

# Investigating the Use of Variable Coefficients of Forschheimer's Relation in the Analysis of Unsteady Flow in Porous Media

Hassan Hajikazemian<sup>1</sup>, Jalal Bazargan <sup>2\*</sup>

1- PhD candidate in Hydraulic Structures, Department of Civil Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

2- Assoc. Prof. Department of Civil Engineering, University of Zanjan, Zanjan, Iran.

#### Abstract

**Introduction:** Coarse-grained porous media, due to the size of particles and pores, causes complications in the flow behavior, so that the flow in them does not have a layered state and the Darcy relation loses its validity. In such a situation, the hydraulic gradient velocity relationship is nonlinear. The coefficients of the relationships have been examined by various researchers.

Surface water relations, also known as Saint-Venant relations, are among the best calculation tools governing free surface water flows. These equations were first used in 1871 by Adbemar Barre de Saint Venant in order to analyze unsteady flow with a free surface, and after that many researchers investigated and estimated the characteristics of free flows as well as flow in porous medium by these equations

In this research, characteristics of steady and un-steady flow in porous environment have been investigated. By calculating the velocity values at each point and plotting the velocity graph against the hydraulic gradient, the coefficients of Forschheimer's binomial relation were obtained for each of the discharges. By examining the changes of these coefficients, linear relationships were obtained for the changes of the coefficients against the flow rate changes.

**Methodology:** In this study, the tilting laboratory channel of the Faculty of Civil Engineering, Zanjan University was used. In order to create a porous environment, 1.2 meters of the length of the channel has been selected and separated by two net separators. (Fig 1). The grading of pebbles used in this research is presented in Figure 2. Also, their physical characteristics are given in Table 1.

The experimental program of this research was carried out in two sections of steady and unsteady flow. In the steady part, water flowed with 10 different flow rates from 8.51 to 20.62 L/s. By arranging the coefficients and the flow rates and plotting them against each other, a function can be derived to calculate each of the coefficients a and b based on the flow rate. The graphs in Figure 4 show these functions.

In the next part of the tests, the hydrograph in Figure 5 was passed through the porous media.

.Saint-Venant's equations were considered as governing equations and were solved using the method of characteristics. The equations were solved once by using fixed values and the other time by using the functions of Forschheimer coefficients.

#### Investigating the Use of Variable Coefficients ...

**Results and discussion:** The Saint-Venant equations for the problem were solved once by using the average values of the coefficients of Forschheimer's relation and again by using the functions of these coefficients. By solving the equations, the velocity and depth values and as a result the flow rate at any moment and at any point of the porous medium were calculated. Table 3 shows the calculated flow rate error for two solution modes. In this table, the minimum and maximum values of the input hydrograph are compared with their corresponding values in the hydrograph at the point of 6 cm. Checking the error values shows that the calculated error of the maximum flow rate (which occurred at the peak of the hydrograph) in the case of constant Forschheimer coefficients is 13.36%, which is about 3 liters per second more than the actual hydrograph. In spite of this, there is only 2.16% error in the calculation hydrograph with variable coefficients of maximum discharge. This is also important in the minimum of hydrograph. So that the error value in the calculation hydrograph with fixed coefficients has 22% error (minimum of the hydrograph occurs at the beginning), while the corresponding value for the calculation mode with variable coefficients is only 1%.

As can be seen in Fig 9, the calculated profile is almost always a little lower than the observed profile and the difference between these two profiles reaches its maximum at the time of the hydrograph peak, and then the difference decreases again as the discharge decreases.

Table No. 4 shows the percentage of the relative error for the observed and calculated flow profiles at different times. As mentioned, the maximum error among all times and all points is observed in 400 seconds and at the end point of the profile.

**Conclusion:** The results of the numerical solution in two cases of fixed and variable coefficients show that the percentage of relative error in the maximum and minimum discharge for the case of fixed coefficients is much more than the case of variable coefficients.

The results show that the maximum discharge is smaller as we move along the medium and also occurs at a later time.

With the investigations, it was determined that the average calculation error of the depth at the times of 100, 300 and 600 seconds is 4.88, 8.05 and 9.93 percent, respectively.

**Keywords:** Porous media, Forschheimer's Relation, Unsteady Flow, Saint-Venant Equations, Method of Characteristics.

انجمن هیدرولیک ایران نشریه هیدرولیک



مقاله پژوهشی /https://doi.org

# بررسی استفاده از ضرایب متغیر رابطهی فورشهایمر در تحلیل جریان غیرماندگار درمحیط متخلخل

حسن حاجي كاظميان<sup>1</sup>، جلال بازر گان<sup>1\*</sup>

۱. دانشجوی دکتری مهندسی آب و سازههای هیدرولیکی، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه زنجان، زنجان. ۲. دانشیار، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه زنجان، زنجان.

چکیده: در این تحقیق ویژگیهای جریانهای ماندگار و غیرماندگار درون محیط متخلخل سنگریزمای به صورت آزمایشگاهی و عددی مورد بررسی قرار گرفته و برای نخستین بار روابط خطی برای ضرایب رابطهی فورشهایمر بر اساس دبی جریان در حل عددی معادلههای سنتونانت مورد استفاده گرفت. در بخش نخست پس از عبور دادن ۱۰ دبی متفاوت در حالت ماندگار از محیط سنگریزمای، با ثبت عمق جریان در هر نقطه، نمودارهای سرعت متوسط -گرادیان هیدرولیکی برای آنها رسم شده و مقادیر ضرایب رابطهی فورشهایمر برای هر دبی به صورت جداگانه به دست آمد. سپس تغییرهای این ضرایب در برابر دبی مورد بررسی قرار گرفته و برای هر یک از ضرایب رابطهای خطی بر اساس دبی پیشنهاد گردید. در ادامهی آزمایشها با عبور دادن یک هیدروگراف از محیط سنگریزمای مقادیر عمق در هر لحظه و هر بر اساس دبی پیشنهاد گردید. در ادامهی آزمایشها با عبور دادن یک هیدروگراف از محیط سنگریزمای مقادیر عمق در هر لحظه و نقطه به ثبت رسیدند. در بخش دوم معادلههای سنت-ونانت به عنوان معادلات حاکم در نظر گرفته و با استفاده از روش مشخصهها به حل آنها پرداخته شد. حل معادلهها یک بار با استفاده از مقادیر ثابت و بار دیگر با ضرایب متغیر صورت گرفت که نتایج حاصل شده حاکی از آنها پرداخته شد. حل معادلهها یک بار با استفاده از مقادیر ثابت و بار دیگر با ضرایب متغیر صورت گرفت که نتایج حاصل شده حاکی از آنها می باشند که درصد خطای نسبی محاسباتی در دبی ورودی بیشینه برای حالت ضرایب ثابت و متغیر به ترتیب معادل و ۲/۱۶ درصد و در دبی ورودی کمینه نیز به ترتیب معادل، ۲۲ و ۱ درصد هستند. در ادامهی حل معادلهها با ضرایب متغیر، نتایج عمق جریان در زمانهای مختلف در تمام طول محیط ایجاد شده با دقت مناسبی محاسبه و بررسی گردید.

كليدواژگان: محيط سنگريزهاي، رابطهي فورشهايمر، جريان غيرماندگار، معادلههاي سنتونانت، روش مشخصهها.

#### ۱– مقدمه

بررسی و پیشبینی مشخصههای جریان در محیطهای سنگریزهای بهخصوص محیط درشتدانه در علوم مختلف دارای اهمیت زیادی میباشد. محیطهای متخلخل درشتدانه با توجه به اندازهی ذرات و منافذ سبب بروز پیچیدگیهایی در رفتار جریان میگردند به طوریکه جریان در آنها حالت لایهای نداشته و رابطهی دارسی اعتبار خود را از دست میدهد. در چنین وضعیتی رابطهی سرعت گرادیان هیدرولیکی به صورت غیرخطی میباشد. بر اساس پژوهشهای بسیاری که در این زمینه انجام شده میتوان رابطهی دو جملهای و رابطهی نمایی را به عنوان دو دسته کلی روابط سرعت گرادیان هیدرولیکی در محیط متخلخل معرفی نمود.

- $\mathbf{i} = \mathbf{a}\mathbf{V} + \mathbf{b}\mathbf{V}|\mathbf{V}| \tag{1}$
- $\mathbf{i} = \mathbf{m}\mathbf{V}^{\mathbf{n}} \tag{(7)}$

ضرایب روابط فوق توسط محققین مختلفی از جمله Sidropolo 'Stephenson 'Ward 'Engelund 'Ergun 'Crgun و عالبا بر Hansen 'Ahmed & Sonada و ... بررسی شده و غالبا بر اساس مجموعهای از ویژگیهای مصالح، سیال و سرعت ظاهری (یا عدد رینولدز) محاسبه شده اند. Lenc et al (2022). ای استخراج

(2022) در تحقیق خود روسی برای استجراج فرمول ضرایب موثر فورشهایمر برای یک محیط متخلخل چند لایه پیشنهاد کردند. این روابط بر اساس نفوذپذیری لایههای موازی و همچنین لایههای عمود بر جریان تدوین شدهاند. مصالح مخلوط اطراف معدن آهن Yashuan در کشور چین به منظور بررسی و تحلیل ویژگیهای جریان کشور چین به منظور بررسی و تحلیل ویژگیهای جریان توسط (2022) Li and Chen در ریمای مرار گرفته است. در این تحقیق عملکرد رابطهی دارسی در مصالح با دانهبندی مختلف از لای تا شن و نفوذپذیریهای متفاوت بررسی شده و نشان دادهاند که هر چه نفوذپذیری مصالح بیشتر شود رابطهی دارسی اعتبار خود را بیشتر از دست

میدهد و رابطهی غیر خطی فورشهایمر میتواند بهترین نتیجه را در تحلیل مشخصههای جریان حاصل نماید. نتایج آزمایشها نشان میدهند که با افزایش نفوذپذیری مصالح ضریب غیرخطی فورشهایمر به صورت نمایی افزایش مییابد. در پژوهشی دیگر مشخصههای جریان غیردارسی در محیط متخلخل با تهیه منحنیهای گرادیان فشار در برابر سرعت مورد تحلیل قرار گرفتهاند. محققان آزمایشهای خود را روی نمونهی استوانهای به قطر ۱۵ و آزمایشهای خود را روی کانوع مصالح انجام دادند. نتایج نشان دادند ضریب  $\beta$  با تخلخل و نفوذپذیری رابطه دارد. نشان دادند ضریب  $\beta$  با تخلخل و نفوذپذیری رابطه دارد. پارامترهای تخلخل و نفوذپذیری اراطه دارد. پارامترهای تخلخل و نفوذپذیری ارائه گردید ( al., 2018)

روابط آبهای سطحی که به عنوان روابط سنتونانت نیز یاد می شود از بهترین ابزارهای محاسباتی حاکم بر جریانهای آب با سطح آزاد میباشد. جریانهایی همچون جریانهای سیلابی در رودخانهها، جریان داخل سازههای هیدرولیکی مانند سدها یا تأسیسات فاضلاب و همچنین جریان داخل محیطهای سنگریزهای از این جمله هستند. (Abadeilam et al., 2022) این معادله ها اولین بار در سال ۱۸۷۱ توسط Adbemar Barre de Saint Venant به منظور تحلیل جریان غیرماندگار با سطح آزاد به کار گرفته شد و پس از آن محققان بسیاری به بررسی و تخمین مشخصههای جریانهای آزاد و همچنین جریان در محیط متخلخل توسط این معادلات پرداختند. که میتوان به Delestre and james Fiedler and Ramirez (2000) Cea and Blade (2008) Costabile et al (2009) (2015) اشاره نمود.

Hosseini (2007) معادلههای تجربی مورد استفاده برای تخمین پارامترهای هیدرولیکی جریان غیرخطی در محیطهای متخلخل درشتدانه را ارزیابی کرد و به این نتیجه رسید که معادلههایی که در آنها دادههای مرتبط با زبری و شکل سنگدانهها لحاظ شدهاند به نتایج خوبی در تخمین پارامترهای جریان درون محیط متخلخل میانجامد. وی از روابط اصلاح شده سنتونانت به منظور مدل سازی جریان غیرماندگار از میان محیط سنگریزهای Stephenson برای تحلیل جریان در استفاده کرد. همچنین روابط مشابهی توسط 1979) به عنوان روابط حاکم برای تحلیل جریان در

استفاده قرار گرفتهاند. (2023) Norouzi et al. با استفاده از دادههای آزمایشگاهی و معادلهای سنتونانت جریان غیرماندگار داخل مصالح سنگریزهای را مورد بررسی قرار دادند. بدین منظور در روابط مورد استفاده از معادلهی دوجملهای فورشهایمر به منظور محاسبه گرادیان هیدرولیکی استفاده شد. بررسیها نشان میدهند استفاده از مقادیر متغیر a و d در معادلهی فورشهایمر نسبت به مقادیر ثابت میتواند نتایج دقیقتری را حاصل کند. ضرایب فوق توسط الگوریتم توسعهی ذرات PSO در هر گام زمانی محاسبه شدهاند.

در این پژوهش ویژگیهای جریان ماندگار و غیرماندگار در محیط متخلخل سنگریزهای مورد بررسی قرار گرفتهاند. در بخش نخست آزمایشهای ماندگار با عبور دادن ۱۰ دبی متفاوت از سنگریزهها مقادیر عمق در نقاط طول محیط ثبت شدند. با محاسبه مقادیر سرعت در هر نقطه و رسم نمودار سرعت در برابر گرادیان هیدرولیکی ضرایب رابطهی دو جملهای فورشهایمر برای هر یک از دبیها بهدست آمد. با بررسی روند تغییرهای این ضرایب روابط خطی برای تغییر ضرایب در برابر تغییر دبی به دست آمد. در بخش دوم آزمایش به صورت غیرماندگار انجام شده و در هر لحظه و در هر مكان مقادير عمق آب ثبت شد. در ادامه معادلههای سنتونانت به عنوان معادلههای حاکم با استفاده از روش مشخصهها حل شد. حل معادلهها در دو حالت صورت گرفته که در حالت نخست ضرایب فورشهایمر به صورت ثابت ( مقادیر متوسط) و در حالت دوم برای نخستین بار ضرایب به صورت متغیر (تابعی از دبی) در حل معادلهای سنتونانت در نظر گرفته شدند. نتایج نشان میدهند مقادیر خطا در هیدروگراف ورودی جریان با استفاده از ضرایب متغیر خطای بسیار کمتری دارد از این رو در ادامه محاسبات از ضرایب متغیر استفاده شد. بررسی نتایج عمق و دبی در نقاط و زمانهای مختلف نشان دهنده صحت عملکرد توابع پیشنهادی برای ضرایب فورشهایمر میباشد.

### ۲– مواد و روشها ۲–۱– تجهیزات آزمایشگاهی

در این مطالعه از کانال آزمایشگاهی شیب پذیر آزمایشگاه دانشکدهی مهندسی عمران دانشگاه زنجان استفاده شده

است. کانال مذکور به طول ۱۳ متر و به ابعاد یک متر عرض در ۸/۰ متر ارتفاع بوده و دیوارهی آن به منظور بررسی جریان از شیشه ساخته شده است. به منظور ایجاد محیط متخلخل ۲/۱ متر از طول کانال انتخاب و توسط دو جداکننده توری جدا گردیده است. برای ثبت فشار وارد بر کف کانال تعداد ۲۳ پیزومتر در محدوده ایجاد شده نصب شدهاند. فاصلهی پیزومترها به صورت ۶ پیزومتر به فاصله

۱۵ سانتیمتر در ابتدا، ۶ پیزومتر به فاصله ۱۰ سانتیمتر در وسط و ۱۰ پیزومتر به فاصله ۵ سانتیمتر در انتهای کانال میباشد. شکل ۱ نمای شماتیک کانال را نشان میدهد. برای ایجاد شیب از دو جک هیدرولیک استفاده میشود که در این پژوهش شیب به صورت ثابت ۱/۷۳ درصد تنظیم شده است.



Fig 1. Schematic of laboratory flume شکل ۱. شماتیک کانال آزمایشگاهی مورد استفاده

۲-۲. مصالح مورد استفاده
 سنگریزههای مورد استفاده در این تحقیق از یک معدن
 سنگ کوهی واقع در روستای نیکویه در فاصلهی
 کیلومتری شمالغرب شهر قزوین تامین شده اند.

سنگدانهها از جنس آذرین بوده و با هدف استفاده در بالاست راهآهن تولید شدهاند. بر این اساس تمام سنگریزههای مورد استفاده تیزگوشه می باشند. همچنین مشخصههای فیزیکی آنها در جدول ۱ آورده شده است.

سنگریزهی مورد استفاده	های فیزیکی	<b>دول ۱</b> ویژگی	ج
-----------------------	------------	--------------------	---

		Table 1	Specification	ons of lab	oratory ma	aterials		
d0	d10	d30	d50	d60	d100	Cu	Cc	Porosity
3.943	6.78	9.97	13.99	17.70	54.93	2.61	0.83	0.425

## ۳-آزمایشهای انجام شده

#### ۳-۱- حالت ماندگار

برنامهی آزمایشی این پژوهش در دو بخش جریان ماندگار و غیرماندگار صورت گرفت. در قسمت ماندگار آب با ۱۰ دبی مختلف (دبی از ۸/۵۱ تا ۲۰/۶۲ لیتر بر ثانیه) از محیط متخلخل ایجاد شده عبور داده شد. با هدف ماندگاری مؤلفههای جریان، در ابتدای هر آزمایش پمپ به مدت ۱۰ دقیقه با دبی مورد نظر کار کرده و سپس پارامترهای لازم برداشت و ثبت شدند. بلندای پیزومتریک و عمق آب به صورت مستقیم برداشت شدند. مقادیر گرادیان هیدرولیکی در برابر سرعت جریان برای هر یک از

آزمایش ها رسم شده و ضرایب رابطه یدو جملهای و رابطه یتوانی برای هر حالت محاسبه گردید که نتایج آنها در شکل ۴ آورده شدهاند. ضرایب اشاره شده برای تمام دبی ها محاسبه شده و در جدول ۲ ارائه شده است. مقادیر متوسط ضرایب به ترتیب ۱/۲۶ و ۹۱/۶ به ترتیب برای a و b میباشند. با بررسی نتایج رابطه یمناداری بین دبی و ضرایب مشاهده گردید که با مرتب کردن ضرایب و دبی ها و رسم آنها در برابر یکدیگر میتوان یک تابع برای محاسبه ی هر یک از ضرایب a و b بر اساس دبی استخراج نمود. نمودارهای شکل ۳ این توابع را نشان میدهند.

> Journal of Hydraulics ??(?), ???? 5

# ۴- حل عددی معادله های سنت ونانت ۴-۱- معادله های حاکم

استفاده از روابط سنتونانت در تحلیل جریان از محیطهای متخلخل در بین محققها بسیار رایج است. برای توصیف جریان در مجاری باز، همواره از سه رابطهی اصلی پیوستگی، اندازه حرکت و انرژی استفاده میشود. چون متغیرهای اصلی جریان فقط عمق و سرعت یا عمق و دبی هستند، بنابراین دو معادله از سه معادلهی فوق جهت تحلیل کفایت میکند. معمولا وقتی تلفات انرژی نامشخص باشد، از معادلههای پیوستگی و اندازه حرکت نامشخص باشد، از معادلههای پیوستگی و اندازه حرکت و انرژی نتایج قابل قبولی به دست میدهد. سنتونانت با لحاظ فرضیاتی، فرم سادهتری از معادلههای پیوستگی و اندازه حرکت را بهدست آورد. معادلههای دیفرانسیلی سنتونانت را میتوان برای جریان در کانالهای باز به صورت زیر بیان نمود.

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} = g \left( S_0 - S_f \right) \tag{(7)}$$

$$y\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$$
(f)

 $S_0$  که در این روابط v سرعت جریان، yعمق جریان،  $S_0$  شیب کف کانال،  $S_f$  شیب خط گرادیان انرژی، x مسافت در طول کانال، f زمان و g شتاب جاذبه ثقل میباشند. یکی از اصلی ترین پارامترها جهت تحلیل جریان غیرماندگار، محاسبه مقدار شیب خط انرژی بوده که در جریان درون محیطهای متخلخل به صورت رابطهی (۵) نشان داده می شود.

$$S_{f} = \frac{d\left(h+z+\frac{V^{2}}{2gn^{2}}\right)}{dx} \tag{(a)}$$

که در آن: h: عمق جریان، z: ارتفاع کف لایه متخلخل از خط مبنا، V: سرعت ظاهری جریان، n: تخلخل محیط متخلخل و g: شتاب ثقل است. به دلیل کم بودن مقدار سرعت جریان درون محیطهای متخلخل، مقدار بلندای سرعت در مقایسه با جملات دیگر ناچیز بوده و میتوان از آن صرف نظر کرد. در این حالت میتوان شیب خط انرژی را معادل گرادیان هیدرولیکی در نظر گرفت.

	توانى	لەاي و	دو جم	روابط	ىرايب	ل ۲ ض	جدوا	
abla 1	Coo	fficient	te of n	ower	and h	inom		tiona

1 4010		ents of power		relations
Q (l/s)	а	В	m	Ν
8.510	1.160	23.930	23.270	1.779
10.060	1.178	34.337	38.419	1.878
12.410	1.138	51.084	54.537	1.910
14.150	1.114	66.052	61.624	1.885
15.720	1.220	83.775	92.197	1.952
17.920	1.324	105.940	98.649	1.904
18.660	1.328	116.430	109.620	1.914
19.370	1.339	131.740	137.670	1.955
19.920	1.382	143.530	149.250	1.955
20.620	1.397	154.190	163.310	1.964



**Fig. 3** A and b coefficients functions based on discharge شکل ۳ توابع ضرایب a و d بر اساس دبی

#### ۲-۳- حالت غیرماندگار

در بخش دوم آزمایشها، جریان با هیدروگراف نشان داده شده در شکل ۵ از محیط متخلخل عبور داده شد. لازم به ذکر است برای ایجاد جریان غیرماندگار از یک اینورتر افزار استفاده شده است. به منظور ثبت دادهها از تمام مراحل آزمایش فیلمبرداری شده و سپس با استخراج عکس از آنها و استفاده از نرم افزارهای پردازش تصویر، مقادیر عمق آب در هر لحظه با دقت زیاد ثبت گردید. همچنین عمق آب در ورودی و خروجی محیط متخلخل نیز به صورت جداگانه برای در نظر گرفتن شرایط مرزی ثبت شد.



**Fig. 4** Hydraulic gradient-velocity graphs for different discharges شکل ۴ نمودارهای گرادیان هیدرولیکی در برابر سرعت متوسط برای دبیهای مختلف

Journal of Hydraulics
??(?), ????
7



**Fig. 6** Depth changes in different points of porous media within test time شکل ۶ تغییرات عمق در نقاط مختلف محیط متخلخل در طی زمان آزمایش

#### ۴-۲- معادلهای مشخصه

روشهای حل معادلههای سنتونانت را میتوان در دو دسته کلی روشهای عددی و روش های تقریبی گنجاند. در این پژوهش از روش صریح مشخصهها که یکی از روشهای عددی حل است، برای حل معادلات سنتونانت استفاده شده است. چنانچه معادلهای حاکم به دو جفت معادله دیفرانسل معمولی تبدیل شده و با استفاده از روش تفاضلات محدود حل میگردند. چنانچه منحنیهای مشخصه را از یکی از نقاط شبکه رسم کنیم، منحنیهای مذبور از نقاط شبکه مجاور عبور نمیکنند.

$$\int_{R}^{P} dV + \int_{R}^{P} \frac{g}{c} dy = g \int_{R}^{P} (S_0 - (\hat{\gamma})) dx$$

$$\int_{S}^{\hat{P}} dV - \int_{S}^{P} \frac{g}{c} dy = g \int_{S}^{P} (S_0 - (\forall))$$

بدیهی است که در حین انتگرال گیری از معادلههای ذکر شده مقادیر  $S_f$  یا i و سرعت انتشار موج c در طول پاره خطهای RP و SP ثابت در نظر گرفته شدهاند که در واقع

> Journal of Hydraulics ??(?), ???? 8

هر دو پارامتر مذکور تغییر پیدا می کنند، لذا جهت جلوگیری از خطای محاسباتی بایستی مقادیر  $\Delta t$  و  $\Delta t$ اعدادی کوچکتری انتخاب شوند به عبارتی بایستی تحلیل حساسیت دقت جوابها با مقادیر  $\Delta t$  و  $\Delta t$  های مختلف بررسی گردد. با انتگرال گیری و برخی سادهسازیها روابط لازم برای مقادیر  $V_r$  ،  $V_r$  ،  $C_r$  ،  $y_r$  ،  $V_r$  ,  $C_r$  ب مقادیر V ،  $V_r$  ،  $V_r$  ،  $V_r$  ,  $V_r$  ,  $V_r$  م مقادیر V ، V در نقاط A، B و C به صورت زیر به دست می آیند.

$$V_r = \frac{V_c - \frac{\Delta t}{\Delta x} (C_A \cdot V_C - C_C \cdot V_A)}{1 + (V_c - V_A + C_c - C_A) \frac{\Delta t}{\Delta x}} \tag{A}$$

$$\mathbf{C}_{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{C}} - \mathbf{V}_{\mathbf{A}_{\Delta \mathbf{x}}}(\mathbf{C}_{\mathbf{C}} - \mathbf{C}_{A})}{1 + \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta \mathbf{x}}(\mathbf{C}_{\mathbf{C}} - \mathbf{C}_{A})} \tag{9}$$

$$\mathbf{y}_{\mathrm{R}} = \mathbf{y}_{\mathrm{C}} - \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta \mathbf{x}} (\mathbf{V}_{R} + \mathbf{C}_{R}) (\mathbf{y}_{C} - \mathbf{y}_{A}) \qquad (1 \cdot )$$

$$V_{S} = \frac{V_{c} - \Delta x (c_{B} + V_{c} - C_{c} + V_{B})}{1 + (V_{c} - V_{B} + C_{c} - C_{B}) \frac{\Delta t}{\Delta x}}$$
(11)

$$\mathbf{C}_{\mathbf{S}} = \frac{\mathbf{C}_{\mathbf{C}} - \mathbf{V}_{\mathbf{S}_{\overline{\Delta \mathbf{x}}}}(\mathbf{C}_{\mathbf{C}} - \mathbf{C}_{B})}{1 + \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta \mathbf{x}}(\mathbf{C}_{\mathbf{C}} - \mathbf{C}_{B})} \tag{17}$$

$$\mathbf{y}_{S} = \mathbf{y}_{C} - \frac{\Delta \mathbf{t}}{\Delta \mathbf{x}} (\mathbf{V}_{S} - \mathbf{C}_{S}) (\mathbf{y}_{C} - \mathbf{y}_{B}) \qquad (17)$$

$$\frac{1}{2}g\Delta t(S_{fR} + S_{fS}) + g\Delta tS_0 \qquad (14)$$

$$C_{P} = \frac{1}{4}(V_{R} - V_{S}) + \frac{1}{2}(C_{R} + C_{S}) + \frac{1}{4}g\Delta t(S_{fs} - S_{fr})$$
(10)

$$y_P = \frac{C_P^2}{g} \tag{19}$$

روابط (۱۴) تا (۱۶) برای نقاط میانی و حد فاصل شرایط مرزی بالادست و پاییندست به کار میروند. برای مرز بالادست رابطه (۱۷) به همراه شرط مرزی بالادست و برای پایین دست رابطه (۱۸) به همراه شرط مرزی پاییندست مورد استفاده قرار می گیرند.

$$(V_P - V_S) - 2(c_P - c_S) = g\Delta t (S_0 - S_{fS}) \quad (\forall \forall)$$

$$(V_P - V_R) - 2(c_P - c_R) = g\Delta t (S_0 - S_{fR}) \quad (1 \lambda)$$

#### ۵– نتایج و بحث

عمق ورودی ثبت شده در جریان آزمایش به عنوان یکی از شروط مرزی بالادست مورد استفاده قرار گرفت. همچنین با توجه به هیدروگراف ورودی به محیط متخلخل میتوان مقادیر سرعت در بالادست در هر لحظه را محاسبه نموده

و به عنوان دیگر شرط مرزی بالادست در نظر گرفت. عمق

که در این رابطه V سرعت جریان و  $\sqrt{gy} = 2$  سرعت موج میباشند. معادلههای سنتونانت برای مساله یک بار با استفاده از مقادیر متوسط ضرایب رابطه فورشهایمر و بار دیگر با استفاده از توابع این ضرایب حل شدند. با حل معادلهها مقادیر سرعت و عمق و در نتیجه دبی جریان در هر لحظه و در هر نقطه از محیط متخلخل محاسبه گردید. جدول ۳ خطای دبی محاسباتی را برای دو حالت حل نشان میدهد. در این جدول مقادیر حداقل و حداکثر نقطه ۶ سانتیمتر مقایسه شده است. لازم به ذکر است که نقطه ۶ سانتیمتری نزدیکترین نقطه به ابتدای محیط نقطه ۱ میباشد از این رو میتوان مقادیر ثبت شده در این نقطه را معادل هیدروگراف ورودی قلمداد نمود.

بررسی مقادیر خطا نشان می دهد خطای دبی محاسباتی بیشینه دبی (که در نقطه اوج هیدروگراف رخ داده) در حالت ضرایب فورشهایمر ثابت ۱۳/۳۶ درصد میباشد که حدود ۳ لیتر بر ثانیه بیشتر از هیدروگراف واقعی میباشد. این در حالی است که در هیدروگراف محاسباتی با ضرایب متغیر دبی بیشینه تنها ۲/۱۶ درصد خطا دارد. این مهم در کمینه هیدروگراف نیز دارای اهمیت میباشد. به طوری که مقدار خطا در هیدروگراف محاسباتی با ضرایب ثابت دارای مقدار خطا در هیدروگراف محاسباتی با ضرایب ثابت دارای مقدار خطا در میدروگراف محاسباتی با ضرایب ثابت دارای مقدار خطا در محمدوگراف محاسباتی با ضرایب ثابت دارای مقدار محال در حالی است که مقدار متناظر برای حالت میدهد) این در حالی است که مقدار متناظر برای حالت محاسبه با ضرایب متغیر تنها ۱ درصد میباشد. ملاحظه میگردد استفاده از ضرایب متغیر رابطه فورشهایمر به پاییندست در زمانهای جلوتری اتفاق میافتد و مقدار حداکثر دبی هر چه به نقاط پایانی طول محیط متخلخل نزدیک میشویم کمتر می گردد. به طوریکه بیشترین دبی پیک در نقطه 6=x سانتیمتر و کمترین دبی پیک در x=206 سانتیمتر رخ داده است. همچنین زمان رخداد حداکثر دبی در اولین نقطه حدود ۲۰۰ ثانیه و در آخرین نقطه این مقدار در زمان حدود ۳۰۰ ثانیه رخ داده است. صورت توابعی از دبی میتواند مقادیر خطای نسبی را در نقطه اوج هیدرگراف تا ۱۱ درصد و در نقطه حداقل آن تا ۲۱ درصد کاهش دهد. از این رو در ادامه بررسیها از نتایج به دست آمده از حل معادلههای سنتونانت با استفاده از مقادیر متغیر استفاده شده است. شکل ۷ مقادیر مختلف دبی در هر لحظه را برای برخی از نقاط در حالت محاسبه با ضرایب متغیر نشان میدهد. همانطور که قابل انتظار بود حداکثر مقدار دبی در نقاط

Table 3 Relative error percent for computational hydrograph in both constant and varied coefficients				
	Entrance hydrograph	Computational hydrograph with fixed coefficients	Computational hydrograph with variable coefficients	
Maximum of discharge	21.26	24.10	20.80	
Relative error percentage of the maximum discharge	-	13.36	2.16	
Minimum of discharge	10.00	7.80	9.90	
Relative error percentage of the minimum discharge	-	22.00	1.00	

حالت ضرایب ثابت و متغیر	ای هیدروگراف محاسباتی در دو	<b>جدول ۲</b> درصد خطای نسبی بر
-------------------------	-----------------------------	---------------------------------



 Fig. 7 Flow rates at any moment and at different points along the porous medium

 شکل ۷ مقادیر دبی در هر لحظه و در نقاط مختلف در طول محیط متخلخل

مشاهداتی و محاسباتی برای ۶ زمان ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰ و ۵۰۰ ثانیه نشان میدهند. همانطور که دیده میشود تقریبا همواره پروفیل محاسباتی مقداری پایین تر

به منظور کنترل صحت عملکرد محاسبههای صورت گرفته عمق محاسباتی و عمق مشاهداتی با یکدیگر مقایسه شدهاند. تصاویر شکل ۸ پروفیل سطح آب را در دو حالت

Journal of Hydraulics
??(?), ????
10

از پروفیل مشاهداتی میباشد که اختلاف این دو نیمرخ در زمان پیک هیدروگراف به حداکثر خود رسیده و سپس با فروکش کردن دبی دوباره اختلاف کم میشود. همچنین از دیدگاه دیگر میتوان بیان نمود که در یک لحظه هر چه به انتهای محیط متخلخل نزدیکتر میشویم این میزان اختلاف بیشتر میشود. در واقع اختلاف پروفیلهای مشاهداتی و محاسباتی با سرعت و زاویه خطوط جریان نسبت مستقیم دارد به طوریکه در انتهای نیمرخ (در طول محیط متخلخل) بیشترین سرعت و بیشترین زاویه ایجاد میشود و در نتیجه بیشترین اختلاف نیز رخ میدهد و همچنین در زمان مربوط به پیک هیدروگراف که

حداکثر سرعت در آن اتفاق میافتد نیز شاهد بیشینه اختلاف دو نیمرخ مشاهداتی و محاسباتی هستیم. جدول ۴ مقادیر درصد خطای نسبی را برای نیمرخهای مشاهداتی و محاسباتی جریان در زمانهای مختلف را نشان میدهد. همانطور که اشاره شد حداکثر خطا در بین تمامی زمانها و تمامی نقاط در زمان ۴۰۰ ثانیه و در نقطه پایانی نیمرخ مشاهده میگردد. جدول ۵ نیز مقادیر نقطه پایانی نیمرخ مشاهده میگردد. جدول ۵ نیز مقادیر معوسط درصد خطای نسبی را نشان میدهد که معادل مراکثر برای زمانهای ۱۳/۲۰، ۹۶/۸ و ۹/۹۳ درصد، و به ترتیب برای زمانهای ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰ ثانیه می باشند.





جدول ۴ متوسط درصد خطای نسبی برای زمانهای مختلف

	Tab	ole 4 Average p	ercentage of 1	relative error	for different ti	mes	
Time (s)		100	200	300	400	500	600
average erro	or %	4.88	3.90	8.05	13.20	8.46	9.93

Journal of Hydraulics
??(?), ????
11

بررسیهای به عمل آمده مشخص شد متوسط خطای محاسباتی عمق در زمانهای ۱۰۰، ۲۰۰، ۳۰۰، ۴۰۰، ۵۰۰ و ۶۰۰ ثانیه به ترتیب برابر ۴/۸۸، ۳/۹، ۵/۸۸، ۱۳/۲ ما۴۶ و ۹/۹۳ درصد میباشد. مشاهده میشود بیشترین خطای محاسباتی در ۴۰۰ ثانیه رخ داده است و میتوان گفت زمانی است که بیشترین سرعت را شامل میشود. همچنین تقریبا در تمام نیمرخهای محاسباتی عمق محاسباتی کمتر از عمق مشاهداتی میباشد و از طرفی دیگر حداکثر خطا در هر یک از پروفیلهای نیز در نقاط پایانی محیط متخلخل که سرعت دارای بیشترین مقدار و بیشترین زاویه است، رخ داده است.

#### ۷- منابع

Abadelalim, E. Khwaiter, A,E. Faisal, K. Mohammad, A, R. Amer, A. Stephen, D, B. (2022). Characterization of a Non-Darcy Flow and Development of New Correlation of Non-Darcy Coefficient. Energies. 15,7616.

Ahmed, N., & Sunada, D. K. (1969). Nonlinear flow in porous media. Journal of the Hydraulics Division, 95(6), 1847–1858.

Cea, L.; Bladé, E. A simple and efficient unstructured finite volume scheme for solving the shallow water equations in overland flow applications. Water Resour. Res. 2015, 51, 5464– 5486.

Costabile, P.; Costanzo, C.; Macchione, F. (2009). Two-dimensional numerical models for overland flow simulations. In River Basin Management V; WIT Press: Southampton, UK, ; pp. 137–148.

Delestre, O.; James, F. (2008) Simulation of rainfall events and overland flow. In Proceedings of the X International Conference Zaragoza-Pau on Applied Mathematics and Statistics, Jaca, Spain; Volume 35. pp. 125–135.

Engelund, F. (1953). On the laminar and turbulent flows of ground water through homogeneous sand. Akad. for de Tekniske Videnskaber.

Ergun, S. (1952). Fluid flow through packed columns. Chemical Engineering Progress, 48, 89.

Ersoy, M. Lakkis, O. Townsen, P. (2020). A Saint-Venant Model for Overland Flows with Precipitation and RechargeMathematical and Computational Applications.

Fiedler, F.R.; Ramirez, J.A. (2000). A numerical method for simulating discontinuous shallow flow over an infiltrating surface. Int. J. Numer. Methods Fluids, 32, 219–239.

۶- نتیجه گیری

در این تحقیق به طور گستردهای به بررسی آزمایشگاهی و عددی ویژگیهای جریان در محیط متخلخل پرداخته شد. در بخش نخست آزمایشها در حالت ماندگار با ۱۰ دبی (دبی ۸/۵۱ تا ۲۰/۶۲ لیتر بر ثانیه) صورت گرفته و مشخصه-های جریان ثبت شد. بر این اساس منحنیهای سرعت متوسط در برابر گرادیان هیدرولیکی رسم شده و مقادیر ضرایب رابطهی فورشهایمر برای هر یک از دبیها بهدست آمد. سپس با برازش ضرایب a و d و دبی توابعی برای محاسبهی این دو ضریب بر اساس دبی ایجاد شد. در برای محاسبهی این دو ضریب بر اساس دبی ایجاد شد. در مشخصه-های جریان ثبت شد. در ادامه به منظور محاسبات عددی، از حل معادله-های سنت-ونانت با محاسبات عددی، از حل معادله-های سنت-ونانت با محاسبات مادی مشخصهها استفاده شد. بررسی نتایج به شرح زیر میباشند:

۱- دبی محاسباتی در اولین نقطه محیط متخلخل 6=x) (m)به عنوان دبی ورودی به محیط در نظر گرفته شد. نتایج حل عددی در دو حالت ضرایب ثابت و متغیر نشان میدهند که درصد خطای نسبی محاسباتی در دبی ورودی بیشینه برای حالت ضرایب ثابت ۱۳/۳۶ و در حالت ضرایب متغیر ۲/۱۶ درصد و در دبی ورودی کمینه برای ضرایب متغیر ۱/۲۶ درصد و در دبی ورودی کمینه برای حالت ثابت ۲۲ و در حالت ضرایب متغیر ۱ درصد میباشد. با توجه به اختلاف زیاد خطاها، توابع ضرایب فورشهایمر برای حل معادله حهای سنت ونانت مورد استفاده قرار گرفت.

۲- با حل معادله ها با ضرایب متغیر، هیدروگراف ها در نقاط طول محیط متخلخل مورد بررسی قرار گرفتند. نتایج نشان میدهند بیشنیه دبی هر چه در طول محیط متخلخل پیش میرویم مقادیرکمتری میباشد و همچنین در زمان جلوتری رخ میدهد. به طوریکه در نقطه ورودی پیک دبی ۲۰/۸ لیتر بر ثانیه و در زمان حدود ۲۰۰ ثانیه رخ داده است و در نقطه خروجی جریان پیک ۱۸ لیتر بر ثانیه در حدود ۳۰۰ ثانیه رخ داده است. در پایان پس از گذشت حدود ۶۰۰ ثانیه جریان مجدد به حالت ماندگار باز می گردد.

۳- مقادیر عمق محاسباتی در هر نقطه و در هر لحظه نیز مورد ارزیابی قرار گرفتند و با توجه به ثبت این مقادیر در آزمایشگاه امکان محاسبهی مقادیر خطا وجود دارد. با Norouzi, H. Bazargan, J. Taheri, S. Karimipour, A. (2023). Investigation of unsteady non-Darcy flow through rockfill material using Saint–Venant equations and particle swarm optimization (PSO) algorithm. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment.

Sidiropoulou, M. G., Moutsopoulos, K. N., & Tsihrintzis, V. A. (2007). Determination of Forchheimer equation coefficients a and b. Hydrological Processes: An International Journal, 21(4), 534–554.

Stephenson DJ (1979) Rockfill in hydraulic engineering. Elsevier scientific publishing compani, Distributors for the United States and Canada.

Ward, J. C. (1964). Turbulent flow in porous media. Journal of the Hydraulics Division, 90(5), 1–12.

Yang, B. Yang, T. Xu, Z. Liu, H. Shi, W. Yang, X. (2018). Numerical Simulation of the Free Surface and Water Inflow of a Slope, Considering the Nonlinear Flow Properties of Gravel Layers: a Case StudyR. Soc, Open SCI . 5:172109

Hager, W, H. Castro-Orgaz, O. Hutter, K. (2019). Corresponding between De Saint-Venant and Boussinesq. 1: Birth of the Shallow Water Equation. Computes Rendus Mecanique. 347: 632-662.

Hansen, D. and Garga, V. K. and Townsend, D. R. (1995). "Selection and application of a onedimensional non-Darcy flow equation for two dimensional flow through rockfill embankment." Can. - Geotech. J., Vol.33, PP.223-232.

Hosseini, Seyed Mahmood, and D. M. Joy. (2007). Development of an unsteady model for flow through coarse heterogeneous porous media applicable to valley fills. International Journal of River Basin Management 5.4: 253-265.

Lenc, A. Zeighami, F. Di Fendevico, V. (2022). Effective Forchhymer Coefficient for Layered Porous Media. Transport in Porous Media, 144, 459-480.

Li, J. Chen, C. (2020). Numerical Simulation of the Non-Darcy Based on Random Fractal Micronetwork Model for Low Permebility Sandstone Gas Reservoir. Geofluids.