

استفاده از روش عددی بدون شبکه المان طبیعی در حل معادلات حاکم بر سیال با سطح آزاد

امید غیاثی طرزی¹، محمد ذونعمت کرمانی^{2*}

1- دانشجوی کارشناسی ارشد سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات سیرجان

2- استادیار، بخش مهندسی آب، دانشگاه شهید باهنر کرمان

zounemat@uk.ac.ir

چکیده - تحقیق پیش رو توانایی روش عددی بدون شبکه المان طبیعی را در شبیه‌سازی جریان با سطح آزاد و همچنین سازگاری روش جهت‌مند تعمیم مرتبه دوم طرح ون-لیر را بر روی روش حل المان طبیعی بیان می‌دارد. اساس روش المان طبیعی بر پایه درونیاب همسایه طبیعی است که در این تحقیق درونیاب سیبسون بکار گرفته می‌شود. همچنین به دلیل مناسب نبودن انتگرال‌گیری نقاط گوسی، در پژوهش حاضر از شیوه انتگرال گره‌ای استفاده می‌شود. صحت‌سنجی روش حل ارائه شده برای جملات پخش معادلات توسط مسأله دوبعدی انتقال حرارت و برای جملات جابجایی توسط مسأله یک بعدی شکست سد صورت می‌گیرد. در ادامه، شبیه‌سازی جریان با سطح آزاد بر روی بستر ناهموار در کانال مورد تحلیل قرار می‌گیرد و نتایج بدست آمده با نتایج حل تحلیلی مقایسه می‌شود. افزون بر این، مسأله جریان آب درون پارشال فلوم شبیه‌سازی می‌شود و نتایج بدست آمده با برداشت‌های آزمایشگاهی مقایسه می‌گردند. مقایسه نتایج حاصل از مدل‌سازی و حل تحلیلی توسط معیار جذر میانگین مربعات خطای نرمال شده برای مسائل درجه حرارت، شکست سد و عبور جریان سطح آزاد از روی برآمدگی مقدار خطای کمتر از 2 درصد و مقایسه خطای مدل عددی و برداشت‌های آزمایشگاهی برای مسأله پارشال فلوم 18 درصد را نشان می‌دهد. همچنین مقدار ضریب تعیین برای سه مسأله اول بیش از 0/99 و برای مسأله پارشال فلوم 0/90 است که مبین قابلیت بالای مدل عددی در شبیه‌سازی جریان سطح آزاد می‌باشد.

کلیدواژگان: معادلات آب‌های کم‌عمق، روش بدون شبکه المان طبیعی، درونیاب سیبسون، انتگرال‌گیری گره‌ای، طرح جهت‌مند ون-لیر.

1- مقدمه

جریان درون سیلاب‌دشت اشاره کرد. به کار بردن این معادلات در شبیه‌سازی جریان آب‌های کم‌عمق، علاوه بر تولید نتایج قابل قبول، موجب کاهش چشمگیر هزینه محاسباتی نسبت به حالت سه بعدی می‌شود. از آنجا که حل تحلیلی این معادلات به دلیل شرایط مرزی پیچیده غیر ممکن است، لذا از روش‌های عددی برای حل این معادلات استفاده می‌شود. امروزه روش‌های اجزای محدود و احجام محدود به صورت گسترده به عنوان روش

بدون شک یکی از پرکاربردترین مدل‌های عددی در حوزه مهندسی هیدرولیک، رودخانه و دریا معادلات آب‌های کم-عمق می‌باشند. این معادلات حاصل دوبعدی‌سازی معادلات ناویه-استوکس هستند و برای مدل‌سازی رفتار جریان‌هایی که عمق ناچیزی نسبت به ابعاد دیگر خود دارا می‌باشند، ارائه شده‌اند. از جمله این جریان‌ها می‌توان به جریان حاکم بر رودخانه‌ها و کانال‌های عریض، تالاب‌ها و

کاربر) در مسائل با شبکه‌بندی غیر یکنواخت از دیگر خصوصیات روش المان طبیعی است. از مزایای قابل توجه این روش، وجود درونیاب همسایه طبیعی است که با توجه به نحوه انتخاب گره‌های همسایه و مقدار تأثیر آنها، اثر زیادی در عملکرد روش المان طبیعی می‌گذارد. بر خلاف بیشتر روش‌های بدون شبکه که فاصله گره‌ها اصلی‌ترین عامل تعیین‌کننده است، در این روش علاوه بر فاصله، تجمع گره‌ها سهم بسیار زیادی در انتخاب و مقدار تأثیر گره‌های همسایه دارد (Alfaro et al., 2007).

شایان ذکر است که انتگرال‌گیری‌ها در روش المان محدود به روش گوسی⁹ به دو دلیل با خطا همراه است؛ 1) عدم انطباق دامنه تأثیر توابع شکل با محدوده‌های انتگرال‌گیری (مثلث‌های دلاونی¹⁰) و 2) چند جمله‌ای نبودن توابع شکل در روش مزبور (Chen et al., 2001). برای رفع این مشکل می‌توان از انتگرال‌گیری گره‌ای¹¹ استفاده کرد. با این کار و در صورت پایداری انتگرال گره‌ای، علاوه بر کاهش حجم عملیات، دقت جواب‌ها نیز بیشتر خواهد شد. در زمینه موارد مطالعاتی مشابه موضوع پژوهش حاضر، می‌توان تحقیقات زیر را برشمرد. چن و همکاران (2001) و یو و همکاران (2004) و همچنین کوتو و همکاران (2003) به شبیه‌سازی جریان آب‌های کم‌عمق با استفاده از روش‌های بدون شبکه پرداخته‌اند (Cueto et al., 2003; Chen et al., 2001; You et al., 2004). سولنثالر و همکاران (2001) تحلیل معادلات آب‌های کم‌عمق با استفاده از روش هیدرودینامیک ذرات هموار شده را مورد بررسی قرار دادند (Solenthaler et al., 2011). لین و آتلوری (2001) با استفاده از روش بدون شبکه پتروو-گالرکین معادلات ناویه-استوکس تراکم‌ناپذیر آب‌های کم‌عمق را شبیه‌سازی نمودند (Lin et al., 2001). دربانی و همکاران (2011) با روش پایداری انتگرال گره‌ای در تولید ماتریس سختی جریان آب‌های کم‌عمق را مدل‌سازی نمودند. برای این منظور ایشان از روش بدون شبکه المان طبیعی استفاده کردند. افزون بر شکل کامل معادلات غیرخطی آب‌های کم‌عمق، اثر کوریولیس نیز در

عددی در شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روش‌ها قابلیت حل مسأله با شرایط مرزی پیچیده را دارند، اما در این روش‌ها وابستگی زیادی به نحوه و شکل شبکه‌بندی وجود دارد، و همچنین در مسائل با مرز متحرک این روش‌ها نیاز به تولید شبکه دوباره دارند که عملیات تولید شبکه بسیار وقتگیر است (Cueto et al., 2003; Zounemat-Kermani et al., 2010).

اخیراً علاوه بر روش‌های فوق، رویکردی متفاوت برای تحلیل معادلات و گسسته‌سازی هندسه محاسباتی مورد استفاده قرار می‌گیرد، که به نام‌های روش‌های مبتنی بر ذره و بدون شبکه شناخته می‌شوند. در این روش‌ها وابستگی به شبکه کمتر است. از جمله این روش‌ها می‌توان به روش بدون المان گالرکین¹، روش گره‌های ماده²، روش بدون شبکه محلی-پتروو-گالرکین³ و روش المان طبیعی⁴ اشاره کرد (Liu, 2009).

بیشتر روش‌های بدون شبکه بر پایه درونیابی و تقریب اطلاعات می‌باشند، مانند روش هیدرودینامیک ذرات هموار شده⁵ که یک روش پرکاربرد در شاخه سیالات است. اما یک ایراد اساسی در اینگونه از روش‌ها عدم توانایی در درونیابی نقاط گره‌ای است، که این نقطه ضعف اعمال شرایط مرزی را دچار مشکل می‌کند (Cueto et al., 2003). در همین راستا، لیو (2003) استفاده از روش پنالتی و همچنین روش ضرایب لاگرانژ را برای اعمال شرایط مرزی ضروری در روش بدون المان گالرکین و روش هیدرودینامیک ذرات هموار پیشنهاد داد (Liu, 2003).

روش المان طبیعی بر پایه روش گالرکین⁶ بنا شده است و از درونیاب همسایه طبیعی⁷ استفاده می‌کند؛ به دلیل دارا بودن خصوصیت دلتای کرونگر⁸ و همچنین توابع شکل خطی در مرزها، در روش مزبور می‌توان شرایط مرزی ضروری را شبیه روش اجزای محدود اعمال کرد. همچنین تقریب خوب و مناسب (بدون نیاز به تعریف پارامتر توسط

1. Element Free Galerkin
2. Material Point Method
3. Meshless Local Petrov Galerkin
4. Natural Element Method
5. Smoothed Particle Hydrodynamics
6. Galerkin
7. Natural Neighbor Interpolation
8. Delta Kronecker Function

9. Guassian Quadrature

10. Delaunay Triangles

11. Nodal Integration

نواحی سلول‌های ورونوی نامیده می‌شود. برای یک مجموعه از نقاط دیاگرام ورونوی سطح را به مناطقی تقسیم‌بندی می‌کند که برای هر نقطه از مجموعه نقاط یک منطقه تعریف می‌شود، به طوری که تمام نقاط این منطقه به نقطه تولید کننده آن منطقه نزدیکتر است (شکل 1-الف).

$$V_i = \{x \in R^d : d(x, x_i) \leq d(x, x_j) \quad \forall j \neq i\} \quad (1)$$

در رابطه (1) R^d مجموعه نقاط در فضای d بعدی می‌باشد و عملگر d فاصله بین نقاط را نشان می‌دهد. مثلث‌بندی دلاونی برای مجموعه‌ای از نقاط در یک صفحه به صورتی است که هیچ نقطه‌ای از مجموعه مورد نظر داخل هیچیک از دوایر محاطی بر مثلث‌ها قرار ندارد. این مثلث‌بندی کمینه زاویه‌های مثلث‌ها را به بیشترین مقدار ممکن می‌رساند و به این ترتیب از به وجود آمدن مثلث‌های با زوایای تند جلوگیری می‌کند. در شکل 1-ب رابطه بین مثلث‌بندی دلاونی و دیاگرام ورونوی به این صورت است که از وصل نمودن مراکز مثلث‌های هم‌جوار در مثلث بندی دلاونی تشکیل دیاگرام ورونوی می‌دهد، همچنین از اتصال نقاط همسایه در دیاگرام ورونوی مثلث-های دلاونی پدید می‌آیند (شکل 1).

2-1-2- تابع شکل

تابع شکل در روش المان طبیعی بر اساس دیاگرام مرتبه دوم ورونوی تعریف می‌شود.

$$V_{k,i} = \left\{ x \in R^d : d(x, x_k) \leq d(x, x_i) \leq d(x, x_j) \right. \\ \left. \forall j \neq i, k \right\} \quad (2)$$

اگر ناحیه‌ای که در سلول ورونوی گره i قرار داشته باشد و به نقطه k نزدیکتر باشد با $V(k,i)$ معرفی شود و مساحت این ناحیه با $A(k,i)$ نمایش داده شود، تابع شکل سیبسون برای گره z در نقطه k به صورت رابطه (3) محاسبه می‌شود (Cueto et al., 2003).

$$\phi_j(x_k) = \frac{A_{k,j}}{\sum_i A_{k,i}} \quad (3)$$

دامنه تأثیر تابع شکل گره z برابر با سطح روی تمام دواير محاطی است که از روی گره z عبور می‌کنند (شکل 1-ج).

معادلات حاکم در نظر گرفته شد. برای حل معادلات از رویکرد لاگرانژی و بر اساس شیوه مشخصات استفاده شد (Darbani et al., 2011).

اگرچه حل لاگرانژی معادله سبب سادگی در مسایل با مرز متحرک می‌شود، اما در حل اوپلری معادلات بدلیل ثابت ماندن گره‌ها، ماتریس‌های سختی و جرم و ... همواره ثابت می‌مانند و در نتیجه سرعت حل بیشتر می‌شود. در این مقاله معادلات جریان آب‌های کم عمق به روش المان طبیعی و با در نظر گرفتن رویکرد اوپلری حل شده است؛ ماتریس سختی به روش پایدارسازی انتگرال گره‌ای و همچنین سایر قسمت‌های معادله به روش انتگرال گره‌ای حل می‌شود.

2- مواد و روش‌ها

2-1- معرفی روش المان طبیعی

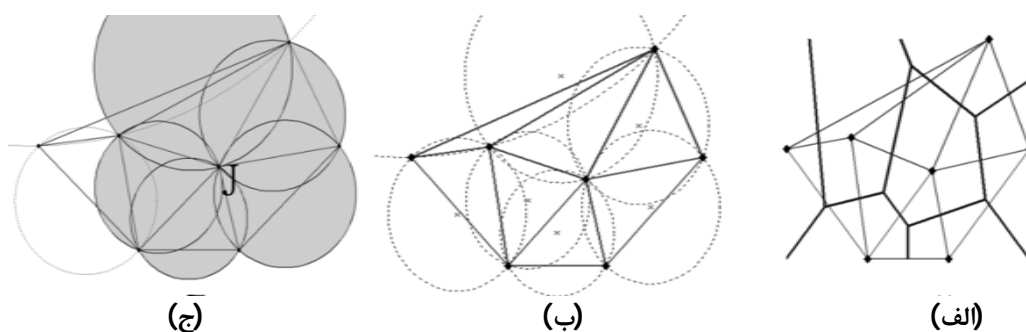
حل به روش المان طبیعی بر پایه روش گالرکین است، بطوری که توابع آزمون¹ همان توابع درونیاب همسایه طبیعی هستند. درونیاب همسایه طبیعی بر اساس مفهوم مثلث‌بندی دلاونی، دیاگرام ورونوی و دیاگرام ورونوی مرتبه دوم بنا شده است. توابع شکل را می‌توان بر اساس دو روش پرکاربرد سیبسون² و لاپلاس³ بدست آورد.

به منظور دریافت اطلاعات بیشتر در رابطه با این دو روش می‌توان به مقاله کوتو و همکاران (2001) مراجعه نمود (Cueto et al., 2003). روش سیبسون بر اساس نسبت مساحت قلمرو نقطه مفروض به مساحت قلمرو نقاط گره‌ای پایه‌گذاری شده است و همین امر باعث شده که توابع شکل سیبسون دارای نرمی و انعطاف بیشتری نسبت به باقی روش‌ها باشند. به همین علت در این مقاله از روش سیبسون برای تشکیل توابع شکل استفاده شده است.

2-1-1- دیاگرام ورونوی و مثلث بندی دلاونی

در علم ریاضیات دیاگرام ورونوی⁴ روشی برای تقسیم فضا فضا به تعدادی ناحیه می‌باشد. در این دیاگرام به هر مجموعه‌ای از نقاط ناحیه‌ای اختصاص داده می‌شود. این

1. Trial Functions
2. Sibson
3. Laplace
4. Voronoi Diagram



شکل 1 رابطه بین گره‌ها در دیاگرام ورونی و مثلث‌بندی دلاونی؛ الف) دیاگرام ورونی ب) مثلث‌بندی دلاونی و دوایر محاطی ج) دامنه تأثیر تابع شکل گره J

در معادلات فوق h برابر عمق جریان، U سرعت متوسط‌گیری شده جریان، z_b تراز بستر، τ_b اصطکاک بستر و ν ضریب پخش لزجت سیال می‌باشد. شایان ذکر است که در معادلات فوق از اثر کوریلویس صرف‌نظر شده است.

2-2-1- صورت ضعیف شده² معادله

از آنجا که روش المان طبیعی بر اساس روش گالرکین پایه‌گذاری شده است، لذا نیازمند ضعیف‌سازی صورت معادله است که به حالت معادلات ضعیف شده (5) در می‌آید.

$$\int N_i \left(\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hU_j)}{\partial x_j} \right) = 0$$

$$\int N_i \left(\frac{\partial (hU_i)}{\partial t} + \frac{\partial (hU_i U_j)}{\partial x_j} \right)$$

$$= \int N_i \left(-gh \frac{\partial h}{\partial x_i} - gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu h \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{\rho} \tau_{b,i} \right) \quad (6)$$

که N_i تابع شکل سیسئون می‌باشد. لازم به ذکر است که به منظور گسسته‌سازی معادلات، در فرایند ساخت شکل ضعیف معادلات فوق بصورت پایستار حل شده‌اند.

2-3- انتگرال‌گیری به روش انتگرال‌گره‌ای

در هنگام ساخت صورت ضعیف عبارات بخش غیردائمی جریان $\left(\frac{\partial (hU_i)}{\partial t} \right)$ و همچنین اصطکاک و شیب بستر،

همان‌طور که از شکل 1- ج مشخص است میزان و محدوده تأثیر توابع شکل در روش المان طبیعی تنها به فاصله وابسته نیست. از سایر ویژگی‌های تابع شکل روش المان طبیعی می‌توان به پایداری خطی، قسمت‌بندی یکپارچه و منطبق بودن بر دلتای کروئکر اشاره کرد (Darbani et al., 2011):

$$u(x) = \sum_i \phi_i(x) u_i, \quad \phi_i(x_j) = \delta_{ij}, \quad \sum_i \phi_i(x) = 1 \quad (4)$$

به منظور آگاهی بیشتر در رابطه با خصوصیات انواع توابع شکل مورد استفاده در روش المان طبیعی، خواننده به مقاله کوتو (2003) ارجاع داده می‌شود. (Cueto et al., 2003).

2-2- معادلات حاکم

معادلات حاکم در تحقیق پیش‌رو، معادلات جریان آب‌های کم‌عمق می‌باشند که دربرگیرنده معادلات پیوستگی و مومنتم (اندازه حرکت) در جهات افقی X و Y هستند. این معادلات منتج از معادلات سه‌بعدی تراکم ناپذیر ناویه‌استوکس¹ می‌باشند که در جهت قائم انتگرال‌گیری شده‌اند و به صورت رابطه (5) حاصل شده است (Zounemat-Kermani et al., 2010):

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (hU_j)}{\partial x_j} = 0; \quad j = 1, 2$$

$$\frac{\partial (hU_i)}{\partial t} + \frac{\partial (hU_i U_j)}{\partial x_j} = gh \frac{\partial h}{\partial x_i} - gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu h \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{\rho} \tau_{b,i}, \quad j = 1, 2 \quad (5)$$

(You et al., 2004).

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial N_i}{\partial x} dA = \overline{\frac{\partial N_i}{\partial x}} \cdot \Lambda_k$$

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial N_i}{\partial x} dA \xrightarrow{\text{greenTheory}} = \int_{C_k} N_i dy$$

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} dA = \overline{\frac{\partial N_i}{\partial x}} \cdot \overline{\frac{\partial N_j}{\partial x}} \cdot \Lambda_k$$

$$= \frac{\int_{C_k} N_i dy}{\Lambda_k} \cdot \frac{\int_{C_k} N_j dy}{\Lambda_k} \cdot \Lambda_k = \frac{\left(\int_{C_k} N_i dy \cdot \int_{C_k} N_j dy \right)}{\Lambda_k} \quad (12)$$

و بطور مشابه:

$$\int_{\Omega_k} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} dA = \frac{\left(\int_{C_k} N_i dx \cdot \int_{C_k} N_j dx \right)}{\Lambda_k} \quad (13)$$

و برای انتگرال‌های خطی می‌توان از روش نقاط گوسی استفاده کرد.

$$\int_{C_k} N_i dx = \sum_{x_g}^{N_{gauss}} N_i(x_g) \omega(x_g) \quad (14)$$

که در رابطه فوق w تابع وزن نقاط گوسی می‌باشد. در نهایت گسسته‌سازی معادله (6) بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$M \times \frac{\partial \{h\}}{\partial t} + H_j \times \{q_j\} = 0$$

$$M \times \left(\frac{\partial \{q_i\}}{\partial t} + g \bar{h} \frac{\partial \{z_b\}}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \tau_{b,i} \right) + H_j \times (\{U_i q_j\})$$

$$+ H_i \times (0.5g\{h^2\}) - K_j \times (v_e \cdot \{U_i h\}) \quad , \quad j=1,2 \quad (15)$$

که q دبی در واحد عرض است و کمیت‌های درون $\{ \}$ معرف ماتریس ستونی مقادیر کمیت مورد نظر روی گره-های مربوطه می‌باشد.

4-2- پایدارسازی حل

در روند حل عددی عبارت جابجایی در غالب روش‌هایی که بصورت مرکزی به گسسته‌سازی معادلات می‌پردازند (برای مثال روش تفاضل محدود و روش احجام محدود) اغتشاشاتی ناخواسته ایجاد می‌شود که این اغتشاشات علاوه بر تولید خطا می‌توانند در برخی موارد (در صورت عدم مستهلک‌سازی) موجب ناپایداری روند حل گردند. در

ماتریس جرمی مطابق زیر پدید می‌آید.

$$M_{ij} = \int_{\Omega} N_i N_j dA \quad (7)$$

برای حل انتگرال فوق بصورت گره‌ای می‌توان از مساحت سلول‌های ایجاد شده توسط الگوریتم ورونوی و به صورت رابطه (8) استفاده کرد (Bueche et al., 2000):

$$\int_{\Omega} N_i dA = \Lambda_i \times N_i(x_i) = \Lambda_i = \text{area voronoi cell (i)}$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega} N_i N_j dA = \Lambda_i \times N_i(x_i) \times N_j(x_j) \Rightarrow M_{ij} = \begin{cases} \Lambda_i & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (8)$$

در شکل ضعیف شده عبارات جابجایی $\left(\frac{\partial(hU_i U_j)}{\partial x_j} \right)$

انتگرال به صورت رابطه (9) درمی‌آید:

$$H_{(k)ij} = \int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x_k} \quad (9)$$

که k نشان دهنده جهت مختصات است. حل انتگرال فوق به روش انتگرال‌گیری گره‌ای به صورت رابطه (10) انجام می‌گیرد.

$$\int_{\Omega} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dA \stackrel{(N_i=1 \text{ on Voronoi Cell } i)}{=} \int_{\Omega_i} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dA = \int_{\Omega_i} \frac{\partial N_j}{\partial x} dA$$

$$\int_{\Omega_i} \frac{\partial N_j}{\partial x} dA = \int_{C_i} N_j dy \quad (10)$$

در رابطه فوق برای انتگرال‌گیری گره‌ای مطابق رابطه (8) تابع شکل N_i در محدوده ورونوی مربوط به گره i برابر با واحد و در سایر نقاط برابر با صفر در نظر گرفته شده است، لذا محدوده انتگرال‌گیری Ω به محدوده قلمرو ورونوی Ω_i مربوط به گره i تبدیل می‌شود و در نهایت انتگرال سطحی با استفاده از قضیه گرین به انتگرال مرزی تبدیل می‌گردد.

همچنین انتگرال ایجاد شده در شکل ضعیف شده عبارات

$$\text{پخش} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \left(v h \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \right) \text{ به شکل رابطه (11) می‌باشد:}$$

$$K_{(k)ij} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x_k} \frac{\partial N_j}{\partial x_k} dA \quad (11)$$

در روش انتگرال گره‌ای بایستی مقادیر مشتقات توابع شکل بر روی گره‌ها مشخص باشد و از آنجا که این مقادیر روی گره‌ها مشخص نیست، لذا می‌توان برای تعیین مقادیر مشتقات از روش تثبیت هموارسازی تنش استفاده کرد

$$Q_i^* = Q_i + N_i(k) \cdot \Delta^* Q_i \quad (19)$$

در رابطه فوق $\Delta^* Q_i$ محدودکننده شیب خوانده می‌شود که با توجه به جهت جریان بر اساس کمینه و یا بیشینه مقادیر گرادیان سرعت و شیب تغییرات Q در گره i بدست می‌آید (Gomez, 2005).

2-5- گسسته‌سازی زمانی

گسسته‌سازی جملات زمانی در روش المان طبیعی همانند سایر روش‌های احجام و اجزاء محدود توسط الگوی تفاضل محدود انجام می‌گیرد. در این تحقیق از روش چند گامی ریچ مایر-لاکس-وندروف در دو مرحله زمانی برای پایدارسازی حل استفاده شده است (Zienkiewicz et al., 2005).

a)

$$\frac{h^{n+\frac{1}{2}} - h^n}{\Delta t / 2} + \left(\frac{\partial(hU_j)}{\partial x_j} \right)^n = 0$$

$$\frac{(hU_i)^{n+\frac{1}{2}} - (hU_i)^n}{\Delta t / 2} = \left(-\frac{\partial(hU_i U_j)}{\partial x_j} - gh \frac{\partial h}{\partial x_i} - gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(vh \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{\rho} \tau_{b,i} \right)^n$$

b)

$$\frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} + \left(\frac{\partial(hU_j)}{\partial x_j} \right)^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

$$\frac{(hU_i)^{n+1} - (hU_i)^n}{\Delta t} = \left(-\frac{\partial(hU_i U_j)}{\partial x_j} - gh \frac{\partial h}{\partial x_i} - gh \frac{\partial z_b}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(vh \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) - \frac{1}{\rho} \tau_{b,i} \right)^{n+\frac{1}{2}} \quad (20)$$

که در معادلات فوق n نماینده گام زمانی است.

2-5-1- محاسبه گام زمانی

در حین فرایند تحلیل عددی، در صورتی که گام زمانی بیش از حد مجاز در نظر گرفته شود، منجر به ناپایداری و واگرا شدن نتایج حل خواهد گشت. لذا تعیین حد مجاز برای تعیین گام زمانی الزامی است. بیشینه گام زمانی مجاز برای گره i با استفاده از معیار CFL به صورت رابطه

این حالت، برای اجتناب از ناپایداری روند حل، به کارگیری روش‌های پایدارسازی حل پیشنهاد می‌شود. شیوه‌های پایدارسازی به دو صورت کلی روش‌های مرکزی و روش‌های جهت‌مند ارائه شده‌اند، که در این زمینه کارایی و قدرت بیشتر روش‌های جهت‌مند نسبت به روش‌های مرکزی گزارش شده است (Patankar, 1980). در اینجا به نحوه پیاده‌سازی روش جهت‌مند مرتبه دوم ون-لیر پس از تشریح روش مرتبه اول بر روی حل روش المان طبیعی پرداخته می‌شود.

با در نظر داشتن معادله حاکم به صورت برداری در فضای محاسباتی می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \sum_i G_i \quad (16)$$

از رابطه (10) گسسته‌سازی عبارت جابجایی، می‌توان رابطه (17) را نوشت:

$$\int_{\Omega_i} N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} dA = \int_{C_i} N_j dy \Rightarrow \int_{\Omega_i} N_i \frac{\partial F_x}{\partial x} dA = \int_{C_i} F_x dy \quad (17)$$

که F_x عباراتی را شامل می‌شود که مشتق مرتبه اول آنها نسبت به x در معادله قرار دارد.

$$\int_{C_i} F_x dy = \sum_k \left(\{N(k)\}^T \times \{F_x\} \right) \Delta y_k - \frac{1}{2} \underbrace{|M| \Delta Q}_{upwind}$$

$$k = \text{edges of cell}(i)$$

$$M = f(\tilde{h}, \tilde{c}, \tilde{q}_x, \tilde{q}_y)$$

$$\tilde{h} = \{N(k)\}^T \times \{h\} \quad , \quad \tilde{c} = \sqrt{g\tilde{h}}$$

$$\tilde{q}_x = \{N(k)\}^T \times \{q_x\} \quad , \quad \tilde{q}_y = \{N(k)\}^T \times \{q_y\} \quad (18)$$

که $\{N(k)\}$ ماتریس ستونی متوسط مقدار توابع شکل روی مرز k و ΔQ اختلاف مقدار کمیت Q روی گره‌های دو طرف مرز k را بیان می‌دارد. به همین ترتیب می‌توان برای گسسته‌سازی عبارت انتقالی در جهت Y عمل نمود. در تحقیق حاضر از روش جهت‌مند تعمیم مرتبه دوم طرح ون لیر برای بالا بردن دقت استفاده شده است. در پیاده‌سازی تعمیم مرتبه دوم طرح ون لیر در رابطه (18) تمامی کمیت‌های $(F_x, M, \Delta Q)$ روی هر مرز k از گره i بر اساس Q_i^* ساخته می‌شود:

(21) محاسبه می‌شود:

$$\Delta t_i = CFL \frac{d_i}{|U|_i + \sqrt{g \cdot h_i}} \quad (21)$$

در رابطه فوق CFL ضریب کورانت-فردریخ-لوی می‌باشد و به‌عنوان ضریب محدودکننده در پایداری زمانی استفاده می‌شود که در تحقیق حاضر برابر با واحد در نظر گرفته شده است (Zienkiewicz et al., 2005). در رابطه (21) d_i نسبت مساحت به محیط محدوده تحت قلمرو گره i است. $|U|_i$ برابر با اندازه بردار سرعت در گره i می‌باشد؛ h_i ارتفاع در گره i و g نشان دهنده شتاب ثقل است. پس از محاسبه بیشینه گام زمانی مجاز برای هر گره، گام زمانی حل با توجه به معیار زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\Delta t \leq \min(\Delta t_i) \quad (22)$$

2-6- اعمال شرایط مرزی

در تحقیق حاضر به دلیل بسته بودن مرز در تمامی مسائل مورد مطالعه، تمام نقاط مرزی ثابت می‌باشند. همچنین شرط مرزی از نوع درিশله است، یعنی در تمامی مرزهایی که احتیاج به اعمال شرط مرزی دارند، مقدار متغیر در گره‌های مرزی تعیین می‌شود. با توجه به اینکه از ویژگی‌های درونیاب همسایه طبیعی رفتار خطی آن در نواحی مرزی است، می‌توان گفت در نواحی مرزی، تابع شکل المان طبیعی دقیقاً مانند تابع شکل خطی اجزا محدود عمل می‌کند و به سادگی می‌توان با جانشین کردن مقدار متغیر در مرزها شرط مرزی را اعمال کرد (Cueto, 2003).

3- صحت‌سنجی مدل عددی

به منظور صحت‌سنجی مدل عددی از سه مسأله با حل تحلیلی (1) انتقال دوبعدی حرارت (به منظور صحت‌سنجی جملات پخش)، (2) شکست ناگهانی سد (به منظور صحت‌سنجی جملات جابجایی)، (3) جریان با سطح آزاد عبوری از روی مانع و (4) یک مدل با نتایج آزمایشگاهی جریان درون پارشال-فلوم استفاده شده است.

3-1- مسأله پخش حرارت

شکل کلی معادله حاکم بر مسأله پخش حرارت، معادله

لاپلاس است. در صورت لحاظ نمودن ضریب لزجت گردابه‌ای به جای ضریب پخش حرارت، جمله پخش معادلات جریان آبهای کم عمق حاصل خواهد شد. لذا به منظور ارزیابی عملکرد جمله پخش معادلات آبهای کم عمق از آزمون مسأله پخش حرارت در صفحه بهره گرفته شده است. برای این منظور با توجه به مسأله ارائه شده توسط بند (1961) یک صفحه مربع شکل با ابعاد یک متر برای انتقال حرارت در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی دما در یک ضلع برابر با 1 درجه و در سه ضلع دیگر برابر با صفر درجه سانتی‌گراد اعمال شده است. همچنین ضریب پخش برابر با واحد در نظر گرفته شده است (Cueto et al., 1961). در حل تحلیلی مسأله از سری پیشنهادهی توسط بند استفاده شده است که بصورت روابط (23) می‌باشد:

$$u(x, y) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sinh(n\pi(H-y)/L) + B_n \sinh(n\pi y/L)) \times \frac{\sin(n\pi x/L)}{\sinh(n\pi H/L)} + \frac{2}{H} \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sinh(n\pi(L-x)/H) + D_n \sinh(n\pi x/H)) \times \frac{\sin(n\pi y/H)}{\sinh(n\pi L/H)}$$

$$A_n = \int_0^L f_1(x) \sin(n\pi x/L) dx$$

$$B_n = \int_0^L f_2(x) \sin(n\pi x/L) dx$$

$$C_n = \int_0^H g_1(y) \sin(n\pi y/H) dy$$

$$D_n = \int_0^H g_2(y) \sin(n\pi y/H) dy \quad (23)$$

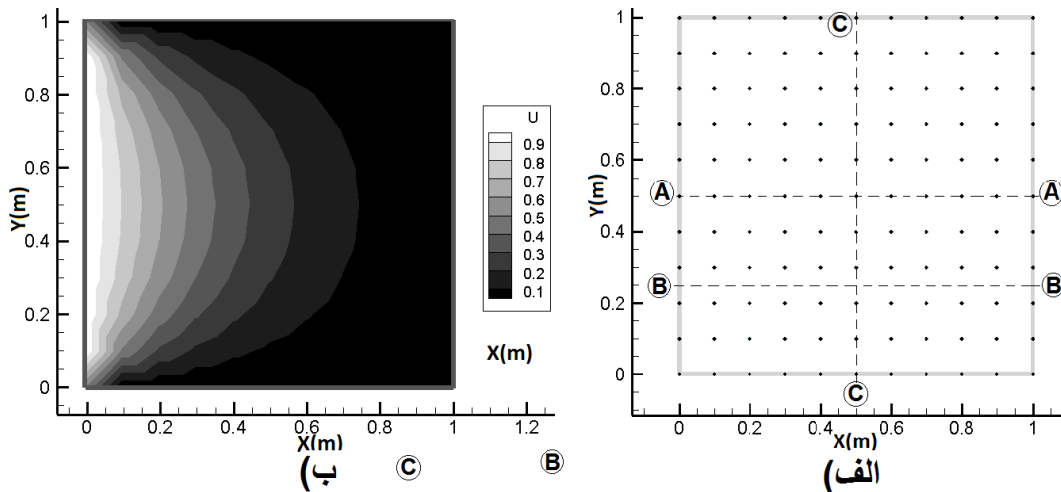
در سری فوق تکرار مراحل حل تا همگرایی نتایج با دقت 10^{-6} انجام شد. گسسته‌سازی میدان حل توسط 121 گره بصورت منظم انجام شده (شکل 2- الف) و نتایج حاصل از مدل‌سازی در شکل 2- ب در قالب منحنی‌های هم‌دما نشان داده شده است. برای بررسی صحت جواب‌های تولید شده سه مقطع برش خطی روی صفحه مورد نظر در موقعیت‌های $X=2/5m$ و $Y=5m$ ، $X=5m$ در نظر گرفته شده (شکل 2- الف) سپس نتایج حاصل از مدل عددی بر روی مقاطع ایجاد شده با جواب‌های حاصل از حل تحلیلی مسأله مقایسه شده است (شکل 3). همانگونه که از نمودارهای شکل 3 برمی‌آید، نتایج حاصل از دو روش حل

شناخته شده ترین مسائل برای محک زدن قابلیت جمله جابجایی مدل عددی در شبیه سازی جریان های با گرادیان شدید عددی است. در این بخش مدل سازی جریان حاصل از شکست ناگهانی سد ارائه شده توسط ریتر (1892) بر روی یک کانال یک بعدی با طول 2000 متر مد نظر قرار گرفته است.

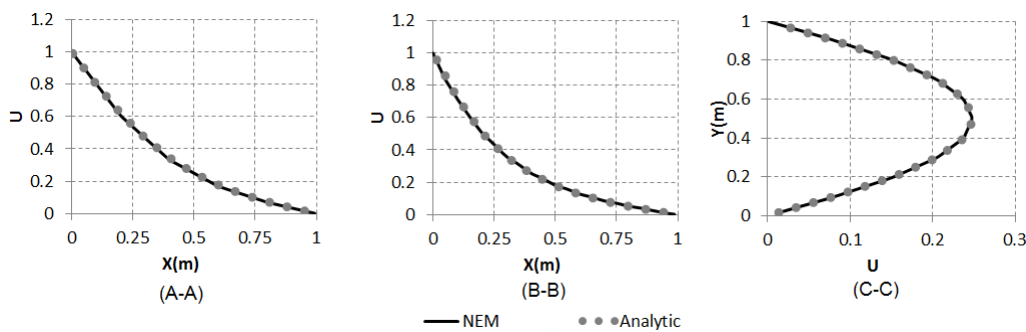
کاملاً منطبق می باشند. همچنین خطای محاسبه شده و مدت زمان صرف شده برای اجرای مدل عددی در جدول 1 قید شده است.

2-3- مسأله شکست سد

مدل سازی رفتار جریان پس از شکست سد یکی از



شکل 2 صفحه مفروض برای مسأله پخش حرارت (الف) نحوه گره گذاری و مقطع A-A، و مقطع B-B و مقطع C-C (ب) خطوط نواحی هم دما



شکل 3 منحنی تغییرات دما در مقاطع A-A, B-B, C-C در مسأله پخش حرارت با استفاده از روش عددی و حل تحلیلی

جدول 1 ارزیابی نتایج حاصل از شبیه سازی عددی در قالب معیارهای خطای جذر میانگین مربعات خطای نرمال شده و ضریب تبیین و مدت زمان اجرای برنامه مدل عددی

نام آزمون	مقطع بررسی شده	خطای NRMSE	ضریب تبیین	زمان پردازش (ثانیه)
شکست سد	---	1/7%	0/99961	146
پخش حرارت	مقطع A-A	0/5%	0/99980	
	مقطع B-B	1/6%	0/99986	22
	مقطع C-C	0/6%	0/99984	
عبور جریان پایدار از بستر ناهموار	مقطع D-D	0/7%	0/99997	840
	مقطع E-E	18/2%	0/90530	1335

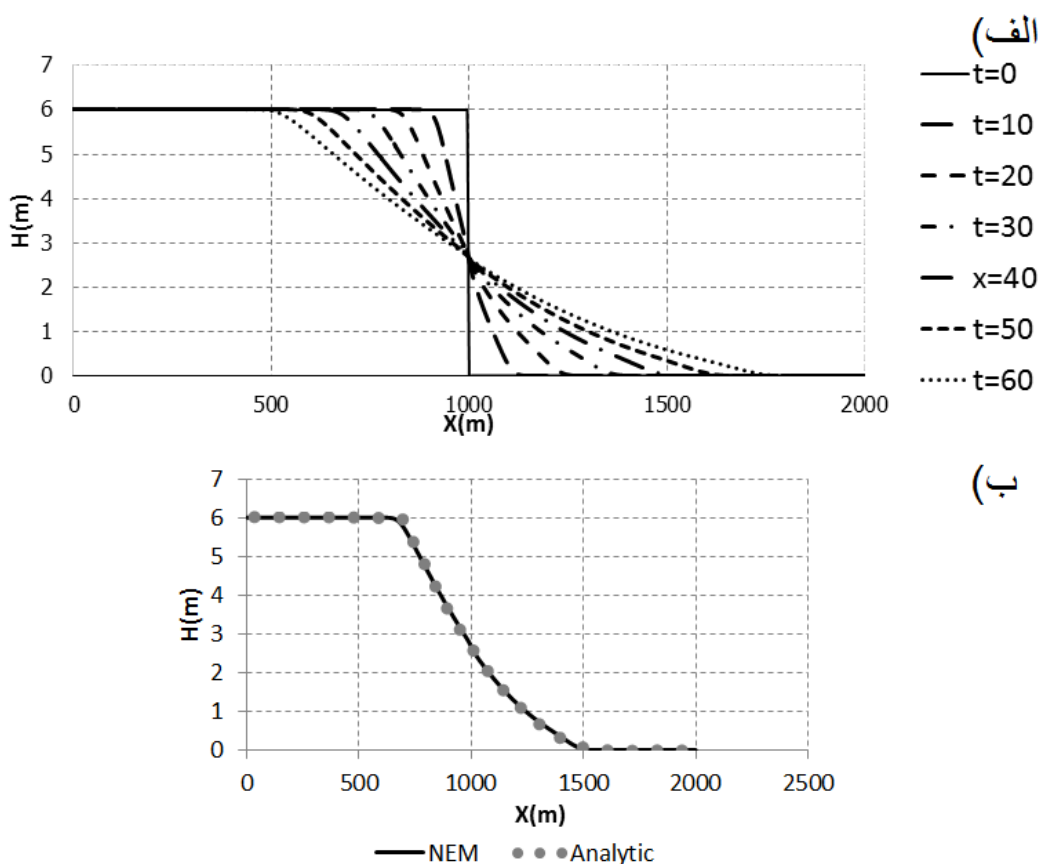
مدت زمان 40 ثانیه، با نتایج تحلیلی مسأله در شکل 4-ب مقایسه شده است. خطای محاسبه شده به صورت جذر میانگین مربعات خطای نرمال شده و ضریب تبیین در جدول 1 ارائه شده است. همچنین مدت زمان پیش پردازش و پردازش اصلی مدل نیز در جدول 1 قابل مشاهده است. نتایج ارائه شده در شکل 4 و میزان خطای محاسبه شده جذر میانگین مربعات خطای نرمال شده برابر با 1/7 درصد بیانگر قابلیت بالای مدل عددی در شبیه سازی پدیده شکست سد می باشد.

3-3- جریان عبوری از روی بستر ناهموار

هدف از انجام این شبیه سازی بررسی توانایی درون یاب سیسون در شبیه سازی ناهمواری های کانال و همچنین توانایی روش المان طبیعی در نمایش تأثیرات بستر کانال بر شکل جریان است.

در شرایط اولیه عمق آب در بالا دست (با طول 1000 متر) برابر 6 متر در نظر گرفته شده و شرایط مرزی پایین دست خشک اعمال شده است. همچنین اصطکاک بستر برابر با صفر در نظر گرفته شده است. ریتز این مسأله را به صورت تحلیلی مورد حل قرار داده است و نتایج حل وی به عنوان معیار حل در تحقیق حاضر در نظر گرفته شده است (Ritter, 1982).

برای گسسته سازی مکانی مسأله فوق کانالی با المان هایی به طول 1 متر در نظر گرفته شده است. با توجه به یک بعدی بودن محدوده حل، توابع شکل در مدل سازی مسأله حاضر به صورت خطی بدست آمدند. همچنین محدوده مرزی سلول ورونی برای هر گره به دو نقطه دو طرف گره تبدیل گشت. در شکل 4-الف پروفیل سطح آزاد آب بدست آمده از روش عددی در مدت زمان 60 ثانیه پس از شکست سد با فواصل زمانی 10 ثانیه قرار داده شده است. به منظور صحت سنجی نتایج بدست آمده، پس از گذشت



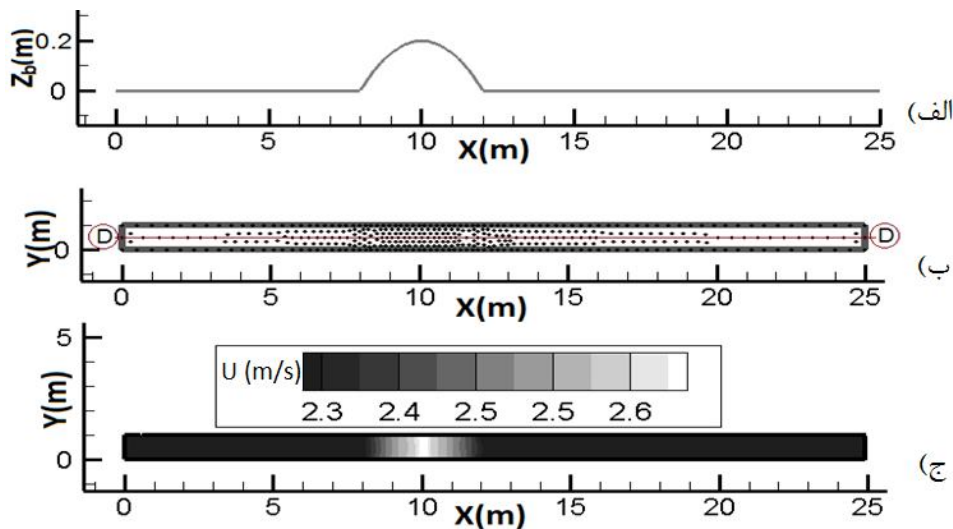
شکل 4 پروفیل تغییرات سطح آب در مسأله شکست سد؛ الف) با فواصل 10 ثانیه پس از شکست، ب) پس از گذشت 40 ثانیه از شکست در مقابل نتایج حاصل از حل تحلیلی

نواحی برآمدگی بیشتر می‌باشد. شکل 5- ج نتایج حاصل از مدل‌سازی را در قالب نواحی هم‌سرعت پس از پایدار شدن شکل جریان نشان می‌دهد. شکل 6 روند همگرایی تغییرات سرعت در مرکز برآمدگی ($X=10m$) را بر حسب زمان تا رسیدن به معیار همگرایی نتایج با دقت 10^{-6} که پس از گذشت 58 ثانیه رخ داده است، به تصویر می‌کشد. در شکل 7 نمودار تغییرات تراز سطح آب حاصل از مدل عددی با نتایج تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به پایین بودن معیار خطای جذر میانگین مربعات خطای نرمال‌شده معادل 0/7 درصد و نزدیک به واحد بودن ضریب همبستگی (0/9997) مابین نتایج عددی و تحلیلی، صحت عملکرد مدل عددی تایید می‌گردد. میزان خطای محاسبه شده و مدت زمان حل عددی در جدول 1 ارائه شده است.

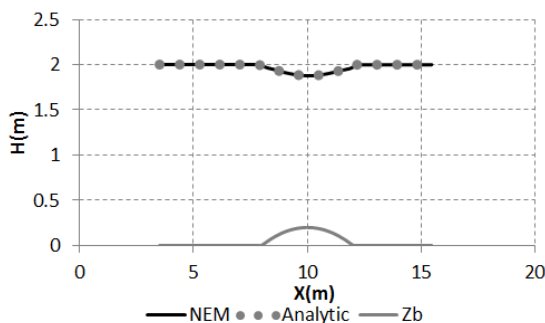
کانالی با بستر ناهموار با طول 25 متر و عرض 1 متر در نظر گرفته شده است به طوریکه برآمدگی بستر کانال از طول 8 متر شروع شده و تا طول 12 متر ادامه می‌یابد. تغییرات ارتفاع بستر کانال پیرو رابطه زیر است. شکل 5- الف وضعیت هندسی کانال با بستر ناهموار را نشان می‌دهد.

$$Z_b = \begin{cases} 0 & x < 8m \\ 0.2 - 0.05(x-10)^2 X & 8 \leq x \leq 12 \\ 0 & 12 \leq x \end{cases} \quad (22)$$

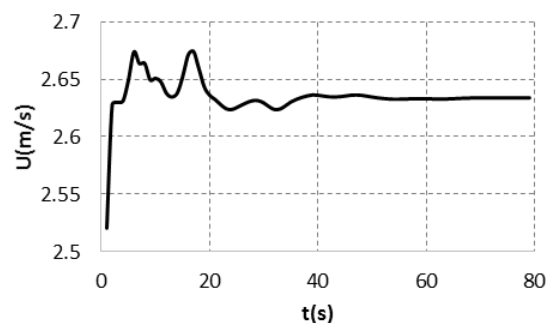
مسئله فوق توسط گوتا و مورل (1997) بصورت تحلیلی حل شده است (Gouta et al., 1997). در حل این مسئله دبی ورودی برابر 4/42 متر مکعب بر ثانیه و ارتفاع اولیه آب برابر با 2 متر در نظر گرفته شده است. تعداد گره‌های در نظر گرفته شده برابر با 401 گره می‌باشد و همان‌گونه که از شکل 5- ب مشهود است تجمع گره‌گذاری در



شکل 5 هندسه مدل و نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی در مسئله جریان عبوری از روی برآمدگی (الف) نمایش وضعیت توپوگرافی مدل، (ب) مدل نحوه گره‌گذاری و محل مقطع D-D، (ج) نواحی هم‌سرعت جریان



شکل 7 نتایج حاصل از مدل عددی و تحلیلی تغییرات تراز سطح آب در مسئله جریان عبوری بر روی مانع



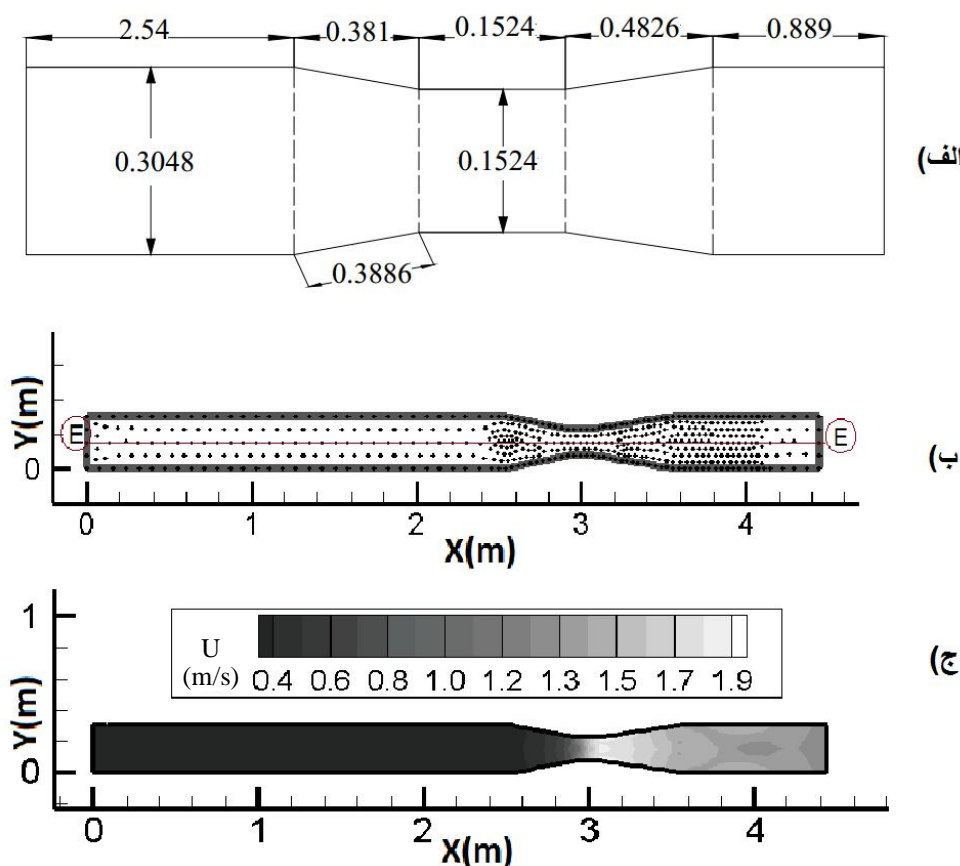
شکل 6 منحنی همگرایی تغییرات سرعت نسبت به زمان در مرکز برآمدگی در مسئله جریان عبوری بر روی مانع

3-4- جریان در پارشال فلوم

شبیه‌سازی جریان در پارشال فلوم از این‌رو حائز اهمیت می‌باشد که به علت تغییر رژیم جریان از حالت زیربحرانی به فوق‌بحرانی کارایی مدل عددی در شبیه‌سازی جریان با سطح آزاد به چالش کشیده می‌شود. در آزمایش صورت گرفته توسط کورکودال (1997) تغییرات تراز سطح آب در محور مرکزی پارشال فلوم برداشت شده است. طرح شماتیک وضعیت هندسی پارشال فلوم در شکل 8- الف نشان داده شده است. مقدار شیب در قسمت مستقیم کانال برابر $0/5617$ و در قسمت همگرا شونده برابر با $0/17613$ است. شرایط مرز ورودی برای مقدار دبی به کانال برابر با $0/0145$ متر مکعب بر ثانیه اعمال شده است (Ye, 1997).

شکل 8- ب نحوه گسسته‌سازی بدون شبکه میدان حل را نشان می‌دهد. برای گسسته‌سازی مکانی هندسه میدان

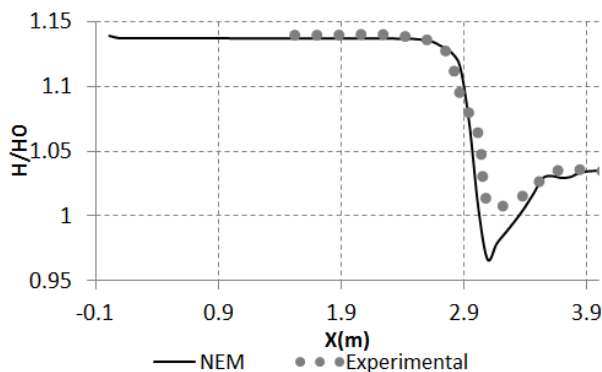
حل، تجمع گره‌ها در نواحی تنگ شدگی و پس از آن به علت تغییرات شدید تراز سطح و سرعت جریان بیشتر منظور شده است. تعداد گره‌های در نظر گرفته شده برابر با 509 گره است و گام زمانی مطابق رابطه (21) در هر مرحله از روند حل محاسبه شده است. در شروع محاسبات مقادیر عمق اولیه برابر با $0/1$ متر و سرعت اولیه برابر با 2 متر بر ثانیه منظور شده است. با توجه به زیربحرانی بودن جریان در قسمت اول کانال و فوق‌بحرانی بودن در قسمت دوم کانال، مقادیر سرعت و عمق در بالادست کانال اعمال گشته‌اند و در پایین دست جریان شرط مرزی آزاد اعمال شده است. همچنین شرط مرزی دیواره از نوع لغزشی در نظر گرفته شده است. در شکل 8- ج نواحی هم سرعت در جریان بدست آمده از روش المان طبیعی بر روی کانال نمایش داده شده است.



شکل 8 الف) وضعیت هندسی پارشال فلوم ب) نحوه گره‌گذاری بدون شبکه در مسأله پارشال فلوم ج) نواحی هم سرعت جریان

مدت زمان پردازش (هزینه محاسباتی) برای تمامی مسائل بخش صحت‌سنجی در جدول 1 ارائه شده است؛ لازم به ذکر است برای مدل‌سازی از رایانه با مشخصات پردازشگر 2/67 گیگاهرتز و 6 گیگابایت حافظه RAM استفاده شده است.

ناچیز بودن میزان جذر میانگین مربعات خطای نرمال‌شده و بالا بودن ضریب تبیین در مسائل پخش حرارت، پدیده شکست سد و جریان عبوری بر روی مانع بر قابلیت بالای مدل عددی در شبیه‌سازی جریان با سطح آزاد صحنه می‌گذارد. افزون بر این مدل عددی نتایج قابل قبولی را در ارتباط با مدل‌سازی جریان درون پارشال فلوم نشان داده است. به طوریکه مدل عددی در شبیه‌سازی تغییر رژیم جریان (زیر بحرانی به فوق بحرانی)، محل تغییرات عمق جریان و عمق ثانویه جریان را به خوبی پیش‌بینی کرده اما در محاسبه مقدار اعماق در نواحی تغییر عمق (شکل 9) ضعف داشته است. علل خطای موجود در شبیه‌سازیهای عددی صورت گرفته را می‌توان در دو مورد اصلی جستجو نمود. (1) نخست آنکه از آنجا که ماهیت اصلی پدیده‌های مورد بررسی در آزمون معرفی شده سه‌بعدی است (هر چند تغییرات در جهت قائم ناچیز باشد)، دوبعدی سازی معادله ناویه-استوکس در آب‌های کم عمق موجب ایجاد کمی خطا در دقت جواب‌های معادلات تغییر شکل یافته می‌شود، همچنین (2) از آنجا که معیار اصلی محاسبه خطای روش‌های عددی مزبور برداشت‌های آزمایشگاهی بوده‌اند، لذا اطمینان کامل از نتایج مرجع به منظور تعیین دقیق مقدار خطای مدل امکان‌پذیر نیست.

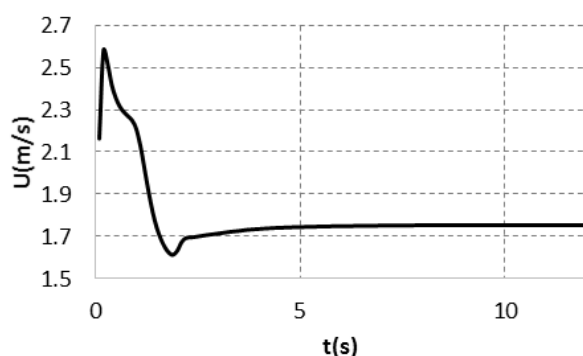


شکل 10 منحنی ارتفاع بی بعد شده جریان در مسأله پارشال فلوم

همچنین در شکل 9 روند همگرایی تغییرات سرعت در قسمت تنگ‌شدگی کانال ($X = 3.2m$) بر حسب زمان ارائه شده است که در زمان ($t = 7s$) نتایج با دقت 10^{-6} همگرا شده‌اند. به منظور مقایسه نتایج تراز سطح آب محاسباتی و برداشت‌های آزمایشگاهی، نتایج به دست آمده در مقطع میانی کانال (مقطع E-E در شکل 8-ب) در شکل 10 نشان داده شده است و خطای محاسبه شده و مدت زمان حل در جدول 1 ارائه شده است. همانگونه که از شکل 10 برمی‌آید روش ارائه شده تغییر رژیم جریان و همچنین محل تغییرات عمق جریان را به خوبی محاسبه می‌کند، با این حال بیشترین تفاوت نتایج در محل تنگ‌شدگی و تغییر ناگهانی عمق جریان به وجود آمده است؛ در ناحیه ی پرش هیدرولیکی (محل تنگ‌شدگی) مقدار خطا افزایش یافته و مقدار بیشینه خطای نسبی در محاسبه عمق بی بعد شده در نقطه به طول $(X = 3.02m)$ به مقدار 5% می‌رسد.

4- بحث و تحلیل نتایج

با توجه به نتایج به دست آمده از مدل عددی به روش المان طبیعی در شبیه‌سازی پخش حرارت و جریان با سطح آزاد مشخص می‌شود که روش مزبور توانایی مناسبی در شبیه‌سازی موارد فوق‌الذکر را دارد. به منظور درک و شناخت کاملتر از ارزیابی عملکرد مدل عددی، نتایج حاصل از شبیه‌سازی و تحلیلی/آزمایشگاهی در قالب دو معیار خطای جذر میانگین مربعات خطای نرمال‌شده و ضریب تبیین در جدول 1 آورده شده است. افزون بر این



شکل 9 منحنی همگرایی تغییرات سرعت نسبت به زمان در تنگ‌شدگی مسأله پارشال فلوم

بعدی پیچیده مانند جریان درون پیچانرودها، رودخانه‌ها، جریان‌های القایی از وزش باد و ... پیشنهاد می‌شود.

6- فهرست علائم

d	فاصله بین نقاط در دیاگرام ورونی
g	شتاب گرانش
h	ارتفاع سیال
n	نشانگر گام زمانی
N_i	تابع شکل سیسون
q	دبی در واحد عرض
t	زمان
U	سرعت سیال
w	تابع وزن نقاط گوسی
z_b	تراز بستر
τ_b	اصطکاک بستر
V	ضریب پخش لزجت سیال

7- منابع

- Alfaro, I., Yvonnet, J., Chinesta, F. and Cueto, E. (2007). "A study on the performance of natural neighbour-based Galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 71(12), pp. 1436-1467.
- Band, D. (1961). *Solutions of Laplace's Equation*. Kluwer Academic Publishers.
- Bueche, D., Sukumar, N. and Moran, B. (2000). "Dispersive properties of the natural element method". *Computational Mechanics*. 25, pp. 207-219.
- Chen, J.S., Wu, C.T., Yoon, S. and You, Y. (2001). "A stabilized conforming nodal integration for Galerkin mesh-free methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 50(2), pp. 435-466.
- Cueto, E., Sukumar, N., Calvo, B., Martinez, M.A., Cegonino, J. and Dobiare, M. (2003). "Overview and recent advances in natural neighbour Galerkin methods", *Archives of Computational Methods in Engineering*. 10(4), pp. 307-384.
- Darbani, M., Ouahsine, A., Villon, P., Naceur, H. and Smaoui, H. (2011). "Meshless method for shallow water equations with free surface flow", *Mathematics and Computation*. 217(11), pp. 5113-5124.

شایان ذکر است که در این پژوهش برای پایداری‌سازی بخش جابجایی از روش جهت‌مند تعمیم مرتبه دوم طرح ون-لیبر با تغییرات لازم و انحصاری برای سازگاری با روش المان طبیعی استفاده شده است و با توجه به بالا بودن دقت حل و نزدیکی جواب ایجاد شده به جواب حل تحلیلی مسأله، می‌توان نتیجه گرفت که طرح جهت‌مند استفاده شده با روش حل پیشنهادی سازگار است.

5- نتیجه‌گیری

در این پژوهش استفاده از روش عددی بدون شبکه المان طبیعی در حل معادلات حاکم بر جریان با سطح آزاد مورد بررسی قرار گرفت. از آنجا که استفاده از روش انتگرال گیری به روش نقاط گوسی در روش المان طبیعی در مقایسه با حل انتگرال گره‌ای از دقت کافی برخوردار نیست (Alfaro et al., 2007)؛ بنابراین در پژوهش حاضر عملکرد روش انتگرال گره‌ای پایدار شده در حل معادلات حاکم به روش بدون شبکه المان طبیعی مورد آزمون قرار گرفت. همچنین برای پایداری‌سازی بخش جابجایی جریان از روش جهت‌مند تعمیم مرتبه دوم طرح ون لیبر استفاده شد. به منظور صحت‌سنجی نتایج حاصل از روش عددی ارائه شده، چهار آزمون پخش دوبعدی حرارت در صفحه، مسأله شکست سد، عبور جریان پایدار از روی بستر ناهموار و جریان درون پارشال فلوم شبیه‌سازی گردید. بررسی دقت نتایج تولید شده در روش المان طبیعی این نتیجه را حاصل می‌نماید که روش المان طبیعی توانایی مناسبی در شبیه‌سازی جریان با سطح آزاد را دارا می‌باشد. همچنین نتایج گویای سازگاری روش جهت‌مند تعمیم مرتبه دوم طرح ون لیبر با روش المان طبیعی با انتگرال گیری گره‌ای است. در نهایت ذکر این نکته ضروری است که در این مرحله تعمیم کلی نتایج به دست آمده در رابطه با توانایی روش المان طبیعی با انتگرال گیری گره‌ای و طرح مرتبه دوم ون لیبر در شبیه‌سازی تمام مسائل جریان با سطح آزاد شایسته نیست و محرز ساختن این امر نیازمند شبیه‌سازی‌ها و بررسی‌های بیشتر می‌باشد. همچنین، در ادامه تحقیقات به منظور به چالش کشیدن و ارزیابی کارایی روش ارائه شده، شبیه‌سازی جریان‌های دو

- water simulation", Workshop on Virtual Reality Interaction And Physical Simulation (VRIPHYS). pp. 39-46.
- Ye, J. and McCorquodale, J. (1997). "Depth-averaged hydrodynamic model in curvilinear collocated grid", Journal of Hydraulic Engineering. 123(5), pp. 380-388.
- You, J.W., Moran, B. and Chen, J.S. (2004). "Stabilized conforming nodal integration in the natural-element method", International Journal for Numerical Methods in Engineering. 60(5), pp. 861-890.
- Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Nithiarasu, P. (2005). *The finite element method for fluid dynamics*. Butterworth-Heinemann, p. 451.
- Zounemat-Kermani, M. and Sabagh-Yazdi, S.R. (2010). "Conjunction of 2d and 3d modified flow solvers for simulating spatiotemporal wind induced hydrodynamics in the caspian sea", Ocean Science Journal. 45, pp.113-128.
- Zounemat-Kermani, M. and Sabagh-Yazdi, S.R. (2010). "Coupling of two- and three-dimensional hydrodynamic numerical models for simulating wind-induced currents in deep basins", Computers & Fluids. 39, pp. 994-1011.
- Goutal, N. and Maurel, F. (1997). "Dam break wave simulation", Proceedings of the 2nd workshop on dam-break wave simulation. Technical Report HE-43/97/016/B, Electricite de France, Direction des etudes et recherches.
- Gomez, L. C. (2005). An unstructured finite volume model for unsteady turbulent shallow water flow with wet-dry fronts. Doctoral Thesis. Department de Metodos Matematicos, de Representacion. Universidad de A Coruna.
- Lin, H. and Atluri, S.N. (2001). "The Meshless local Petrov-Galerkin (MIPG) method for solving incompressible Navier-Stokes equations", Cmes. 2(2), pp. 117-142.
- Liu, G.R. (2009). *Mesh free methods moving beyond the finite element method*. New York, CRC Press, p. 792.
- Patankar, S.V. (1980). Numerical heat transfer and fluid flow. CRC Press. NewYork.
- Ritter, A. (1892). "Die fortpflanzung der wasserwellen", Zeitschrift des Vereines deutscher In- genieure. 36(2) , pp. 947-954.
- Solenthaler, B., Bucher, P., Chentanez, N., Müller, M. and Gross, M. (2011). "SPH based shallow