخش سهمی باشند، روش‌های شبکه بولتزن و تفاضل محدود صریح و کرنک نیکلسون دارای مقادیر RMSE نسبتاً یکسانی می‌باشند و دقت مشابهی دارند. در حالتی که فرایند جابجایی نسبت به پخش غالب است نیز با توجه به مقادیر RMSE مشاهده شد که روش شبکه بولتزن نسبت به روش تفاضل محدود صریح سازگاری و دقت بیشتری دارد و دارای نوسانات کمتری است.

بعلاوه، حل هم‌زمان معادلات آب زیرزمینی و انتقال

در این مسئله نیز زمان انجام محاسبات برای روش‌های تفاضل محدود و شبکه بولتزن بدست آمد که در جدول 3 نشان داده شده است. سرعت روش شبکه بولتزن حدود 900 برابر روش کرنک نیکلسون و 2 برابر روش تفاضل محدود صریح می‌باشد.

در حل معادله جابجایی-پخش در مدل شماره 3 مشاهده شد که روش شبکه بولتزن سازگاری بهتری نسبت به روش تفاضل محدود دارد. برای سازگاری روش شبکه بولتزن تاکنون محدوده‌ای معرفی نشده است، در حالی که برای حفظ سازگاری روش تفاضل محدود، عدد پکلت شبکه¹ بایستی کمتر از 2 باشد (Zheng and Bennett, 2002). عدد پکلت شبکه، مطابق رابطه (35) بدست می‌آید.

$$Pe^G = \frac{u \cdot \Delta x}{D} \quad (35)$$

به منظور ارائه محدوده مناسبی که روش شبکه بولتزن سازگاری مناسبی داشته باشد، تعداد زیادی آزمایش عددی انجام شد که در این آزمایش‌ها مقادیر مختلفی برای عدد پکلت شبکه بدست آمد و باتوجه به شکل 17 مشخص شد که اگر عدد پکلت شبکه کوچکتر از 7 باشد، حل عددی دچار ناسازگاری ناشی از نوسان نخواهد شد. در این شکل محور افقی عدد پکلت شبکه و محور قائم مقدار نسبی نوسان از حل تحلیلی می‌باشد. مقدار نسبی نوسان از رابطه (36) بدست می‌آید.

در این آزمایش‌ها مقادیر سرعت جریان از 0/01 تا 0/1 متر بر دقیقه، ضریب پخش آلودگی از 0/0005 تا 0/5 مترمربع بر دقیقه و گام مکانی از 0/05 تا 8 متر متغیر بود و مدل‌های مختلفی بر اساس مقادیر سرعت، ضریب پخش آلودگی و گام مکانی ایجاد شد.

$$Oscillation = \frac{\text{حل تحلیلی} - \text{مقدار بزرگترین نوسان}}{\text{حل تحلیلی}} \quad (36)$$

با توجه به شکل 17 و با در نظر گرفتن اینکه در روش تفاضل محدود عدد پکلت شبکه بایستی کمتر از 2 باشد، می‌توان گفت که روش شبکه بولتزن در رابطه با سازگاری روش بهتری است.

¹ Grid Peclet Number

- هیدرولیک، دوره 8، شماره 4، ص.ص. 13-25.
- نصرتی، ک، زهتابیان، غ. ر، مرادی، ا. و شهبازی، ا. (1386). "ارزیابی روش شبیه‌سازی تصادفی برای تولید داده‌های هواشناسی"، پژوهش‌های جغرافیایی، شماره 62، ص.ص. 1-9.
- Anwar, S. and Sukop, M.C. (2009a). "Lattice Boltzmann models for flow and transport in saturated karst". *Ground Water*. 47, pp. 401-413.
- Anwar, S. and Sukop, M.C. (2009b). "Regional scale transient groundwater flow modeling using Lattice Boltzmann methods". *Computers & Mathematics with Applications*. 58, pp. 1015-1023.
- Bin, D., Bao-Chang, S. and Guang-Chao, W. (2005). "A new lattice Bhatnagar–Gross–Krook Model for the convection–diffusion equation with a source term". *Chinese Physics Letters*. 22, pp. 267-270.
- Budinski, L., Fabian, J. and Stipić, M. (2015). "Lattice Boltzmann method for groundwater flow in non-orthogonal structured lattices". *Computers & Mathematics with Applications*. 70, pp. 2601-2615.
- Charbeneau Randall, J. (2000). *Groundwater hydraulics and pollutant transport*. Upper Saddle River. Prentice Hall, XIII.
- Chen, S. and Doolen, G.D. (1998). "Lattice Boltzmann method for fluid flows". *Annual Review of Fluid Mechanics*. 30, pp. 329-364.
- Gao, D., Chen, Z. and Chen, L. (2014). "A thermal lattice Boltzmann model for natural convection in porous media under local thermal non-equilibrium conditions". *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 70, pp. 979-989.
- Graille, B. (2014). "Approximation of mono-dimensional hyperbolic systems: A lattice Boltzmann scheme as a relaxation method". *Journal of Computational Physics*. 266, pp. 74-88.
- Grucelski, A. and Pozorski, J. (2012). "Lattice Boltzmann simulation of fluid flow in porous media of temperature-affected geometry". *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*. 50, pp. 193-214.
- Guo, Z. and Zhao, T. (2002). "Lattice Boltzmann model for incompressible flows through porous media". *Physical Review*. E 66, 036304.
- Guo, Z. and Zhao, T. (2005). "A lattice Boltzmann model for convection heat transfer in porous

آلودگی به کمک روش شبکه بولتزمن بررسی شد و نتایج نشان داد که روش شبکه بولتزمن به خوبی قادر به حل هم‌زمان معادلات فوق می‌باشد. همچنین مشاهده شد که با حفظ دقت، سرعت حل روش شبکه بولتزمن تقریباً 3 برابر روش تفاضل محدود صریح و 1000 برابر روش کرنک نیکلسون می‌باشد.

در رابطه با سازگاری نیز برای روش شبکه بولتزمن D1Q2 محدوده مناسبی بدست آمد و مشاهده شد که در اعداد پکلت شبکه کوچکتر از 7 روش شبکه بولتزمن سازگاری مناسبی دارد.

5- فهرست علائم

C	غلظت آلودگی (mg/lit)
c	سرعت ذرات (m/min)
CO	غلظت آلودگی ورودی (mg/lit)
c_s	سرعت صوت (m/min)
D^*	ضریب پخش مولکولی مؤثر (m^2/min)
D	ضریب پخش آلودگی (m^2/min)
f^{eq}	تابع توزیع تعادل
f	تابع توزیع
F	نشت آلودگی (mg/lit.min)
h	هد آب (m)
K	هدایت هیدرولیکی (m/min)
L	طول محیط (m)
pe	عدد پکلت
S	ضریب ذخیره
T	ضریب انتقال (m^2/min)
u	سرعت جریان (m/min)
w	ضریب وزن ذرات
α_L	ضریب پخش طولی (m)
Δt	گام زمانی (min)
Δx	گام مکانی (m)
τ	زمان آسایش

6- منابع

- مشهدگرمه، ن، ولی‌سامانی، ج. م. و مظاهری، م. (1392). "حل تحلیلی معادله انتقال آلودگی به ازای الگوی زمانی دلخواه منابع آلاینده نقطه‌ای توسط روش تابع گرین"، *مجله*

- Perko, J. and Patel, R.A. (2014). "Single-relaxation-time lattice Boltzmann scheme for advection-diffusion problems with large diffusion-coefficient heterogeneities and high-advection transport". *Physical Review E* 89, pp. 1-9.
- Rong, F., Guo, Z., Chai, Z., et al. (2010). "A lattice Boltzmann model for axisymmetric thermal flows through porous media". *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 53, pp. 5519-5527.
- Seta, T., Takegoshi, E. and Okui K. (2006). "Lattice Boltzmann simulation of natural convection in porous media". *Mathematics and Computers in Simulation*. 72, pp. 195-200.
- Wang HF. and Anderson MP. (1982). *Introduction to groundwater modeling: finite difference and finite element methods*. Academic Press.
- Zheng C and Bennett GD. (2002). *Applied contaminant transport modeling*. Wiley-Interscience, New York.
- Zhou JG. (2007a) A lattice Boltzmann model for groundwater flows. *International Journal of Modern Physics C* 18: 973-991.
- Zhou JG. (2007b) A rectangular lattice Boltzmann method for groundwater flows. *Modern Physics Letters B* 21: 531-542.
- Zhou JG. (2009) A lattice Boltzmann method for solute transport. *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 61: 848-863.
- media". *Numerical Heat Transfe. Part B* 47, pp. 157-177.
- Li, L., Mei, R. and Klausner, J.F. (2013). "Multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for the axisymmetric convection diffusion equation". *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 67, pp. 338-351.
- Li, Y. and Huang, P. (2008). "A coupled lattice Boltzmann model for advection and anisotropic dispersion problem in shallow water". *Advances in Water Resources*. 31, pp. 1719-1730.
- Liu H, Zhou JG, Li M, and Zhao, Y. (2013) "Multi-block lattice Boltzmann simulations of solute transport in shallow water flows". *Advances in Water Resources*. 58, pp. 24-40.
- Liu, Q., He, Y.L., Li, Q. and Tao W.Q. (2014). "A multiple-relaxation-time lattice Boltzmann model for convection heat transfer in porous media". *International Journal of Heat and Mass transfer*. 7, pp. 761-775.
- Mohamad, A. and Kuzmin, A. (2012). "The solet effect with the D1Q2 and D2Q4 lattice Boltzmann model". *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 13. pp. 289-293.
- Mohamad A., Tao Q., He. Y., and Bawazeer, S. (2015) Treatment of transport at the interface between multilayers via the lattice Boltzmann method. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals* 67, pp. 124-134.
- Mohamad, A.A. (2011). *Lattice Boltzmann method: fundamentals and engineering applications with computer codes*. Springer Science & Business Media.