

Relation of Fractal Dimension and Sinuosity coefficient in Meandering River


Mehrdad Kashkolipour ¹, Zahra Ghadampour ^{2*}, Mohammad Rafie Rafiee ³

1- PhD student, Department of civil engineering, College of civil engineering, Islamic Azad University, Estahban Branch, Iran.

2- Assistant Professor, Department of civil engineering, College of civil engineering, Islamic Azad University, Estahban Branch, Iran.

3- Assistant Professor, Department of water sciences & engineering, college of agriculture, Jahrom University, Iran.

*Zahra_ghadampour@yahoo.com

Received: 15 October 2019, Accepted: 20 March 2020  J. Hydraul. Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: Meandering rivers, as prime examples of nature tendency to reach a regular form, have been the focus of many researchers. These rivers contain a series of alternating bends and curves, joined by short straight intervals across their plan and flow over gently sloping channels in which sedimentary load settles as point loads on the inner wall of the bend. River morphology studies the geometrical form of rivers in the plan, longitudinal profile (channel slope), cross section geometry and topography. Morphological analysis of meandering rivers is performed in two stages: determination of independent variables (flow and sedimentary discharge), calculation of geometrical parameters of river morphology through physical or experimental relationships. Such parameters are mostly studied using Euclidean geometry. Sinuosity, for example, has been calculated with Euclidean attitude in Cartesian coordinates. Quantifying geometrical parameters of meandering rivers morphology in a Euclidean approach arises problems such as inaccuracy or complexity in calculation. Instead, Fractal geometry is widely used in river engineering in recent literature, due to its more detailed perspective of an object and its non-Euclidean properties. In Fractal Geometry, the mathematical space classified into one-, two-, and three-dimensional spaces on the basis of Euclidean geometry, is expressed as is fractal spaces in which the irregularities of the shapes are expressed in terms of fractal dimension (a real dimension and not necessarily a natural number). Single-fractal analyses are mainly carried out using methods such as box counting, variation, scale change, and Brownian motion methods, while multi-fractal analyses include methods such as spectral or wavelet analysis.

Methodology: Box counting is one of the fractal dimension calculation methods, widely used in rivers and shorelines. In this method, the set of points is meshed on a curve or a surface with squares (boxes) and the number of squares covering each part of the curve is calculated. Variation method also is one of the most accurate and popular method that can be used to calculate fractal dimension in various fields, however it is rarely used in river engineering up to now. In the present study, the fractal dimension in the Mond River was calculated over a 15-year period from 2000 to 2015. Mond River, with 685 km length is one of the most important rivers in southern Iran, originating in Fars province and flowing into the Persian Gulf through

Bushehr province. Two fractal methods namely, box counting and variational methods were applied to calculate fractal dimensions in I) the whole river II) 3 longest bends III) 13 meanders. The results were then compared with those of sinusoidal coefficient. To calculate the fractal dimension by changes method, the area covered by different characteristic lengths is calculated in fixed intervals. Then, for different characteristic lengths the area covered by meander curve is calculated using code written in Matlab. The correlation coefficient values for the river coordinate data at each of the river intervals are obtained and compared in the bends. In the box counting method, different dimensions of the box and therefore different grids were considered. Then, in order to calculate the fractal dimension, the number of boxes involved was calculated for different widths using codes written in Matlab. Variations in the box width with the number of boxes in logarithmic scale are used to calculate the fractal dimension in the box counting method.

Result and Discussion: The values for fractal dimension ranged between 1.01 to 1.09 and 1.0027 to 1.991 using box counting method and changes method, respectively. Additionally, the calculated fractal dimension values were compared with sinusoidal coefficients in three long meanders and fourteen bends of the river. Results indicated high correlations ($R^2 = 0.94-0.99$) between fractal and sinusoidal coefficients in the meanders. The fractal dimension obtained in 2005 (1.05) was larger than those in other years. The largest fractal dimension was met in the second meander, with a value of 1.06. Highest sinusoidal coefficient was also found in the second meander indicating a direct relationship between these two parameters. There was a high correlation coefficient (close to 1) between the fractal dimension and the sinusoidal coefficient in the long meanders.

Conclusion: A considerably high correlation coefficient of 0.96 was obtained between the parameters of the sinusoidal coefficient and the central angle calculated from the morphological analysis, which indicates a direct relationship between these parameters. The correlation coefficient of 0.85 between the fractal dimension parameters and the sinusoidal coefficient as well as the correlation coefficient of 0.86 between the fractal dimension parameters with the central angle indicates that the fractal dimension parameter is an appropriate indicator for expressing the changes and complexity of the meandering rivers.

Keywords: Fractal Geometry, Meandering River, Box Counting Method, Sinuosity coefficient, Mond River.

ارتباط بعد فراکتالی و ضریب پیچشی در رودخانه‌ها (مطالعه موردی: رودخانه مند)

مهرداد کشکولی پور^۱، زهرا قدم پور^{۲*}، محمد رفیع رفیعی^۳

۱- دانشجوی دکتری، گروه عمران، دانشکده عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد استهبان، ایران.

۲- استادیار، گروه عمران، دانشکده عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد استهبان، ایران.

۳- استادیار، گروه علوم و مهندسی آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه جهرم، جهرم، ایران.

*zahra_ghadampour@yahoo.com

دریافت: ۱۳۹۸/۰۹/۳۰، پذیرش: ۱۳۹۹/۰۱/۰۱ ☞ وب‌گاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: رودخانه‌های پیچانرودی در شکل نقشه (نقشه) شامل یک چند پیچ و خم‌های متناوب هستند که توسط بازه‌های مستقیم کوتاه به یکدیگر می‌پیوندند. هندسه فراکتالی در واقع فضای موجود ریاضی که بر مبنای هندسه اقلیدسی به فضاها، دو و سه بعدی طبقه بندی می‌شود را به صورت فضای فراکتالی که ناظمی‌ها و اشکال در آن بر حسب بعد فراکتالی (یک بعد حقیقی و نه بناچار یک عدد طبیعی) بوده، نمایش می‌دهد. ریخت‌شناسی رودخانه شامل بررسی شکل هندسی رودخانه در نقشه، ویژگی‌های نیمرخ طولی (شیب طولی) و شکل هندسی رودخانه در مقطع و بلندی یا عوارض (توپوگرافی) بستر می‌باشد. اغلب ریخت‌شناسی رودخانه‌ها با هندسه اقلیدسی همراه بوده و ضریب‌هایی مانند ضریب پیچش در مهندسی رودخانه‌ها با نگرش اقلیدسی و در مختصات دکارتی محاسبه شده‌اند. در این‌ها، اخیر هندسه فراکتالی در مقابل هندسه اقلیدسی، در تعیین ویژگی‌های هندسی اشیاء در کاربرد‌های مختلف استفاده شده است. در این تحقیق بعد فراکتالی در رودخانه مند در فاصله زمانی ۱۵ ساله از سال ۲۰۰۰ تا ۲۰۱۵ محاسبه شده که بعد فراکتال با استفاده از روش شمارش جعبه‌ای در محدوده ۱/۰۱ تا ۱/۰۹ و به روش تغییرپذیری‌ها در محدوده ۱۰۰۲۷ تا ۱۰۹۹۱ در کل مسیر رودخانه تغییر می‌کند. همچنین در سه پیچانرود طولی و سیزده قوس از مسیر رودخانه نیز مقادیر بعد فراکتال محاسبه و با ضریب پیچشی مقایسه شده‌اند که ضریب همبستگی خوبی در محدوده ۰/۹۴ تا ۰/۹۹ بین بعد فراکتال با ضریب پیچشی در پیچانرودها به دست آمده است.

کلید واژگان: هندسه فراکتال، رودخانه پیچانرودی، روش شمارش جعبه‌ای، ضریب پیچشی، رودخانه مند

۱- مقدمه

آب‌شناختی (هیدرولوژیکی) حوضه آبریز بالادست، عامل‌های موثر در تعیین مسیر حرکت جریان و به طور کلی ریخت‌شناسی رودخانه می‌باشند (Tadaki et al., 2014). برای بیان تغییرپذیری‌های رودخانه در این حالت و بر مبنای هندسه اقلیدسی از ضریب‌هایی مانند ضریب پیچشی^۱ که نسبت طول آبراهه اصلی به طول دره رودخانه می‌باشد می‌توان استفاده کرد (Tarboton et al., 1988). شکل رودخانه در نقشه، بر مبنای موارد عنوان شده و تغییرپذیری‌های آنها در زمان و مکان به سه دسته اصلی

ریخت‌شناسی رودخانه علم شناخت سامانه رودخانه و تعیین ویژگی‌های ریخت‌شناختی (مورفولوژیکی) هر رودخانه از ویژگی‌های اصلی در طراحی‌های مهندسی و برنامه‌ریزی‌های مدیریتی می‌باشد. شناخت سامانه رودخانه از نظر هندسه رودخانه (شامل شکل مقطع، عرض، عمق و شیب)، مواد تشکیل‌دهنده بستر و جداره‌ها، تغییرپذیری‌های بار رسوبی بستر و دبی عبوری، وضعیت پوشش گیاهی در کناره‌های رودخانه به همراه ویژگی‌های هندسی (فیزیوگرافی) و

¹ Sinuosity

در مقیاس‌ها و جهت‌های متفاوت) تقسیم بندی کرد. بر این مبنای، در دنیای فیزیکی، فراکتال و ماهیت فراکتالی در همه جا قابل مشاهده و جستجو می‌باشد (Tarboton et al., 1988).

فراکتال شکل هندسی چند جزئی است که می‌توان آن را به قسمت‌هایی تقسیم کرد، به طوری که هر قسمت یک تکرار از "کل" شکل باشد. بر این مبنای بسیاری از موارد زندگی روزمره همچون درخت‌ها، کوه‌ها، پراکنده شدن برگ‌های پراکنده روی زمین را مثال‌هایی از فراکتال دانست (Tarboton et al., 1988). بر این مبنای از نظر هندسی شیئی فراکتال خوانده می‌شود که: الف) دارای خاصیت خود متشابه باشد. ب) در مقیاس خرد بسیار پیچیده باشد. ج) بعد آن یک عدد صحیح نباشد.

از جمله شکل برگ‌های درختان یا دانه‌های برف، خطوط ساحلی، کوه‌ها، سامانه رودخانه‌ای، مدارات اجرام آسمانی و بسیاری از پدیده‌های موجود در طبیعت مثال‌هایی از هندسه فراکتالی موجود در طبیعت می‌باشند (Tessier et al., 1996).

در صورتی که تنها یک بعد فراکتالی برای ساخت یک شیء فراکتالی یا فرایند فراکتالی مورد نیاز باشد، آن پدیده، تک فراکتالی و در غیر این صورت چند فراکتالی^۵ می‌باشد (Lopes and Betrouni, 2009).

هندسه فراکتالی به علت دید تیز بینانه‌تر نسبت به محیط پیرامون و در نظر گرفتن ویژگی‌های غیر اقلیدسی اشیاء به تدریج در دوران کنونی در علوم مختلف از جمله علم هیدرولوژی و مهندسی رودخانه استفاده شد (Beer, 1990). به طور کلی تحقیقات در این زمینه‌ها در دو شاخه اصلی تحلیل‌های زمانی و مکانی انجام پذیرفته است. تحلیل‌های زمانی به صورت تک فراکتالی و چند فراکتالی در دوره‌های زمانی مانند بارندگی، سطح آب زیر زمینی، دبی عبوری از رودخانه، سرعت حرکت ذرات به صورت سه بعدی، بار معلق رسوبات، غلظت مواد آلاینده، آشفتگی در جریان و استفاده از بعد فراکتالی در پیش بینی زمانی بارندگی انجام پذیرفته

رودخانه‌های مستقیم^۱، رودخانه‌های پیچان^۲ و رودخانه‌های شریانی^۳ طبقه‌بندی می‌گردند (Parker, 1976).

در این میان، رودخانه‌های پیچانرودی به عنوان مثالی بارز از تاثیر طبیعت در تثبیت یک شکل (فرم) منظم، مورد توجه محققان می‌باشند. تعیین ویژگی‌های ریخت‌شناسی در این رودخانه‌ها از موارد موثر در مدلسازی ریاضی آنها می‌باشد. تحلیل ریخت‌شناسی رودخانه‌های پیچانرودی در دو مرحله ۱- تعیین متغیرهای مستقل (دبی سیلاب و دبی رسوبی) و ۲- محاسبه ویژگی‌های هندسی ریخت‌شناسی انجام می‌پذیرد. تعیین ویژگی‌های هندسی در رودخانه‌های پیچانرودی به طور عمده در نظام مختصات دکارتی و با نگرش اقلیدسی همراه بوده است (Tarboton et al., 1988). محاسبه این ضریب‌ها، امری پیچیده، تقریبی و بر مبنای تحلیل‌های هندسی بر روی نقشه‌های موجود بوده و در نتیجه به مقیاس نقشه وابسته می‌باشد.

Ortega et al. (2014) به بررسی فعالیت‌های انسانی اخیر و تغییر در پویایی (دینامیک) و ریخت‌شناسی رودخانه‌های موقتی در دو حوضه در اسپانیا پرداختند.

در هر حال با رویکرد به هندسه اقلیدسی، در محاسبه کمیت‌هایی مانند درجه پیچش، محققان با مسئله‌هایی از جمله نبود دقت و یا پیچیدگی در محاسبه رو به رو می‌باشند. همچنین مشخص کردن کمیتی که بتواند معرف مناسب و دقیقی از شکل رودخانه در نقشه باشد همچنان یکی از موضوع‌های بحث برانگیز بین محققان مختلف می‌باشد.

واژه فراکتال^۴ که از ریشه لاتین فراکتوس به معنای شکسته شده گرفته شده، برای نخستین بار توسط ریاضیدان محقق مندلبرت برای توصیف کمی و دقیق اجسام با هندسه‌های پیچیده و نامنظم استفاده شد (Mandelbrot, 1967). در واقع وی با استفاده از هندسه فراکتالی، بعد جدیدی، افزون بر سه بعد مکانی موجود که در هندسه اقلیدسی استفاده می‌شود، ارائه نمود (Mandelbrot, 1985). او همچنین اشیاء را به دو دسته خود وابسته (اجسام با الگوی تکرار شونده با مقیاس یکسان) و خود متشابه (اجسام با الگوی تکرار شونده

⁴ Fractal

⁵ Multifractal

¹ Straight

² Meander

³ Braided

می‌تواند به عنوان شاخصی برای تعیین تغییرپذیری‌های رودخانه در نقشه استفاده شود.

اسنو با محاسبه بعد فراکتالی با استفاده از روش بعد جداکننده روی ۱۲ مسیر در غرب حوضه آبریز رودخانه اوهایو نشان داد که در مقیاس‌هایی نزدیک به طول رودخانه‌های پیچانرودی، این مسیرها دارای ماهیت فراکتالی می‌باشند. در هر حال در مقیاس‌هایی نزدیک به عرض مسیر، نتایج تحقیقات نشان از ماهیت اقلیدسی مسیرها را در برداشت (Snow, 1989).

پس از آن نیکورا با محاسبه بعد فراکتالی رودخانه‌ها با استفاده از روش شمارش جعبه‌ای نشان داد که بعد فراکتالی دارای یک ارتباط توانی با نسبت طول رودخانه به طول مسیر مستقیم یا نسبت شیب رودخانه به شیب مسیر مستقیم رودخانه دارد. او همچنین نشان داد که به جای فرانسجه (پارامتر) میزان انحنا در مسیر رودخانه می‌توان از بعد فراکتالی استفاده کرد (Nikora., 1991). در ادامه بیوویس و مونت کومری در سال ۱۹۹۶ با محاسبه بعد فراکتالی با استفاده از روش بعد جداکننده در نتایج بررسی‌های خود نشان دادند که در بازه مقیاسی بین عرض مسیر و بزرگترین طول موج پیچانرود، رودخانه دارای ویژگی‌های مقیاسهای فراکتالی می‌باشد (Beauvais and Montgomery, 1996).

در سال ۲۰۰۰، بعد فراکتالی در بیان سطح مقطع رودخانه میسوری استفاده شد و تغییرپذیریهای سطح مقطع رودخانه پیش و پس از تنظیم آب در آن با بعد فراکتالی بررسی شد (Nestler and Sutton, 2000). در همین سال، استفاده از هندسه فراکتالی برای تعیین میزان پیش رودخانه بر مبنای داده‌های موجود، مورد استفاده قرار گرفته و رابطه‌ای برای محاسبه مقدار خمیدگی محاسبه شد. (Ghosh, 2000). در سال ۲۰۰۸، ژانگ و همکاران بعد فراکتالی را برای رودخانه جیالینگ در چین با استفاده از روش شمارش جعبه‌ای محاسبه کرده و آن را به عنوان فرانسجه معرف میزان پیچیدگی و نامنظمی رودخانه‌های پیچانرودی معرفی نمودند (Zhang et al., 2008).

است (Rakhshandehroo and Ghadampour, 2011).

تحلیل‌های تک فراکتالی عمدتاً با استفاده از روش‌هایی مانند شمارش جعبه‌ای، تغییرنگار (واریوگرام)، روش تغییرپذیری‌های، روش تغییر مقیاس و روش حرکت براونی و تحلیل‌های چند فراکتالی با استفاده از روش‌هایی مانند تحلیل طیفی و یا موجک صورت پذیرفته است. در تحلیل دوره‌های زمانی، روش تغییرپذیری‌های به عنوان یک روش دقیق در محاسبات بعد فراکتالی در تحلیل‌های تک فراکتالی پیشنهاد شده است. در تحلیل‌های مکانی، در نخستین گام، تحقیقات زیادی توسط محققان مختلف روی شبکه رودخانه‌ها انجام گردید. نتایج گویای ماهیت فراکتالی الگوی پخش شبکه‌های رودخانه‌ای و ارتباط بین بعد فراکتالی با ضریب‌ها هورتون بوده است (De Bartolo et al., 2006).

همچنین نتایج این بررسی‌ها نشان داد که بعد فراکتالی می‌تواند در مدل‌سازی پاسخ هیدرولوژیکی حوضه آبریز، با استفاده از آبنگار (هیدروگراف) واحد لحظه‌ای فراکتالی (FIUH¹) استفاده شود (Cudennec, et al., 2004). در مقایسه با شبکه رودخانه‌ها، بررسی‌های بسیار کمی روی رودخانه‌ها در این زمینه به تنهایی انجام پذیرفته است. با توجه به آنکه در طبیعت بیشتر رودخانه‌ها از نظر طبقه‌بندی در دسته رودخانه‌های پیچانرودی قرار گرفته (Crosato, 2008) و از طرف دیگر، از نظر ویژگی‌های مورفولوژیکی این رودخانه‌ها در دسته پیچیده‌ترین رودخانه‌ها قرار گرفته‌اند، لذا مطالعات لازم بر روی این رودخانه‌ها جزء اولویت‌های تحقیقاتی می‌باشد.

با توجه به ویژگی‌های هندسه فراکتالی، دیدگاه استفاده از بعد فراکتالی به عنوان یک بعد در رودخانه‌ها، نخستین بار توسط اسنو در سال ۱۹۸۹ استفاده شد (Snow, 1989). در ادامه در ۱۵ تا ۲۰ سال اخیر استفاده از روش‌های مرسوم مانند بعد جداکننده و روش شمارش جعبه‌ای در محاسبه بعد فراکتالی در رودخانه‌های پیچانرودی به طور چشمگیری رشد یافته است. به طور کلی بعد فراکتالی برای یک رودخانه

¹ Fractal Instantaneous Unit Hydrograph

نامنظم شکسته و خردشده گرفته شده است، نخستین بار توسط مندلیبرت که طی نظریه‌ای برای مسئله‌های جهان هستی، بیان کرد که جهان هستی بعدی ما بین ۲۳/۱ تا ۳۴/۱۱ دارد مورد استفاده قرار گرفته شد (Mandelbrot, 1967). ما فراکتال‌ها را در زندگی روزمره خود به فراوانی مشاهده می‌کنیم: درخت‌ها، کوه‌ها، پراکنده شدن برگ‌های پاییزی روی زمین همگی مثال‌هایی بارز از فراکتال می‌باشند. فراکتال شکل هندسی چند جزئی است که می‌توان آن را به قسمت‌هایی تقسیم کرد، به طوری که هر قسمت یک تکرار از "کل" شکل باشد.

۲-۱- محاسبه بعد فراکتالی

محاسبه بعد فراکتالی بر مبنای نوع فراکتال به دودسته اصلی محاسبه بعد فراکتالی برای اشیاء خود متشابه و برای اشیاء خود وابسته تقسیم‌بندی می‌شود. در اشیاء خود متشابه روش‌های مختلفی برای محاسبه بعد فراکتالی به کار برده می‌شود که از آن جمله می‌توان به روش‌های استفاده مستقیم از تعریف بعد فراکتالی، روش شمارش جعبه‌ای، روش بعد جداکننده، روش تغییر مقیاس و روش تغییرپذیری‌های اشاره کرد.

یکی از معروف‌ترین روش‌های محاسبه بعد فراکتالی در اشیاء خود وابسته روش تغییرنگار می‌باشد. روش‌هایی همچون پوشش دادن تصویر یا تحلیل طیفی از جمله روش‌هایی می‌باشند که هم برای اشیاء خود متشابه و هم اشیاء خود وابسته استفاده می‌شوند. از آنجایی که روش شمارش جعبه‌ای و روش تغییرپذیری‌ها از پرکاربردترین روش‌ها در محاسبه بعد فراکتالی در رودخانه‌های پیچان‌رودی در گذشته می‌باشند، در این تحقیق محاسبه بعد فراکتالی با استفاده از این روش‌ها بررسی و ارزیابی می‌شود.

۲-۲- روش تغییرپذیری‌ها

(Dubuk and Dubuk, 1996) روش جدیدی برای محاسبه بعد فراکتالی ارائه دادند که ادعا می‌شد نسبت به روش استاندارد شمارش جعبه‌ای دارای دقت بیشتری و کارایی

شن و همکاران با محاسبه بعد فراکتالی به روش جداکننده در بخش‌های مختلف رودخانه زرد چین، ارتباط ابعاد فراکتالی و دگرگونی زمین ساخت (تکتونیکی) آنها را بررسی کردند (Shen et al., 2011).

راموس و همکاران در سال ۲۰۱۲ با تجزیه و تحلیل زمانی مکانی ریخت شناسی رودخانه آبرفتی کویت با تأکید بر اثرگذاری سامانه‌های ارتباطی، نتیجه گرفتند که تغییرپذیری‌های شدید رودخانه‌ها در نتیجه رخدادهایی مانند هاریکن‌ها (طوفان‌های حاره‌ای) و فعالیت‌های انسانی بوده است (Ramos and Gracia, 2012).

در سال ۲۰۱۴ پاریکا و جایراج با بررسی روی هفده رودخانه در منطقه کراال هند بعد فراکتالی جریان رودخانه‌ها و حوضه‌های آبگیر آنها را تعیین کردند (Sowparnika and Jairajp, 2014). در همین سال اندروناک و سیوبوتارو در نتایج بررسی‌های خود نشان دادند که تجزیه و تحلیل فراکتالی در بررسی‌های جغرافیایی تاثیر چشمگیری دارد و همه شکل‌های جغرافیایی نامنظم و دارای الگوی تکراری بوده که با هندسه اقلیدسی سازگار نیستند (Andronache and Ciobotaru, 2014).

(Aubeneau et al., 2015) در نتایج بررسی‌های خود نشان دادند که به کارگیری الگوهای فراکتالی در ریخت‌شناسی بستر رودخانه به تعیین یک مقیاس فراکتالی در زمان ذخیره آبی منجر می‌شود.

نتایج بیشتر تحقیقات صورت گرفته در گذشته نشان می‌دهد که استفاده از بعد فراکتالی و ارتباط آن با ضریب پیچشی در رودخانه‌های پیچان‌رودی و امکان استفاده از این بعد به عنوان یک شاخص جدید در بررسی‌های ریخت شناسی رودخانه و تقسیم بندی رودخانه‌ها بسیار کم مورد توجه و ارزیابی قرار گرفته و گاهی هیچگونه مطالعاتی در این زمینه صورت نپذیرفته است. بنابراین در این تحقیق سعی بر آن است که با استفاده از بررسی موردی در رابطه با رودخانه مند به بررسی موارد مطرح شده به عنوان خلاء تحقیقاتی پرداخته شود.

۲- تعریف فراکتال و محاسبه بعد فراکتالی

فراکتال که از کلمه‌ی واژه لاتین فراکتوس به معنی سنگی

پوشش می‌دهند محاسبه می‌شود. این کار برای مربع‌های با طول اضلاع مختلف تکرار می‌شود. بایستی این نکته را در نظر داشت که ضخامت خطوط شبکه به صورت مجازی صفر در نظر گرفته می‌شود. حد نهایی این قسمت هنگامی است که ε به صفر میل می‌کند. در این صورت با استفاده از رابطه $L = N \cdot \varepsilon$ طول محاسبه شده به طول واقعی بسیار نزدیک می‌شود. مقدار بعد فراکتالی با استفاده از این روش به صورت نظریه با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log \frac{1}{\varepsilon}}{\log N(\varepsilon)} \quad (2)$$

که در این رابطه N شمار مربع‌ها که شامل قسمتی از جسم فراکتالی، ε طول مربع و D بعد فراکتالی می‌باشد. با توجه به اعداد به دست آمده، نموداری به صورت لگاریتمی که محورهای افقی و عمودی آن به ترتیب معرف $\log(1/\varepsilon)$ و $\log(N(\varepsilon))$ هستند رسم می‌شود. شیب خط عبوری از نقطه‌های حاصله در منحنی لگاریتمی، بعد فراکتالی شیء مورد نظر را بیان می‌کند.

۳- منطقه مورد بررسی

رودخانه مند با طول ۶۸۵ کیلومتر، مهم‌ترین و پرآب‌ترین رودخانه استان بوشهر است که شاخه اصلی آن به نام رودخانه قره اغاج از استان فارس سرچشمه می‌گیرد و پس از ورود به استان بوشهر به خلیج فارس می‌ریزد. در این تحقیق بر روی رودخانه مند با استفاده از تصویرهای ماهواره‌ای گوگل ارث نقشه UTM مسیر رودخانه در سال‌های ۲۰۰۰، ۲۰۰۵، ۲۰۱۰ و ۲۰۱۵ با استفاده از نرم‌افزار 2013 AUTO CAD تهیه شده و پس از آن با استفاده از نرم‌افزار 2017 CIVIL 3D مختصات نقطه‌های مسیر رودخانه استخراج شده است. ویژگی‌های طول و عرض جغرافیایی مسیر رودخانه در نقشه (UTM) برحسب متر در شکل یک نشان داده شده است. شکل‌های دو تا چهار سازندهای زمین‌شناسی را در مسیر رودخانه مند در موقعیت سه قوس اصلی رودخانه نشان می‌دهد. همان‌گونه که از این شکل‌ها مشخص می‌باشد، عمده سازندهای موجود در این مسیرها آبرفت است. در ادامه بعد فراکتالی به

بهتری است. در این روش از یک ساختار پوششی استفاده می‌شود. در واقع منحنی مورد نظر به یک چند بازه به طول ε روی محور افقی تقسیم و در بازه مورد نظر حد بالا و پایین منحنی به صورت سطحی پوشانده می‌شود. مبنای این روش به صورت ساده با محاسبه تابع زیر که نشان‌دهنده تغییرپذیریها در نقطه $x(t_0)$ است آغاز می‌شود.

$$V(x(t_0), \varepsilon) = \max x(\tau) - \min x(\tau) \quad (1)$$

$$\tau \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$$

که در این رابطه، $x(\tau)$ کمیت مورد نظر در نقطه τ و V گستره تحت پوشش برای یک ε (مقدار) مشخص می‌باشد. گستره به دست آمده از انتگرال گیری تابع بالا بر روی منحنی، نشان‌دهنده میزان تغییرپذیریهای این منحنی می‌باشد. همان‌طور که مشخص است با تغییرپذیریهای ε مقدار (εV) تغییر می‌یابد. به منظور محاسبه بعد فراکتالی در این روش، نرخ تغییرپذیریهای گستره پوشش داده شده برحسب ε زمانی که مقدار ε به سمت صفر میل می‌کند محاسبه می‌شود. شیب منحنی لگاریتمی که تغییرپذیریهای V را برحسب $(\varepsilon)/\varepsilon^2$ نشان می‌دهد برابر با بعد فراکتالی منحنی مورد نظر می‌باشد.

۳-۲- روش شمارش جعبه‌ای

از سال ۱۹۳۰ به بعد، بعدی تحت نام بعد شمارش جعبه‌ای به عنوان یکی از پرکاربردترین روش‌های محاسبه بعد فراکتالی به کار گرفته شده است، از این بعد، در بعضی منابع‌ها با عناوینی چون آنتروپی کولموگروف، بعد آنتروپی و چگالی لگاریتمی یاد شده است. از این بعد فراکتالی به طور موفق در کاربردهایی مانند رودخانه‌ها و خطوط ساحلی که به صورت منحنی می‌باشند استفاده شده است. برای محاسبه بعد فراکتالی در روش شمارش جعبه‌ای به صورت زیر عمل می‌شود:

الف- در این روش مجموعه نقطه‌ها روی یک منحنی یا یک سطح با مربع‌هایی (همان جعبه‌ها) به طول ضلع ε پوشانده می‌شود. در واقع کل فضای مورد نظر با استفاده از این روش شبکه‌بندی می‌شود.

ب- شمار مربع‌هایی که هر قسمت از منحنی مورد نظر را

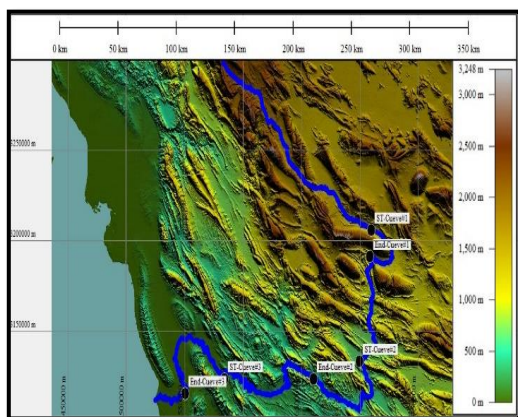


Fig. 1 Specifications of the length and width coordinates of the mond river in plan

شکل ۱ ویژگی‌های طول و عرض رودخانه مند در نقشه

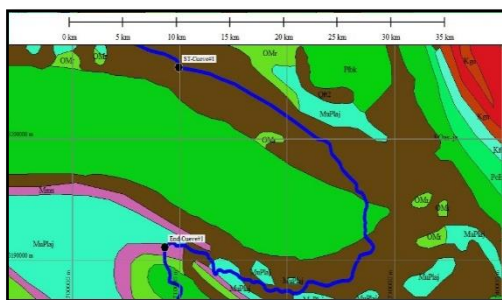


Fig. 2 Geological Formation Plan of the Long Arc No. 2

شکل ۲ نقشه سازندهای زمین‌شناسی در قوس طولی شماره یک

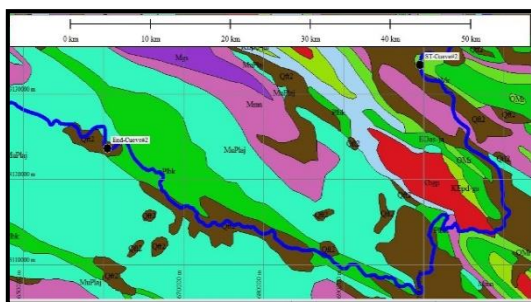


Fig. 3 Geological Formation Plan in Long Arc No. 3

شکل ۳ نقشه سازندهای زمین‌شناسی در قوس طولی شماره دو

۴- نتایج

در این تحقیق از روش‌های تغییرپذیری‌ها و روش شمارش جعبه برای محاسبه بعد فراکتال در رودخانه مند در بازه زمانی ۲۰۰۰ تا ۲۰۱۵ استفاده و آنگاه به مقایسه و بررسی آن‌ها پرداخته شده است برای محاسبه بعد فراکتالی به روش

روش‌های شمارش جعبه و روش تغییرپذیری‌ها در هریک از سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۱۵ به شکل زیر محاسبه و پس از آن با یکدیگر و با ضریب پیچشی مقایسه شده‌اند.

۱. در کل مسیر رودخانه
۲. در سه قوس طولی از رودخانه (در همه سال‌ها به تقریب در یک مختصات یکسان در نظر گرفته شده‌اند)
۳. در ۱۳ بازه از مسیر رودخانه

در ادامه مختصات ابتدا و انتهای دو سر هر یک از پیچان‌رودهای طولی و همچنین مختصات ابتدا و انتها برای ۱۳ پیچان‌رود که از مسیر رودخانه در سال ۲۰۱۵ برداشت شده‌اند به ترتیب در جدول‌های ۱ و ۲ آورده شده‌اند.

جدول ۱ مختصات ابتدا و انتهای قوس‌های طولی

Table 1 The beginning and end coordinates of long meanders

End coordinates		Beginning coordinates		Arc No.
X	Y	X	Y	
710038	3206307	707496	3207098	1
699468	3134213	636344	3119725	2
584184	3124542	551633	3116460	3

جدول ۲ مختصات ابتدا و انتهای بازه‌های رودخانه‌ای

Table 2 The beginning and end coordinates of river reaches

End coordinates		Beginning coordinates		Reach No.
X	Y	X	Y	
644220	3240041	644081	3240221	1
645896	3239712	645579	3239847	2
661366	3229069	660506	3229231	3
660109	3229745	659880	3229912	4
613688	3280913	610215	3282187	5
643632	3240576	643502	3240672	6
672410	3227167	672133	3227660	7
658754	3230432	658406	3230630	8
668146	3229181	667878	3929027	9
651495	3233881	651640	3234091	10
667586	3229837	667296	3229643	11
670252	3229474	669820	3229560	12
651928	3234187	651742	3234407	13

جدول ۳ مقدار بعد فراکتال در همه مسیر رودخانه مند
Table 3 The fractal number in the entire path of the Mond River

Boxcounting method	Variation method	Year
1.02	1.089	2000
1.05	1.148	2005
1.03	1.105	2010
1.02	1.086	2015

نتایج تحلیل ریخت‌شناسی (ضریب پیچشی) در سه پیچان رود طولی مورد بررسی در مسیر رودخانه مند برای سال‌های ۲۰۰۰، ۲۰۱۰، ۲۰۱۵ و ۲۰۱۵ در جدول ۴ ارائه شده است همچنین مقدار بعد فراکتال پیچان‌رودهای یاد شده در سال‌های مورد بررسی، به روش شمارش جعبه و روش تغییرپذیری‌ها به ترتیب در جدول‌های ۵ و ۶ آورده شده است. در ادامه ضریب پیچشی و بعد فراکتالی در این پیچان‌رودها مقایسه و به صورت ضریب همبستگی در جدول ۸ نشان داده شده است.

جدول ۴ تحلیل ریخت‌شناسی سه قوس طویل
Table 4 Morphological analysis of three long arcs sinuosity coefficients

Year				Arc No.
2015	2010	2005	2000	
3.43	3.35	3.36	3.3	1
3.52	3.48	3.4	3.5	2
3.03	3.13	3.1	3.11	3

جدول ۵ نتایج بعد فراکتالی به روش شمارش جعبه در سه پیچان‌رود طویل

Table 5 UTM start and end point of meander

Fractal number (Boxcounting method)				Arc No.
Year				
2015	2010	2005	2000	
1.02	1.02	1.01	1.02	1
1.06	1.03	1.02	1.06	2
1.04	1.01	1.01	1.03	3

جدول ۶ نتایج بعد فراکتالی به روش تغییرپذیری‌ها در سه پیچان‌رود طویل

Table 6 UTM start and end point of meander

Fractal number (Variation method)				Arc No.
Year				
2015	2010	2005	2000	
1.089	1.037	1.033	1.035	1
1.142	1.150	1.127	1.199	2
1.079	1.069	1.076	1.077	3

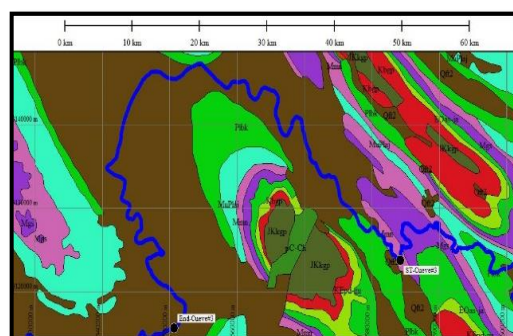


Fig 4. Geological Formation Plan in Long Arc No. 4
 شکل ۴ نقشه سازندهای زمین‌شناسی در قوس طویل شماره سه

تغییرپذیری‌های، مساحت پوشش داده شده توسط طول‌های مشخصه مختلف در بازه مورد نظر محاسبه می‌شود آنگاه برای طول مشخصه‌های مختلف گستره پوشش یافته توسط منحنی پیچان‌رودی با استفاده از کد نوشته شده در محیط Matlab محاسبه و خروجی آن در محیط Excel به نمایش گذاشته شده است. مقدار ضریب همبستگی H برای داده‌های مختصات رودخانه در هر یک از بازه‌های مسیر کلی رودخانه و در قوس‌ها به دست آمده و مقایسه می‌شوند.

برای استفاده از روش شمارش جعبه‌ای، ابعاد جعبه و در نتیجه شبکه‌بندی‌های مختلفی در نظر گرفته شد آنگاه به منظور محاسبه بعد فراکتالی، شمار جعبه‌های درگیر برای عرض‌های مختلف محاسبه می‌شود. برای این منظور از کد نوشته شده در محیط Matlab استفاده شده است. تغییرپذیری‌های عرض جعبه نسبت به شمار جعبه‌ها در مقیاس لگاریتمی به منظور محاسبه بعد فراکتالی در روش شمارش جعبه‌ای استفاده می‌شود. بهترین نمودار توانی گذرنده از نقاط مذکور که دارای کمترین میانگین مربع‌های خطا بوده و بیشترین ضریب همبستگی را دارا باشد، به دست آمده و توان معادله توانی مورد نظر به عنوان بعد فراکتالی در روش شمارش جعبه‌ای در بازه مورد نظر از رودخانه مند در نظر گرفته می‌شود. در جدول ۳ مقدار بعد فراکتال در کل مسیر رودخانه مند آورده شده است.

از نتایج به دست آمده در جدول ۳ مشاهده می‌شود که بیشترین مقدار بعد فراکتال در هر دو روش، شمارش جعبه و روش تغییرات در سال ۲۰۰۵ و به ترتیب برابر با ۱/۴۸ و ۱/۰۵ می‌باشد.

شدید است. با توجه به این تقسیم بندی و با در نظر گرفتن اعداد ارائه شده در جدول شماره ۸ مشخص می شود که بازه های ۳، ۴، ۸ و ۹ سینوسی و بقیه بازه ها پیچانرودی می باشند. لازم به یادآوری است که هرچه این ضریب افزایش یابد بر شدت پیچانرود بودن رودخانه اضافه می شود.

جدول ۸ نتایج تحلیل ریخت شناسی و بعد فراکتال

Table 8 Results of morphological and fractal dimension analysis

Fractal number	Central angle	sinusity coefficient	The length of the valley	Wave length	Reach No.
1.003	96	1.17	267	228	3
1.055	99	1.19	381	320	4
1.008	101	1.19	1042	876	9
1.012	105	1.2	348	283	8
1.023	107	1.26	4660	3699	1
1.035	110	1.28	206	161	2
1.040	113	1.26	714	565	13
1.053	120	1.30	520	400	7
1.056	122	1.40	433	308	11
1.060	137	1.42	359	254	6
1.063	155	1.53	533	348	10
1.098	161	1.61	711	440	12
1.150	162	1.68	496	295	5

با در اختیار داشتن فراسنجه های محاسبه شده از تحلیل ریخت شناسی، ضریب همبستگی بسیار خوبی برابر با ۰/۹۶ بین فراسنجه های ضریب پیچشی و زاویه مرکزی همان گونه که در شکل ۵ مشاهده می شود به دست می آید. در نتیجه با افزایش ضریب پیچشی، زاویه مرکزی نیز افزایش می یابد.

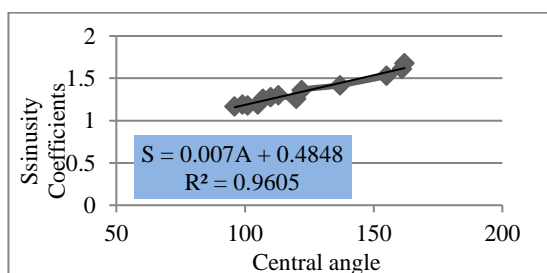


Fig 5. Graph of the correlation coefficient between the parameters of the sinusity coefficient and the central angle

شکل ۵ نمودار ضریب همبستگی میان فراسنجه های ضریب پیچشی و زاویه مرکزی

در ادامه ضریب همبستگی بین فراسنجه های بعد فراکتالی و ضریب پیچشی و همچنین بعد فراکتالی با زاویه مرکزی را بررسی می گردد.

در جدول بالا برای سه پیچانرود از رودخانه مند در یک مختصات به تقریب یکسان در محدوده سال های ۲۰۰۰ تا ۲۰۱۵، از ضریب های به دست آمده برای پیچانرودهای طویل، پیچانرود دوم بیشترین ضریب پیچشی را با مقدار ۳/۵۲ در سال ۲۰۱۵ دارد. مقدار بعد فراکتال با روش شمارش جعبه و همچنین مقدار ضریب پیچشی محاسبه شده که پیچانرود دوم با بعد فراکتالی ۱/۰۶ در روش شمارش جعبه و ۱/۱۹۹ در روش تغییرپذیری ها دارای بیشترین مقدار بعد فراکتال بوده است.

با توجه اینکه به اینکه پیچانرود دوم بیشترین مقدار ضریب پیچشی را با توجه به جدول ۴ به دست آمده از نتایج ریخت شناسی را داشت و در جدول های بالا بیشترین مقدار بعد فراکتالی هم در پیچانرود دوم به دست آمده است، می تواند بیانگر این موضوع باشد که رابطه مستقیمی بین این دو فراسنجه وجود دارد.

جدول ۷ مقایسه تحلیل ریخت شناسی با بعد فراکتالی به

روش شمارش جعبه و روش تغییرات در سه پیچانرود طویل از رودخانه مند

Table 7 UTM start and end point of meander

Correlation coefficient		
Boxcounting method	Variation method	Year
0.99	0.99	2000
0.94	0.95	2005
0.98	0.99	2010
0.99	0.98	2015

در جدول ۷ مقایسه تحلیل ریخت شناسی با بعد فراکتالی به صورت ضریب همبستگی بین آن ها بیان شده است و همان طور که مشخص می باشد مقدار ضریب همبستگی در همه سال ها بسیار خوب بوده و نزدیک به یک می باشد.

در ادامه در جدول ۸ تحلیل ریخت شناسی برای این پیچانرودها انجام شده و بعد فراکتال به روش تغییرپذیری ها نیز محاسبه و آورده شده است.

نتایج تحقیقات انجام شده در گذشته در زمینه تقسیم بندی رودخانه ها مشخص کرد که در صورتی که ضریب پیچشی بین ۱/۰۶ تا ۱/۲۵ باشد رودخانه سینوسی و در صورتی که بین ۱/۲۵ تا ۲ باشد رودخانه پیچانرودی می باشد در صورتی که این ضریب بیشتر از دو باشد رودخانه گیچانرود

در کل مسیر رودخانه در سال ۲۰۰۵ مقدار بعد فراکتال برابر با ۱/۰۵ و بزرگ‌تر از سال‌های دیگر می‌باشد و مقدار بعد فراکتال در پیچان رود دوم بزرگ‌تر از دو پیچان رود دیگر بوده و مقدار آن برابر با ۱/۰۶ می‌باشد. همان‌طور که در جدول ۳ مشخص است پیچان رود دوم بیشترین مقدار ضریب پیچشی را داشت بیانگر این موضوع باشد که رابطه مستقیمی بین این دو فراسنجه وجود دارد.

ضریب همبستگی خوبی (به تقریب برابر با یک) بین بعد فراکتال با ضریب پیچشی در پیچان‌رودهای طویل وجود دارد.

ضریب همبستگی بسیار خوبی برابر با ۰/۹۶ بین فراسنجه های ضریب پیچشی و زاویه مرکزی که از تحلیل ریخت‌شناسی محاسبه شده‌اند به دست آمده است که بیانگر رابطه مستقیم بین آن فراسنجه‌ها می‌باشد به صورتی که با افزایش ضریب پیچشی، زاویه مرکزی نیز افزایش یافته است. با استفاده از نتایج به دست آمده از جدول ۷ و رسم منحنی ضریب همبستگی برابر با ۰/۸۵ میان فراسنجه های بعد فراکتال و ضریب پیچشی و همچنین ضریب همبستگی برابر با ۰/۸۶ میان فراسنجه های بعد فراکتال با زاویه مرکزی نشان‌دهنده آن است که فراسنجه بعد فراکتالی، شاخص مناسبی برای بیان میزان تغییرپذیری‌ها و پیچیدگی رودخانه‌های پیچان‌رودی در نقشه بوده و می‌تواند به عنوان فراسنجه هندسی جدید وارد مدل‌های ریخت‌شناسی رودخانه‌های پیچان‌رودی شود.

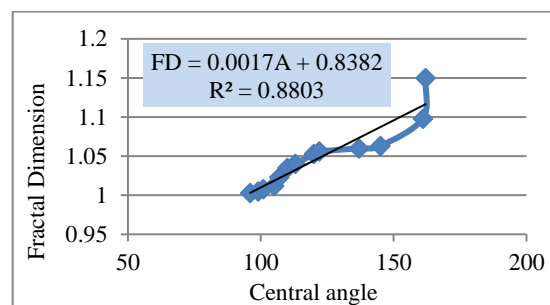
۶- منابع

Andronache, I.C. and Ciobotaru, A.M. (2014). The use of morphological theories in geographic researches. *European Academic Research*, I(11), 3992- 4005.

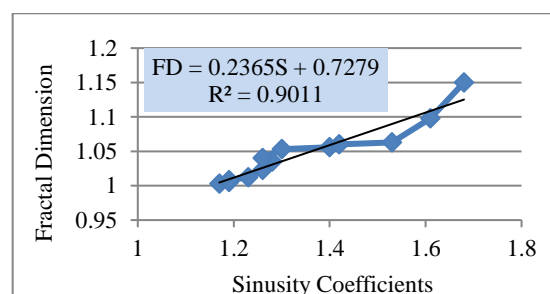
Ariza-Villaverde, A.B., Jimenez-Hornero, F.J. and Gutierrez de Rave, E. (2013). Multi-fractal analysis applied to the study of the accuracy of DEM-based stream derivation, *Geomorphology*. 197, 85-95.

Aubeneau, A., Martin, R., Bolster, D., Schumer, R., Jerolmack, D. and Packman, A. (2015). Fractal patterns in riverbed morphology produce fractal scaling of water storage times, *Geophysical Research Letters*. 42(13), 5309-5315.

با توجه به فراسنجه های جدول ۸ و رسم منحنی ضریب همبستگی همان‌طور که در شکل ۶ مشاهده می‌شود ضریب همبستگی برابر با ۰/۸۸ میان بعد فراکتال و زاویه مرکزی و با توجه به شکل ۷ همچنین ضریب همبستگی برابر با ۰/۹۰ میان بعد فراکتال و ضریب پیچشی به دست آمده که بیانگر همبستگی خوبی بین این فراسنجه‌ها می‌باشد.



شکل ۶ نمودار ضریب همبستگی میان بعد فراکتال و زاویه مرکزی



شکل ۷ نمودار ضریب همبستگی میان بعد فراکتال و ضریب پیچشی

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق بعد فراکتالی به روش شمارش جعبه و روش تغییرپذیری‌ها در بازه زمانی سال‌های ۲۰۰۰ تا ۲۰۱۵ برای رودخانه مند هم در کل مسیر رودخانه و هم در سه پیچان رود طویل از آن محاسبه شده و در کنار آن مقدار ضریب پیچشی برای این پیچان‌رودها به دست آمده است و همچنین مقدار بعد فراکتال برای ۱۳ پیچان‌رود از مسیر رودخانه در سال ۲۰۱۵ به روش تغییرپذیری‌ها محاسبه و با تحلیل ریخت‌شناسی بررسی و ارزیابی شده‌اند.

- Nikora V.I. (1991). Fractal structures of river plan forms, *Water Res. Res.* 27(6), 1327-1333.
- Ortega, J.A., Razola, L. and Garzón, G. (2014). Recent human impacts and change in dynamics and morphology of ephemeral rivers. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 14, 713-730.
- Parker, G. (1976). On the cause and characteristic scales of meandering and braiding rivers, *J. Fluid Mech.* 76, 457-478.
- Pelletier, J.D. (2007). Fractal behavior in space and time in a simplified model of fluvial landform evolution, *Geomorphology*. 91, 291-301.
- Rakhshandehroo, G.R. and Ghadampour, Z. (2011). A combination of fractal analysis and artificial neural network to forecast groundwater depth, *Iranian Journal of science and Technology (B: Engineering)*. 35(C1), 121-130.
- Ramos, J. and Gracia, J. (2012). Spatial-temporal fluvial morphology analysis in the Quelite River: its impact on communication systems, *Journal of Hydrology*. 412-413, 269-278.
- Shen, X.H., Zou, L.J. and Zhang, G.F. (2011). Fractal characteristics of the main channel of Yellow River and its relation to regional tectonic evolution, *Geomorphology*. 127(1-2), 64-70.
- Snow, R.S. (1989). Fractal sinuosity of stream channels, *Pure Appl Geophys.* 131(1/2), 99-109.
- Sowparnika, M. and Jairaj, P.G. (2014). Implication of fractal dimation on properties of rivers and river basins. 5(12), 155-164.
- Tadaki, M., Brierley, G. and Cullum, C. (2014). River classification: theory, practice, politics, *WIREs Water*. 1, 349-367.
- Tarboton, D.G., Bras, R.L. and Rodriguez-Iturbe, I. (1988). The fractal nature of river networks, *Water Resour. Res.* 24, 1317-1322.
- Tessier, Y., Lovejoy, S., Hubert, P., schertzer, D. and Pechertzer, S. (1996). Multifractal analysis and modeling of rainfall and river flows and scaling, causal transfer functions. *Journal of geophysical research. Fractals, lattice models, and environmental systems*, 101 (D21), 26427-26440.
- Zhang, B., Ai, N., Zheng, W.H., Yi, C. and Qin, F. (2008). Meanders of the Jialing River in China: Morphology and formation, *Chinese Science Bulletin*. 53(2), 267-281.
- Bachelier, L. (1900). *Theorie de la speculation*, *Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure*. 17(3), 21-86.
- Beauvais, A. and Montgomery, D.R. (1996). Influence of valley type on the scaling properties of river planforms, *Water Resour. Res.* 32, 1441-1448.
- Beer, T. (1990). Modelling rainfall as a fractal process. *Mathematics and computer in simulation*, 32(1-2), 119-124.
- Burrough, P.A. (1981). Fractal dimensions of landscapes and other environmental data, *Nature*. 294, 240-242.
- Crosato, A. (2008). Analysis and modelling of river meandering *Analyse en modellering van meanderende rivieren*. Ph.D. thesis, DELF University of technology.
- Cudennec, C., Fouad, Y., Sumarjo Gatot, I. and Duchesne, J. (2004). A geomorphological explanation of the unit hydrograph concept, *Hydrol. Process*, 18(4), 603-621.
- De Bartolo, S.G., Veltri, M. and Primavera, L. (2006). Estimated generalized dimensions of river networks. *J. Hydrol.* 322, 181-191.
- Dubuc, B. and Dubuc, S. (1996). Error bounds on the estimation of fractal dimension. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 33(2), 602-626.
- Frish, U. (1995). *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov*, Cambridge University Press (Eds), Cambridge (UK), 296.
- Ghosh, P. (2000). Estimation of Channel Sinuosity from Paleocurrent Data: A Method Using Fractal Geometry, *Journal of Sedimentary Research*. 70(3), 449-455.
- Kolmogorov, A. (1941). The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds number, *Comptes Rendus de l'Académie des sciences*. 30, 9-13.
- Lopes, R. and Betrouni, N. (2009). Fractal and multifractal analysis: A review, *Medical Image Analysis*. 13, 634-649.
- Mandelbrot, B. (1967). How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 156, 636-638.
- Mandelbrot, B.B. (1985). Self-affine fractals and fractal dimension. *Physica scripta*, 32(4), 257.
- Nestler, J. and Sutton, V.K. (2000). Describing scales of features in river channels using fractal geometry concepts, *Regulated Rivers: Research & Management*. 16(1), 1-22.