مجله علمی- پژوهشی
دوره ۴، شماره ۱، بهار ۱۳۸۸

«یادداشت تحقیقاتی»

شبیه سازی امواج تیز ایستا با استفاده از روشهای حجم محدود و تفاضل محدود

ابراهیم علامتیان[۱]، محمد رضا جعفرزاده[۲*]
۱- دانشجوی دکترای عمران- دانشگاه فردوسی مشهد
۲- دانشیار گروه عمران، دانشکده مهندسی- دانشگاه فردوسی مشهد

*** مشهد، صندوق پستی ۱۱۱۱- ۹۱۸۸۵**
jafarzad@um.ac.ir

چکیده- در این مقاله رفتار امواج تیز مورب ایستا در کانال‌های باز به دو روش عددی حجم محدود و تفاضل محدود مطالعه می‌شود. در روش حجم محدود، الگوی ون- لیر با تابع محدود کننده پیشرفته شیب، در شبکه‌های بی‌سازمان مثلثی شکل به‌کار می‌رود. شیب بستر با استفاده از روش متکی به بالادست و جمله اصلاح شده فشار هیدرواستاتیک مدل‌سازی می‌شود. از رابطه مانینگ برای شبیه‌سازی اصطکاک بستر و از تئوری طول اختلاط برای مدل‌سازی تلاطم استفاده می‌شود. در روش تفاضل محدود الگوی مک‌کورمک دو گامی با الگوریتم لزجت مصنوعی جیمسون اعمال می‌شود. از هر دو روش برای مطالعه امواج موربی که از برخورد جریان فوق بحرانی با مانع عرضی در کانال تولید می‌شوند، استفاده شده است. مقایسه نتایج عددی و اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهد که هر دو مدل به‌خوبی توانایی شبیه‌سازی لبه تیز امواج ایستا را دارند؛ اما روش ون- لیر با نتایج آزمایشگاهی سازگاری بیشتری دارد.

کلید واژگان: معادلات آبهای کم عمق، حل‌کننده‌های ریمن، روش ون- لیر، روش مک کورمک، امواج تیز ایستا.

۱- مقدمه

موج تیز[۱] در کانال‌های باز، از تغییر ناگهانی مشخصات جریان به‌وجود می‌آید. امواج تیز به دو دسته امواج تیز پویا و امواج تیز ایستا تقسیم بندی می‌شوند. موقعیت و مشخصات امواج تیز پویا با زمان تغییر می‌کند، اما موقعیت و مشخصات امواج تیز ایستا پس از دائمی شدن جریان بدون تغییر باقی می‌ماند. پرش هیدرولیکی و امواج تیز مورب تولید شده در تبدیل‌ها به‌عنوان امواج تیز ایستا طبقه‌بندی می‌شوند. هنگامی که جریان فوق بحرانی در کانال باز با یک مانع عرضی برخورد می‌کند، تراز آب در پشت مانع بالا می‌آید. در پایین‌دست، جریان رها می‌شود

1. Shock Wave

و مؤلفهٔ سرعت درجهت عمود بر محور کانال موجب برخورد جریان به دیوارها و در نتیجه تولید و تکثیر امواج تیز مورب ایستا می‌شود.

بسیاری از مدل‌های هیدرودینامیکی برای شبیه‌سازی جریان در رودخانه‌ها، دریاها و مخازن سدها بر اساس روش تفاضل محدود نوشته شده است (DHI, 1998). در حل صریح مدل‌های عددی مرتبه دوم، در محل‌هایی که گرادیان متغیرها زیاد است، نوسانهایی کاذب ایجاد می‌شود. برای حذف این نوسانها می‌توان از مفهوم لزجت مصنوعی[1] و معادلات اصلاح شده استفاده کرد. این روش در حل معادلات آبهای کم عمق به‌کار برده شده است، (Rahman and Chaudhry, 1997). علاوه بر این از روشهای کاهش تغییرات کل[2] نیز برای حذف نوسانها استفاده می‌شود (Wang et al., 2000).

در روشهای حجم محدود به علت استفاده از شکل انتگرالی معادلات، می‌توان از شبکه محاسباتی با اجزای نامنظم نیز استفاده کرد. در این روش‌ها، بخش اصلی کار، تعیین شار عمودی عبوری از هر وجه جزء محاسباتی است. هنگامی که ناپیوستگی منفردی در یک نقطه از قلمروی جواب وجود دارد به آن مسأله ریمن گفته می‌شود. حل‌کننده‌های ریمن با سود جستن از تئوری مشخصات، به شکل مطلوبی توانایی شبیه‌سازی ناپیوستگی‌هایی مانند موج شاک را دارند. بعضی از روشهای حل تقریبی مسئله ریمن عبارتند از: روشهای تجزیه بردار شار[3] که توسط Steger and Warning (1981)، Yang and Hsu (1993)، Zhao et al., (1996) و دیگران توسعه داده شده و روشهای تجزیه اختلاف شار[4] که توسط Roe et al. (1981) توسعه داده شده است. در روش‌های پیشرفته حجم محدود از نوع گودونوف برای دست یافتن به دقت مرتبه بالاتر و در عین حال حذف نوسانهای کاذب در محل ناپیوستگی‌ها از محدودکننده‌های شار یا شیب استفاده می‌شود. به این روش‌ها، روشهای کاهشی مجموع تغییرات گفته می‌شود (Leveque, 2004).

در این تحقیق عملکرد روش حجم محدود ون- لیر و روش تفاضل محدود مک کورمک در شبیه‌سازی امواج تیز مورب ایستای ناشی از وجود مانع عرضی در جریان فوق بحرانی کانال‌های باز بررسی می‌شود. در انتها برای اطمینان از صحت کار، نتایج عددی با اطلاعات به‌دست آمده از یک فلوم آزمایشگاهی مقایسه می‌شود.

۲- معادلات آبهای کم عمق

معادلات آبهای کم عمق، با فرض اولیه توزیع فشار هیدرواستاتیکی و همچنین سیال غیر قابل تراکم، از متوسط‌گیری معادلات سه بعدی ناویر- استوکس در عمق حاصل می‌شود. این معادلات، برای مطالعه بسیاری از پدیده‌های فیزیکی مانند شکست سد، جریان درکانال‌های باز، امواج سیلابی، نیروهای عمل کننده بر سازه‌های ساحلی و انتقال آلودگی به‌کار می‌روند. شکل دو بعدی و ابقایی این معادلات به صورت زیر است (Cea, 2005):

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}=\sum_{k=1}^{3}G_k$$

$$W=\begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix};\qquad F_x=\begin{pmatrix} q_x \\ \dfrac{q_x^2}{h}+\dfrac{gh^2}{2} \\ \dfrac{q_xq_y}{h} \end{pmatrix};\qquad F_y=\begin{pmatrix} q_y \\ \dfrac{q_xq_y}{h} \\ \dfrac{q_y^2}{h}+\dfrac{gh^2}{2} \end{pmatrix}\qquad (۱)$$

در این رابطه g شتاب جاذبه، W بردار متغیرهای ابقا شده، q_x و q_y دبی در واحد عرض، F_x و F_y بردارهای شار به‌ترتیب در جهت‌های x و y و G_k بردار جملات

1. Artificial Viscosity
2. Total Variation Diminishing, TVD
3. Flux Vector Splitting Methods
4. Flux Difference Splitting Methods

چشمه است؛ G_1 و G_2 به‌ترتیب جملات چشمه شیب و اصطکاک بستر و G_3 جمله چشمه اثرات تلاطمی است؛ جملات چشمه به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$G_1=\begin{pmatrix}0\\ -gh\dfrac{\partial Z_b}{\partial x}\\ -gh\dfrac{\partial Z_b}{\partial y}\end{pmatrix};\qquad G_2=\begin{pmatrix}0\\ -\dfrac{\tau_{b,x}}{\rho}\\ -\dfrac{\tau_{b,y}}{\rho}\end{pmatrix};$$

$$G_3=\begin{pmatrix}0\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon h\dfrac{\partial U_x}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon h\dfrac{\partial U_x}{\partial y}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon h\dfrac{\partial U_y}{\partial x}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon h\dfrac{\partial U_y}{\partial y}\right)\end{pmatrix} \qquad (۲)$$

که در آن U_x و U_y به‌ترتیب سرعت جریان در جهت محورهای x و y، υ لزجت گردابه‌ای، τ_b تنش برشی در بستر و Z_b تراز بستر کانال در مرکز سلول است.

۳- حل عددی معادلات به روش حجم محدود

با انتگرال‌گیری از سیستم معادلات (۱) در زمان و ساده‌سازی روابط، معادلات زیر به‌دست می‌آید. استفاده از این معادلات دقت مرتبه دوم در زمان را به‌دست می‌دهد (Cea, 2005):

$$W^{n+\frac{1}{2}}=W^n-\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial F_x(W^n)}{\partial x}+\frac{\partial F_y(W^n)}{\partial y}\right)+\frac{\Delta t}{2}\sum_{k=1}^{3}G_k^n$$

$$W^{n+1}=W^n-\Delta t\left(\frac{\partial F_x(W^{n+\frac{1}{2}})}{\partial x}+\frac{\partial F_y(W^{n+\frac{1}{2}})}{\partial y}\right)+\frac{\Delta t}{2}\sum_{k=1}^{3}G_k^{n+\frac{1}{2}} \qquad (۳)$$

در این رابطه Δt گام زمانی است. برای جداسازی معادلات در مکان از مدل متکی به بالادست[1] ون- لیر استفاده می‌شود (Cea, 2005). برای رسیدن به دقت مرتبه دوم در روش ون- لیر مقادیر متغیرهای بقا در مرز سلول‌های مثلثی با استفاده از روش MUSCL بازسازی می‌شود (شکل ۱). در این کار از محدودکننده شیب چندبعدی استفاده می‌شود (Yoon and Kang, 2004).

۴- جمله چشمه شیب و اصطکاک بستر

برای محاسبه جمله چشمه شیب بستر از رابطه متکی به بالادست استفاده می‌شود. برای این کار مانند روش محاسبه شار عبور کننده از وجوه سلول در روش ون- لیر عمل می‌شود. برای اعمال شرط توزیع هیدرواستاتیک فشار، جمله چشمه شیب بستر اصلاح و برای محاسبه جمله چشمه اصطکاک بستر از رابطه مانینگ استفاده می‌شود (Cea et al., 2007).

۵- جمله چشمه اثرهای تلاطمی

با انتگرال‌گیری از جمله اثرهای تلاطمی در معادله ممنتم در راستای x (جمله دوم بردار G_3 در رابطه (۲)) بر سطح سلول و اعمال قضیه گوس داریم (Jia, 1999):

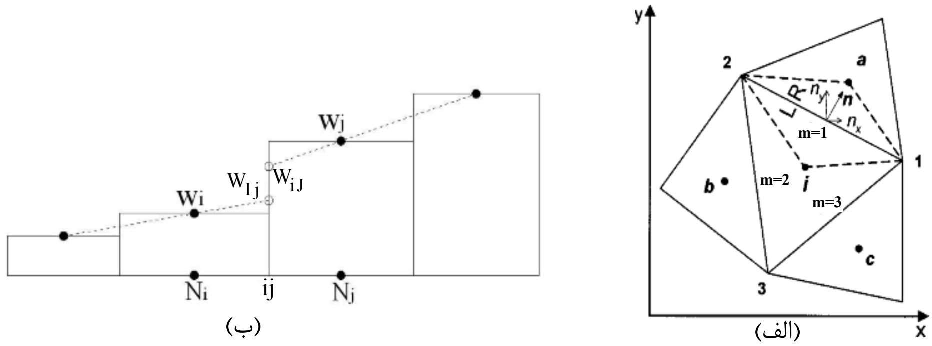
$$\int_{C_i}\frac{\partial}{\partial x}\left(\upsilon h\frac{\partial U_x}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\upsilon h\frac{\partial U_x}{\partial y}\right)dA\approx \sum_{j\varepsilon K_i}\upsilon_{ij}h_{ij}\left(\frac{\partial U_x}{\partial x}\overline{n}_x+\frac{\partial U_x}{\partial y}\overline{n}_y\right)_{ij}L_{ij} \qquad (۴)$$

در این رابطه $\overline{n}=(\overline{n}_x,\overline{n}_y)$ بردار یکه عمود بر هر وجه سلول، K_i تعداد وجوه سلول C_i (در سلول مثلثی $K_i=3$) و L_{ij} طول وجه مشترک دو سلول C_i و C_j است. برای محاسبه مقدار متغیرها و گرادیان‌ها در مرز سلول‌ها از روش مرکزی استفاده می‌شود:

$$\upsilon_{ij}=\frac{\upsilon_i+\upsilon_j}{2}\;;\quad h_{ij}=\frac{h_i+h_j}{2}\;;\quad (\nabla U_x)_{ij}=\frac{(\nabla U_x)_i^1+(\nabla U_x)_j^1}{2} \qquad (۵)$$

که در آن ∇_i^1 گرادیان محدود شده متغیرها در سلول i است.

1. Upwind Scheme



شکل ۱ بازسازی اطلاعات در روی مرز سلول‌ها

در این تحقیق از مدل طول اختلاط[1] برای محاسبه لزجت گردابه‌ای استفاده می‌شود (Cea et al., 2007). به‌صورت مشابه جمله اثرهای تلاطمی در معادله ممنتم در راستای y محاسبه می‌شود.

۶- حل عددی معادلات به روش تفاضل محدود

برای حل معادلات دیفرانسیل آبهای کم عمق به روش تفاضل محدود از الگوی مک‌کورمک دو گامی استفاده می‌شود (Anderson et al., 1984). این الگو متشکل از یک زنجیر دو مرحله‌ای پیش‌بینی کننده- تصحیح‌کننده است. معادلات جداسازی شده تفاضل محدود بصورت زیر است:

پیش‌بینی کننده:

$$W^*_{i,j} = W^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\nabla_x F^n_{x_{i,j}} - \frac{\Delta t}{\Delta y}\nabla_y F^n_{y_{i,j}} - \Delta t\, G^n_{i,j} \quad (۶)$$

تصحیح کننده:

$$W^{**}_{i,j} = W^n_{i,j} - \frac{\Delta t}{\Delta x}\Delta_x F^*_{x_{i,j}} - \frac{\Delta t}{\Delta y}\Delta_y F^*_{y_{i,j}} - \Delta t\, G^*_{i,j} \quad (۷)$$

که در این روابط $W^*_{i,j}$ و $W^{**}_{i,j}$ مقادیر میانی متغیر W در نقطه (i,j)، Δx (Δy) گام مکانی در جهت محور x (y) و Δ_x و ∇_x (Δ_y و ∇_y) به‌ترتیب عملگرهای پیشرو و پسرو در جهت محور x (y) است. مقدار متغیر W در گام زمانی $n+1$ از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$W^{n+1}_{i,j} = .5(W^n_{i,j} + W^{**}_{i,j}) \quad (۸)$$

روش فوق دارای دقت مرتبه دوم در مکان و زمان بوده و باعث پخش خطاهای فاز و دامنه در فضای حل می‌شود. توزیع خطای فاز در محل‌هایی که گرادیان متغیرها زیاد است نوسانهایی را به‌وجود می‌آورد. در این تحقیق با استفاده از روش جیمسون مقادیر متغیر وابسته در هر گام زمانی در هر گره اصلاح شده است (Rahman, and Chaudhry, 1997).

۷- مدل آزمایشگاهی

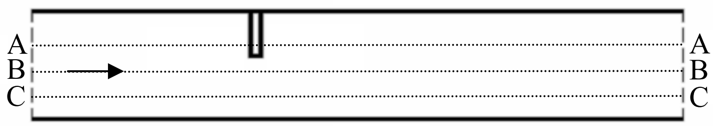
در تحقیق حاضر برای گردآوری داده‌های تجربی از فلوم آزمایشگاه هیدرولیک دانشکده مهندسی دانشگاه فردوسی مشهد استفاده شد (شکل ۲). طول فلوم $L = 8m$، عرض آن $B = 0.4m$ و ارتفاع دیوار کانال برابر $H = 0.5m$ است. شیب طولی کانال $S = 0.00624$ و زبری آن $n = .0104$ اندازه‌گیری شد.

۸- کاربرد روشهای عددی

به‌منظور ارزیابی روشهای عددی مذکور، جریان در کانال با وجود مانع عرضی، مطابق شکل ۳ شبیه‌سازی شد. در این شکل موقعیت مقاطع طولی (A-A)، (B–B) و (C–C) که به‌ترتیب در فاصله 0.1، 0.2و 0.3 متر از دیواره کانال قرار دارند نشان داده شده است.

1. Mixing Length

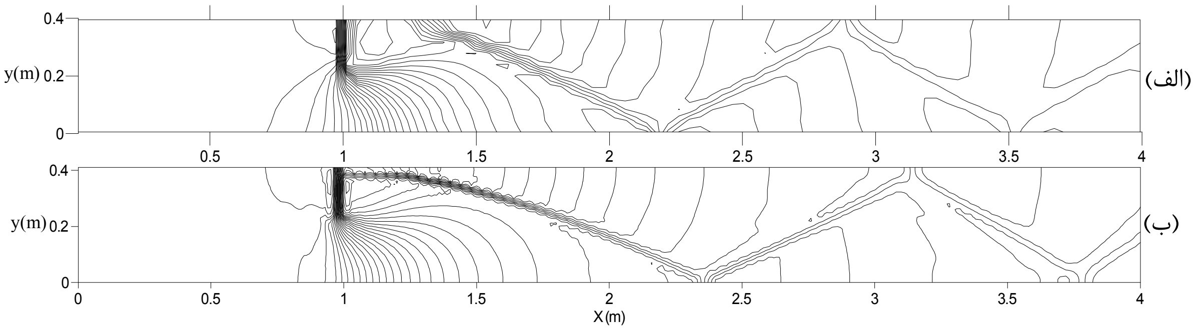
شکل ۲ فلوم آزمایشگاهی



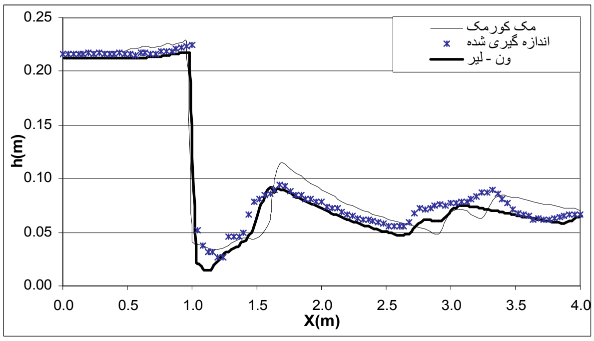
شکل ۳ کروکی کانال و مقاطع مورد استفاده در مسئله

طول کانال در مدل عددی برابر 4.0m بود و مانع با عرض 0.16m در فاصله 1.0m از ابتدای کانال قرار داشت. فضای حل در روش حجم محدود ون- لیر به ۸۵۶۰ سلول مثلثی بی‌سازمان و در روش تفاضل محدود مک کورمک به ۸۰۰۰ گره تقسیم شد. شرایط مرزی جریان در ورودی دبی ثابت $Q_x = 0.0372 m^3/s$ و $Q_y = 0$ بود. شرایط مرزی در پایین‌دست به‌وسیله درونیابی مقادیر وابسته (Q_x, Q_y, h) مشخص شد. شرایط مرزی مرزهای جامد در روش ون- لیر با استفاده از تئوری مشخصات (Yoon and Kang, 2004) و در روش مک کورمک با روش انعکاسی تعیین شد (Bhallamudi and Chaudhry,1992). در هر دو روش عددی برای تضمین پایداری، عدد کورانت $C_r = 0.7$ در نظر گرفته شد. عمق نرمال جریان در کانال برابر ۰/۰۸ متر است. به‌دلیل وجود مانع، عمق آب در بالادست افزایش می‌یابد و در پایین‌دست بر اثر رها شدن جریان و برخورد جت آب به دیوارها، امواج ضربدری به‌وجود می‌آید. در شکل ۴ خطوط هم تراز عمق در کانال نشان داده شده است. اختلاف فاز شوک‌های حاصل از دو روش عددی با یکدیگر در شکل مشخص است. به‌علاوه در پایین‌دست مانع، روش مک کورمک نتوانسته به‌خوبی جریان گردابه‌ای را شبیه‌سازی کند. در شکلهای ۵ و ۶ پروفیل سطح آب در مقاطع (A–A) و (C–C) ترسیم شده است. همان‌طور که به‌صورت کیفی مشاهده می‌شود، مدل‌های عددی مورد استفاده بخوبی توانایی شبیه سازی جریان را داشته و نتایج همخوانی مناسبی با داده‌های آزمایشگاهی دارند. نمودارها نشان می‌دهند که روش ون- لیر نسبت به روش مک کورمک دقت بیشتری دارد؛ همچنین پروفیل طولی امواج در این روش هم فازی بیشتری با داده‌های آزمایشگاهی دارد.

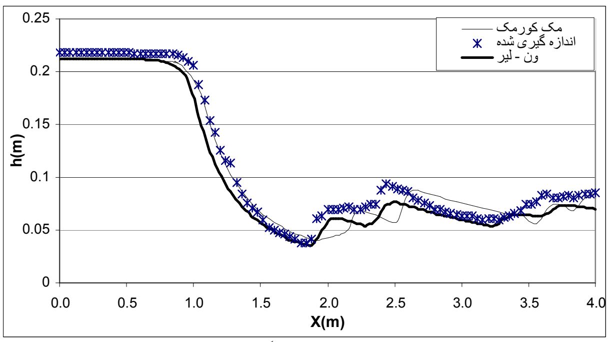
بررسی دقیق‌تر و ارزیابی کمّی نتایج با استفاده از شاخص‌های آماری انجام می‌شود. برای این منظور دو شاخص خطا به‌صورت رابطه (۹) تعریف می‌شود (Zoppou & Roberts, 2003).



شکل ۴ خطوط هم تراز عمق الف–روش ون– لیر ب– روش مک کورمک



شکل ۵ پروفیل سطح آب در امتداد A-A



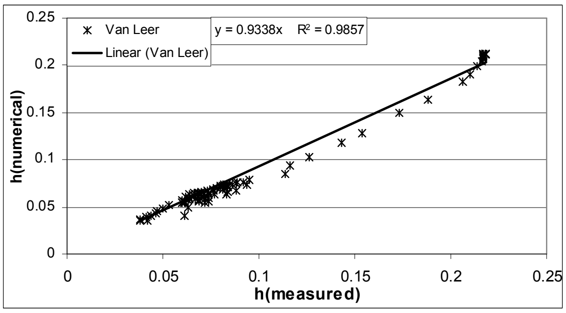
شکل ۶ پروفیل سطح آب در امتداد C-C

$$E_1 = \frac{\sum |h_{num} - h_{mes}|}{\sum |h_{mes}|} \times 100\ ;\ E_2 = \frac{\sum (h_{num} - h_{mes})^2}{\sum (h_{mes})^2} \times 100 \quad (۹)$$

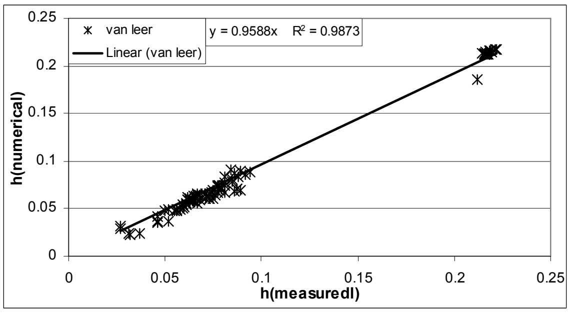
که در آن h_{num} عمق جریان در مدل عددی و h_{mes} عمق اندازه گیری شده آب است. مقادیر پارامترهای بی بعد خطا برای روشهای مختلف عددی در جدول ۱ در امتدادهای A-A، B-B و C-C درج شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود کمترین شاخص‌های خطا در تمامی امتدادها از روش ون– لیر به‌دست می‌آید. بنابراین روش مذکور از صحّت محاسباتی بیشتری برخوردار است. به‌منظور برازش خطی، اعماق متناظر اندازه‌گیری شده و محاسباتی از روش ون– لیر در امتدادهای A-A و C-C رسم می‌شوند؛ آنگاه بر مجموعه نقاط، خطی برازش داده می‌شود، (شکل‌های ۷ و ۸).

جدول ۱ مقایسه شاخص‌های خطا

روش / پارامتر	روش مک‌کورمک			روش ون- لیر		
	A-A	B-B	C-C	A-A	B-B	C-C
E_1	۸/۱۹	۵/۰۹	۹/٦۹	۷/۵۱	٤/۵۷	۵/۹۷
E_2	۰/۸۲	۰/٤۱	۱/۰٦	۰/۷۹	۰/۳۰	۰/۳۸



شکل ۷ مقایسه آماری نتایج در امتداد A-A



شکل ۸ مقایسه آماری نتایج در امتداد C-C

بدیهی است شیب خط مذکور در صورتی که نتایج عددی و آزمایشگاهی به یکدیگر نزدیک باشند به واحد نزدیک می‌شود. معادله خط برازش داده شده و ضریب R^2 در همین شکل نشان داده شده است. در جدول ۲ مقادیر ضریب زاویه و ضریب R^2 خطوط برازش داده شده بر اطلاعات آزمایشگاهی و عددی حاصل از دو روش عددی برای امتدادهای مختلف درج شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود نزدیک‌ترین ضریب زاویه خط برازش داده شده به واحد، در هر سه امتداد، از روش ون- لیر به‌دست می‌آید.

جدول ۲ مقادیر ضریب زایه خط برازش شده بر اطلاعات عددی و آزمایشگاهی ($h_{num} = ah_{mes}$)

روش / پارامتر	روش مک‌کورمک			روش ون- لیر		
	A-A	B-B	C-C	A-A	B-B	C-C
a	۰/۹۲	۰/۹٦	۱/۰۵	۰/۹۳	۰/۹۷	۰/۹٦
R^2	۰/۹۷	۰/۹۸	۰/۹٦	۰/۹۹	۰/۹۹	۰/۹۹

۹- نتیجه‌گیری

در این مقاله شبیه‌سازی رفتار امواج تیز ایستا با استفاده از معادلات ناماندگار متوسط گرفته شده در عمق آبهای کم عمق بررسی شد. در ابتدا از روش حجم محدود ون - لیر در شبکه بی‌سازمان مثلثی استفاده شد. در قسمت بعدی الگوی تفاضل محدود مک کورمک به‌کار برده شد. در مقایسه نتایج عددی و آزمایشگاهی مشاهده شد که هر دو مدل ون‌لیر و مک‌کورمک به‌خوبی می‌توانند به تولید پیشانی تیز امواج ایستا بپردازند. اما روش ون- لیر دقت بیشتری (با شاخص خطای E_2 حداکثر با ۰/۸ درصد خطا) داشته و به‌خوبی گردابه پشت مانع را شبیه‌سازی می‌کند. بررسی کمّی خطاها نیز این مسأله را تأیید کرد.

۱۰- فهرست علائم

بردار متغیرهای ابقا شده	W
بردار فلاکس در جهت x	F_x
بردار فلاکس در جهت y	F_y
جمله چشمه شیب بستر	G_1
جمله چشمه اصطکاک بستر	G_2
جمله چشمه اثرهای تلاطمی	G_3
شتاب جاذبه	g
سرعت جریان در جهت محور x	U_x
سرعت جریان در جهت محور y	U_y

لزجت گردابه‌ای	υ
تنش برشی در بستر	τ_b
تراز بستر کانال در مرکز سلول	Z_b
گام زمانی	Δt
سلول شماره i	C_i
زمان	t^{n+1} ، $t^{n+\frac{1}{2}}$ ، t^n
مقدار متغیر در مرکز سلول C_i زمان t^n	W_i^n
بردار یکه عمود بر وجه	$\overline{n} = (\overline{n}_x, \overline{n}_y)$
تعداد وجوه سلول C_i	K_i
طول وجه مشترک دو سلول C_i و C_j	L_{ij}
گرادیان محدود شده متغیرها در سلول C_i	∇_i^1
جریان در مدل عددی	h_{num}
عمق اندازه گیری شده	h_{mes}
شاخص خطا	E_2 ، E_1
ضریب تعیین	R^2
عدد کورانت	C_r
مقدار متغیر در نقطه(i, j) در زمان t^n	$W_{i,j}^n$
مقدار متغیر W در گام میانی	$W_{i,j}^{**}$ ، $W_{i,j}^{*}$

۱۱- منابع

Anderson, D. A., Tannehill, J. D. and Pletcher, R. H. (1984). “Computational fluid mechanics and heat transfer”, McGraw-Hill, New York.

Bhallamudi, S. M. and Chaudhry, M. H. (1992). “Computation of flow in open-channel transitions”, Journal of Hydraulic Research, IAHR. V. 30, pp. 77-93.

Cea, L. (2005). “An unstructured finite volume model for unsteady turbulent shallow water flow with wet-dry fronts, numerical solver and experimental validation”, Doctoral Thesis, Departamentode Metodos Matematicos de Representacion, Universidad de A Coruna.

Cea, L., Jeronimo, P.LC. and Vazquez-Cendon, ME. (2007). “Depth averaged modelling of turbulent shallow water flow with wet-dry fronts”, Arch. Comput. Methods Eng., 14, pp. 303–341.

DHI. MIKE21C. (1998). User guide and scientific documentation. Danish Hydraulic Institute, Denmark.

Jia, Y. and Wang, SSY. (1999). “Numerical model for channel flow and morphological change studies”, Journal of Hydraulic Engineering , 125(9), pp. 924–933.

Leveque, R. J. (2004). “Finite volume methods for hyperbolic problems”, Cambridge University Press.

Rahman, M. and Chaudhry, M. H. (1997). “Computation of flow in open-channel transitions”, Journal of Hydraulic Research. 35, pp. 242-256.

Roe, P.L. (1981). “Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes”, Journal of Computational Physics, 135, pp. 357-372.

Steger, J. and Warning, R. (1981). “Flux vector splitting of inviscid gas dynamic equations with applications to finite difference methods”, Journal of Computational Physics, 40, pp. 263-293.

Wang, J.S., Ni, H.G. and He, Y.S. (2000). “Finite difference TVD scheme for computation of dam break problems”, Journal of Hydraulic Engineering, 126(4), pp. 253-262.

Yang, J. and Hsu, C. (1993). “Computation of free surface flows”, Journal of Hydraulic Research, 31(3), pp. 403-413.

Yoon, T. H. and Kang, S. (2004). “Finite volume model for two-dimensional shallow water flows on unstructured grids”, Journal of Hydraulic Engineering, 130(7), pp. 678-688.

Zhao, D.H., Shen, H.W., Lai, J.S. and Tabious, G.Q. (1996). “Approximate Riemann solvers in FVM for 2D hydraulic shock wave modeling”, Journal of Hydraulic Engineering, 122(12), pp. 692–702.

Zoppou, C. and Roberts, S. (2003). “Explicit schemes for dam-break simulations”, Journal of Hydraulic Engineering, 129(1), pp. 11-34.