

تحلیل همزمان جریان غیرماندگار و پاسخ‌های دینامیکی سازه خطوط لوله به روش MOC-FDM

سید محمود جزایری مقدس^{۱*}، حسین محمد ولی سامانی^۲

۱- مربی سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شوشتر

۲- استاد هیدرولیک، دانشگاه شهید چمران اهواز

* شوشتر، دانشگاه آزاد اسلامی شوشتر

mahmoodjazayeri@yahoo.com

چکیده- ضربه قوچ نوعی جریان میرا در خطوط لوله است که معمولاً بر اثر بسته شدن شیرها یا توقف ناگهانی کار پمپ‌ها ایجاد می‌شود. این پدیده با تغییر ناگهانی در فشار و سرعت سیال همراه بوده و موجب ایجاد لرزش‌های دینامیکی در سازه لوله می‌شود و لرزش‌های سازه‌ای نیز می‌توانند بر جریان سیال تأثیر بگذارند. با در نظر گرفتن این تأثیر متقابل لازم است اثر تداخلی سیال-سازه مدل‌سازی شود. در این تحقیق اثر تداخلی ضربه قوچ در خطوط لوله مطالعه شده است. دو دسته معادلات هیدرولیکی و سازه‌ای که با یکدیگر جملات مشترکی دارند، به‌طور همزمان به روش MOC-FDM به‌وسیله برنامه کامپیوتری نوشته شده، تحلیل عددی شده‌اند و چند مسأله نمونه نیز به این روش حل شده است. نتایج به‌دست آمده رضایت بخش بوده و نشان دهنده آن است که در نظر گرفتن اثر تداخلی سیال-سازه می‌تواند بر مقادیر فشار سیال اثر بحرانی داشته باشد.

کلیدواژگان: خط لوله، جریان غیرماندگار، تداخل سیال-سازه، ضربه قوچ، تحلیل کوپله.

۱- مقدمه

مشخصات جریان داخل لوله تأثیر بگذارند و بنابراین اندرکنشی بین سیال و سازه لوله ایجاد می‌شود. این اندرکنش سیال-سازه^۳ (FSI) در خطوط لوله حائز اهمیت فراوان است؛ زیرا تأثیری که سازه الاستیک لوله بر جریان سیال (سرعت و فشار) می‌گذارد باعث تغییر مشخصات جریان می‌شود. همچنین تأثیری که سازه لوله از جریان میرای درون لوله می‌پذیرد و ارتعاشهایی که در سیستم خط لوله یا شبکه‌های توزیع سیال بر اثر این پدیده ایجاد می‌شود بسیار مهم است. تخمین‌زدن نیروهایی که در تکیه‌گاه‌های سیستم خطوط لوله بر اثر

وقتی جریان سیال از حالت ماندگار به حالت ماندگار جدیدی تغییر شرایط می‌دهد، جریان غیرماندگار در وضعیت گذار را جریان میرا^۱ (گذرا) می‌نامند. ضربه قوچ^۲ نوعی جریان میرا است که در خطوط لوله و بر اثر بسته شدن شیرها یا توقف ناگهانی کار پمپ‌ها ایجاد می‌شود. این پدیده با تغییر ناگهانی در فشار و سرعت سیال همراه بوده و باعث ایجاد لرزش‌های دینامیکی در سازه لوله می‌شود. این لرزش‌های سازه‌ای نیز می‌توانند بر

3. Fluid-Structure Interaction

1. Transient Flow
2. Water Hammer

Bergant and Tijsseling (2001) پارامترهای مؤثر بر امواج ضربه قوچ را مطالعه و برای حل معادلات هیدرولیکی و سازه‌ای از روش مشخصه استفاده کردند. Tijsseling (2003) روشی را برای دقیق‌تر کردن حل بالا ارائه کرده است. (2002) Rachid تداخل سیال-سازه را در سیستم‌های لوله غیرالاستیک مدل‌سازی کرد. Sreejith (2004) and Jayaraj تداخل سیال-سازه را در خطوط لوله فشار بالا در رآکتورهای هسته‌ای با روش اجزای محدود بررسی کرد. (2007) Tijsseling نوعی مدل ریاضی تک‌بعدی را برای تحلیل تداخل سیال-سازه در لوله‌های با جداره ضخیم ارائه کرد. نقطه مشترک بیشتر این پژوهش‌ها، این باور است که در نظر گرفتن اثرهای تداخلی سیال-سازه بر فشار سیال درون لوله، اثر افزایشی موضعی دارد.

در تحقیق حاضر به منظور تحلیل همزمان سیال-سازه در خطوط لوله، روشی متفاوت استفاده شده است. معادلات به‌کار گرفته شده، چهار معادله دیفرانسیل برای توصیف جریان غیرماندگار و پاسخ‌های سازه‌ای ناشی از آن در سیستم لوله پر از سیال است. دو معادله مربوط به هیدرولیک جریان و دو معادله مربوط به سازه خط لوله است. بین این دو دسته معادلات، جمله‌های کوپله وابسته به ضرایب پواسن و سرعت موجود است که تأثیر متقابل سیال و سازه را توصیف می‌کنند و بنابراین برای حل همزمان و انجام این تحلیل طراحی شده است. در این مقاله برای حل معادلات هیدرولیکی از روش خطوط مشخصه - به دلیل قابلیت بالای آن در مدل‌سازی تغییر شدید و سریع جریان - استفاده شده است. معادلات سازه‌ای با استفاده از روش تفاضل‌های محدود (FDM)^۱ حل شده است. روش FDM روشی است که نسبت به روش FEM ساختار ساده‌تری داشته و همخوانی بسیار مناسبی در حل همزمان معادلات هیدرولیکی به روش

ضربه قوچ ایجاد می‌شود و همچنین تعیین نیروهای محوری در مقاطع مختلف لوله برای تعیین ضخامت مورد نیاز برای لوله، به‌ویژه در سیستم‌های حساس اهمیت فراوانی دارد و لازم است روشی دقیق برای تحلیل این اثر تداخلی به‌کار برده شود.

در روش سنتی تحلیل ضربه قوچ، تأثیر الاستیک لوله بر جریان سیال، از طریق کاهش دادن سرعت موج فشاری سیال در نظر گرفته می‌شود (Wylie and Streeter, 1978). این نوع تحلیل، حرکت‌های لوله و تأثیر آن را به‌طور مستقیم بر جریان سیال در نظر نمی‌گیرد. همچنین هیچ روشی برای تحلیل سازه لوله تحت بارهای هیدرولیکی ایجاد شده ارائه نمی‌کند.

تحلیل تداخلی سیال-سازه (FSI)، در چند دهه اخیر مورد توجه بسیاری از پژوهشگران قرار گرفته است. Davidson (1969) نخستین کسی بود که یک روش ماتریسی مرکب از تحلیل هیدرولیکی و سازه‌ای ارائه کرد و مقایسه تحلیل کوپله او با نتایج آزمایشگاهی، درستی روش وی را اثبات کرد. (1986) Belytchko et al. فرایندی دو مرحله‌ای را برای تشابه امواج و تأثیر سازه‌ای آن در سیستم لوله پیشنهاد کردند. (1987) Wiggert et al. روش مشخصه را برای سیال و سازه، به‌صورت همزمان ارائه کردند. (1990) Lavooij and Tijsseling تداخل سیال و لوله را با به‌کار بردن نظریه ضربه قوچ برای سیال و نظریه خمش تیموشنکو برای لوله مدل‌سازی و فرایندی مرکب از روش مشخصه (MOC)^۱ و اجزای محدود (FEM)^۲ را ارائه کردند. (1999) Lee and Kim یک دسته معادلات دینامیکی کاملاً کوپله را برای حرکت‌های ارتعاشی سیستم خط لوله توسعه داده و نوعی فرمول‌بندی اجزای محدود را برای حل این معادلات ارائه کردند. (1999) Zhang et al. تداخل را در حوزه فرکانس مطالعه و تحلیل کردند.

1. Method of Characteristics
2. Finite Element Method

3. Finite Difference Method

مشخصه دارد. برای حل همزمان دو دستگاه معادله، یک مدل عددی و برنامه کامپیوتری تهیه شده است. برخلاف بیشتر روش‌هایی که تاکنون مدل‌های ساده را بررسی کرده‌اند، این مدل توانایی تحلیل شبکه‌های پیچیده شاخه‌ای توزیع سیال را نیز دارد.

۲- معادلات حاکم

جریان غیرماندگار ناشی از ضربه قوچ در خطوط لوله، معمولاً با تغییر در سرعت جریان آغاز می‌شود و این تغییر باعث ایجاد نوسانهایی در فشار سیال درون لوله می‌شود. این نوسانها و تغییر فشار سیال باعث ایجاد لرزهایی سازه‌ای در لوله می‌شوند. بنابراین برای بررسی اثر متقابل سیال و سازه لوله، معادلات حاکم بر هیدرولیک جریان و دینامیک سازه لوله باید با توجه به اثر متقابل آنها بر یکدیگر در نظر گرفته شود.

۲-۱- معادلات هیدرولیکی

تحلیل جریان غیرماندگار بر اساس دو معادله پیوستگی و اندازه حرکت انجام می‌شود. این معادلات برای مجرای بسته انتقال، بر فرضیه‌های اساسی زیر متکی است:

۱- جداره لوله و خود سیال رفتار الاستیک خطی دارند.

۲- جریان سیال در مجرا به صورت تک‌بعدی و توزیع سرعت در مقطع لوله یکنواخت فرض می‌شود.

معادلات پیوستگی و اندازه حرکت به ترتیب به شکل دیفرانسیلی زیر تعریف می‌شود (Zhong & Soon 1997):

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{2C^2}{g} \mu \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{C^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} - V \sin \alpha = 0 \quad (1)$$

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{fV|V|}{2D} = 0 \quad (2)$$

در این روابط U سرعت طولی لوله، α زاویه لوله با افق، C سرعت موج فشاری سیال، f ضریب اصطکاک جریان، t زمان، g شتاب ثقل، H ارتفاع پیزومتریک سیال، x فاصله در جهت طول لوله، μ ضریب پواسن،

V سرعت سیال و D قطر لوله است. جمله $-\frac{2C^2}{g} \mu \frac{\partial U}{\partial x}$ در معادله (۱)، دستگاه معادلات هیدرولیکی را با سازه لوله مرتبط می‌کند. این جمله را جمله کوپله پواسن^۱ در معادلات هیدرولیکی می‌نامند (Bergant & Tijsseling, 2001). در معادله اندازه حرکت، f (ضریب اصطکاک داریسی وایسباخ) را باید از یک مدل اصطکاک غیرماندگار معتبر جایگزین کرد. لازم به ذکر است که در جریان‌های غیرماندگار سریع مانند ضربه قوچ، استفاده از مدل افت اصطکاک ماندگار می‌تواند خطای بزرگی را در تحلیل جریان ایجاد کند. استفاده از مدل غیرماندگار این مشکل را تا حد زیادی برطرف می‌کند (Bergant & Simpson, 1994). در این تحقیق از مدل اصطکاک غیرماندگار برونون^۲ استفاده شده است. این مدل در شرایط بسته شدن شیر در سیستم‌های انتقال آب، دقیق عمل می‌کند و از نظر محاسباتی رضایت‌بخش است. (Brunone et al., 1991)

۲-۲- معادلات دینامیک سازه

همان‌طور که گفته شد، تغییر در مشخصات جریان، بر مجرا که به‌عنوان تکیه‌گاه جریان عمل می‌کند، تأثیر می‌گذارد و نیروهایی در جهت طولی و جانبی به خط لوله وارد می‌کند که باعث ایجاد ارتعاشهایی در جهت‌های مختلف لوله می‌شود. این لرزش‌های سازه‌ای به وسیله دو معادله ارتعاش -یکی در جهت طولی و دیگری در جهت جانبی (عمود بر پلان)- توصیف می‌شوند. این دو معادله شامل جملات هیدرودینامیکی به‌عنوان عوامل ایجاد کننده ارتعاشهای اجباری در سازه هستند (Zhong & Soon 1997):

- معادله تنش - جابجایی در جهت طولی (محوری):

$$A_p E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \rho_p A_p \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{A_p \mu r}{e} \frac{\partial P}{\partial x} + \pi D \frac{f \rho V |V|}{8} = 0 \quad (3)$$

1. Poison's Coupling Term

2. Brunone Unsteady Friction Model

۳- روشهای حل معادلات

۳-۱- حل معادلات هیدرولیکی

همانطور که دیده می شود، معادلات (۱) و (۲)، معادلات دیفرانسیلی جزئی از نوع هذلولوی هستند و برای حل آنها، روشهای مختلفی وجود دارد. یکی از دقیقترین و بهترین روشها، حل همزمان دو معادله به روش مشخصه است. در این روش ابتدا معادلات دیفرانسیل جزئی پیوستگی و اندازه حرکت بر روی مسیرهایی که به خطوط مشخصه موسوم اند، به معادلات دیفرانسیل کامل تبدیل شده و سپس به روش تفاضل محدود حل می شوند:

$$C^+ \Rightarrow \begin{cases} \frac{dH}{dt} + \frac{C}{g} \frac{dV}{dt} + CS_f - V \sin \alpha - \frac{2C^2 \mu}{g} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & (5) \\ \frac{dx}{dt} = +C & (6) \end{cases}$$

$$C^- \Rightarrow \begin{cases} \frac{dH}{dt} - \frac{C}{g} \frac{dV}{dt} - CS_f - V \sin \alpha - \frac{2C^2 \mu}{g} \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & (7) \\ \frac{dx}{dt} = -C & (8) \end{cases}$$

همانگونه که دیده می شود، معادلات (۵) و (۷) به ترتیب بر روی مسیرهای (۶) و (۸) قابل تعریف اند. جمله $\frac{\partial u}{\partial x}$ جزو ویژگیهای سازه ای لوله است و باید پس از حل معادلات سازه ای جایگزین شود. این دستگاه معادلات به روش تفاضل محدود تجزیه می شود تا دستگاه معادلات جبری زیر به دست آید:

$$C^+ : H_i^{n+1} = Cp - BV_i^{n+1} \quad (9)$$

$$C^- : H_i^{n+1} = Cm + BV_i^{n+1} \quad (10)$$

$$Cp = H_{i-1}^n + BV_{i-1}^n - RV_{i-1}^n |V_{i-1}^n| + V_{i-1}^n \Delta t \cdot \sin \alpha + \frac{C^2 \mu \Delta t}{g} \left(\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) \quad (11)$$

$$Cm = H_{i+1}^n - BV_{i+1}^n + RV_{i+1}^n |V_{i+1}^n| + V_{i+1}^n \Delta t \cdot \sin \alpha + \frac{C^2 \mu \Delta t}{g} \left(\frac{U_{i+1}^{n+1} - U_{i-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) \quad (12)$$

$$B = \frac{C}{g} \quad , \quad R = \frac{Cf}{2gD} \Delta t$$

اندیس n پارامتر در زمان حال، اندیس n+1 پارامتر در زمان آینده، Δx طول بازه مکانی و Δt طول بازه زمانی

- معادله تنش - جابجایی در جهت جانبی (خمشی):

$$EI \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + M \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2Vm_f \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + m_f V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m_f \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + m_f V \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + Mg = 0 \quad (4)$$

که e ضخامت لوله، m_f جرم سیال در واحد طول لوله، ρ_p جرم حجمی لوله، ξ جابجایی طولی لوله، I ممان اینرسی لوله، A_p مساحت لوله u جابجایی جانبی لوله (عمود بر پلان)، ρ جرم حجمی سیال، E مدول الاستیسیته لوله، P فشار سیال و M مجموع جرم لوله و سیال در واحد طول است.

جمله $\frac{A_p \mu_r}{e} \frac{\partial P}{\partial x}$ در معادله (۳)، جمله کویله پواسن در معادله سازه ای محوری بوده و این معادله را به معادلات هیدرولیکی جریان مرتبط می سازد. جملات سوم تا ششم معادله (۴)، این معادله را به دستگاه معادلات هیدرولیکی وابسته کرده و عامل ایجاد کننده ارتعاشهای جانبی در لوله هستند.

۳-۲- تداخل سیال - سازه

همانطور که گفته شد، تغییر در سرعت و فشار جریان بر مجرا - که به عنوان تکیه گاه جریان عمل می کند - تأثیر می گذارد. دو سازوکار اصلی در بررسی های پدیده FSI شناخته شده است: ۱- کویله پواسن و ۲- کویله اتصال.

کویله پواسن ناشی از انبساط و انقباض لوله بر اثر نوسانهای فشار در سیال است که باعث ایجاد تنشهای شعاعی در لوله و تبدیل آن به تنشهای طولی متناسب با نسبت پواسن مصالح لوله می شود. کویله پواسن با استفاده از جمله وابسته به نسبت پواسن مصالح، در معادلات هیدرولیکی و سازه ای بررسی می شود.

کویله اتصال، زمانی به وجود می آید که اتصالات در سازه شبکه کاملاً مهار نشده باشند و در محل اتصال، جابجایی طولی یک لوله بر جابجایی لوله دیگر تأثیر بگذارد. این اثر در تحقیق حاضر مدنظر قرار نگرفته است.

می‌باشند. جریان بستگی دارد که از تحلیل هیدرولیکی تعیین و در معادله جایگزین می‌شود. در اینجا برای مشتقات زمانی، حالت کاملاً ضمنی که پایداری آن کاملاً تضمین شده در نظر گرفته شده است. در سمت راست معادله (۱۳) تمامی مقادیر معلوم بوده و در سمت چپ، تغییر مکان طولی گره i و گره قبل و بعد از آن مجهولند. پس برای تمامی نقاط لوله به جز نقاط مرزی (که در آنها شرایط مرزی حاکم است) می‌توان رابطه (۱۳) را به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$A\xi_{i-1}^{n+1} + B\xi_i^{n+1} + C\xi_{i+1}^{n+1} = R_i$$

$$R_i = D\xi_{i-1}^n + E\xi_i^n + F\xi_{i+1}^n + G\xi_i^{n-1} + H \quad (14)$$

رابطه (۱۴) را برای تمام نقاط می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$$[A]\{\xi\} = \{R\} \quad (15)$$

$[A]$ ماتریس قطری ضرایب است. دستگاه معادلات ماتریسی (۱۵) را می‌توان به روش‌های عددی مختلفی حل کرد. در اینجا روش TDMA^۲ با استفاده از الگوریتم توماس به کار رفته که بسیار سریع‌تر از روش‌های کلی حل دستگاه معادلات است. با حل معادله (۱۵) جابجایی طولی در تمامی گره‌های لوله در انتهای گام زمانی $(n+1)$ تعیین می‌شود.

- معادله تنش-جابجایی در جهت جانی (خمشی)

برای حل معادله به روشی که در بخش قبل توضیح داده شد، باید معادله را جداسازی کرده و آن را برای هر نقطه به یک رابطه جبری تبدیل کرد. در نتیجه برای هر گره i داریم:

$$A'u_{i-2}^{n+1} + B'u_{i-1}^{n+1} + C'u_i^{n+1} + D'u_{i+1}^{n+1} + E'u_{i+2}^{n+1} =$$

$$F'u_{i-2}^n + G'u_{i-1}^n + H'u_i^n + I'u_{i+1}^n + J'u_{i+2}^n + K'u_i^{n-1} + L' \quad (16)$$

ها در زمان حال (n) معلوم فرض می‌شوند.

با حل دستگاه دو معادله دو مجهول (۹) و (۱۰) می‌توان فشار و سرعت را در تمامی نقاط لوله و در تمامی زمانها تعیین کرد. برای حل این دستگاه معادلات به شرایط اولیه و شرایط مرزی نیاز است. شرایط اولیه معمولاً ویژگیهای جریان در حالت ماندگار است و شرایط مرزی با توجه به مسأله تعیین می‌شود. در این تحقیق اثر احتمالی جدایی ستون مایع مد نظر قرار نگرفته است.

۳-۲- حل معادلات سازه‌ای

با حل دو معادله (۳) و (۴)، می‌توان جابجایی‌های لوله را در دو جهت طولی و جانی به دست آورد و در نتیجه، نیروهای وارد بر هر نقطه از لوله را تعیین کرد. معادلات فوق به روش تفاضل محدود حل شده‌اند. دلیل استفاده از این روش، سادگی، دقت قابل قبول و هماهنگی مناسب با روش تحلیل انتخاب شده برای هیدرولیک جریان است.

- معادله تنش-جابجایی در جهت طولی (محوری)

برای حل معادله (۳) نخست باید این معادله به روش تفاضل محدود جداسازی شود. بازه‌های مکانی، برای هماهنگی با تحلیل هیدرولیکی باید یکسان باشند. بنابراین طول لوله به بازه‌های مساوی Δx تقسیم‌بندی و مشتقات مکانی و به روش تفاضل مرکزی جداسازی می‌شود. جداسازی مشتقات زمانی به روش ضمنی^۱ انجام می‌شود. بنابراین برای هر نقطه (i) بر روی لوله می‌توان معادله‌ای جبری به صورت زیر نوشت:

$$A\xi_{i-1}^{n+1} + B\xi_i^{n+1} + C\xi_{i+1}^{n+1} = D\xi_{i-1}^n + E\xi_i^n + F\xi_{i+1}^n + G\xi_i^{n-1} + H \quad (13)$$

گها در زمان حال (n) معلوم فرض می‌شوند. A, B, C, D, E, F, G ضرایب معلومی هستند که از گسسته‌سازی معادله به دست می‌آیند (برای اختصار از آوردن آنها خودداری شده است). H به شرایط هیدرولیکی

2. Tri-Diagonal Matrix Algorithm

1. Implicit

کوپله و به صورت گام به گام تحلیل می‌شوند. نتیجه این تحلیل، محاسبه سرعت و فشار در تمامی نقاط سیال و در تمامی زمان‌ها و همچنین جابجایی طولی و جانبی در تمامی نقاط لوله و در تمامی زمان‌ها است.

۳-۴- تعیین نیروهای محوری در لوله

با در دست داشتن جابجایی‌های طولی، تنش و نیروهای محوری وارد بر مقاطع مختلف لوله را می‌توان محاسبه کرد:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x \quad (19)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\xi_{i+1} - \xi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (20)$$

$$F_x = \sigma_x \cdot A_p \quad (21)$$

در این روابط σ_x تنش محوری لوله، ε_x کرنش محوری لوله و F_x نیروی محوری لوله است. در صورتی که لوله در ابتدا یا انتها، تکیه‌گاه طولی داشته باشد، به روش بالا می‌توان واکنش‌های تکیه‌گاهی را به دست آورد.

۴- حل مسأله

با استفاده از نظریه تشریح شده، برنامه‌ای کامپیوتری تهیه شد که می‌تواند پاسخ‌های شبکه لوله‌های شاخه‌ای ناشی از بسته شدن شیر را تحلیل کند. لوله یا شبکه مورد نظر به قطعات مساوی تقسیم می‌شود. از این تقسیم‌بندی، هم برای تحلیل به روش مشخصه سیال و هم برای تحلیل تفاضل محدود سازه لوله استفاده می‌شود. خروجی این برنامه، فشار، سرعت، جابجایی طولی و جانبی لوله و نیروهای محوری لوله در مقاطع مختلف و در زمان‌های مورد نظر است. در ادامه سه مسأله نمونه حل می‌شود که دو مسأله اول و دوم برای صحت‌سنجی مدل و مسأله سوم برای نشان دادن قابلیت مدل و برنامه کامپیوتری مطرح شده است.

$A', B', C', D', E', F', G', H', I', J', K', L'$ ضرایب معلومی است که از گسسته‌سازی معادله به دست می‌آیند و برای اختصار تعریف نشده‌اند. مطابق استدلال بخش قبل، سمت راست معادله (۱۶) معلوم است و آن را برای تمامی نقاط (به جز نقاط مرزی) به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$A'u_{i-2}^{n+1} + B'u_{i-1}^{n+1} + C'u_i^{n+1} + D'u_{i+1}^{n+1} + E'u_{i+2}^{n+1} = R'_i$$

$$R'_i = F'u_{i-2}^n + G'u_{i-1}^n + H'u_i^n + I'u_{i+1}^n + J'u_{i+2}^n + K'u_i^{n-1} + L' \quad (17)$$

در این رابطه، u برای هر نقطه و دو نقطه قبل و دو نقطه بعد از آن در زمان آینده به عنوان مجهول حاضرند.

رابطه (۱۷) را می‌توان برای تمامی نقاط لوله به صورت ماتریسی زیر نمایش داد:

$$[A']\{u\} = \{R'\} \quad (18)$$

$[A']$ ماتریس پنج قطری ضرایب است. دستگاه معادلات ماتریسی بالا به روش PDMA^۱ که روشی برای حل عددی دستگاه معادلات پنج قطری و اساساً مبتنی بر الگوریتم توماس است، حل می‌شود. از حل آن، مقادیر جابجایی جانبی در تمامی نقاط لوله در زمان آینده ($n+1$) به دست می‌آید.

۳-۳- فرایند حل همزمان

همان‌طور که دیده شد، دستگاه معادلات هیدرولیکی و دستگاه معادلات سازه‌ای به وسیله جملاتی به هم مرتبط هستند. حل هر یک از دستگاه‌ها به صورت جداگانه امکان‌پذیر نیست و تحلیل کوپله باید در طی نوعی روند تکرار انجام شود. تحلیل از جریان ماندگار در $t=0$ آغاز می‌شود. در این زمان می‌توان سرعت و فشار جریان را از حالت ماندگار بدست آورد. جابجایی‌های دینامیکی سازه نیز در این لحظه صفر هستند. پس از آغاز شرایط غیرماندگاری جریان در $t>0$ (به عنوان مثال بر اثر بسته شدن شیر انتهایی در خط لوله)، سیال و سازه به شکل

1. Penta-Diagonal Matrix Algorithm

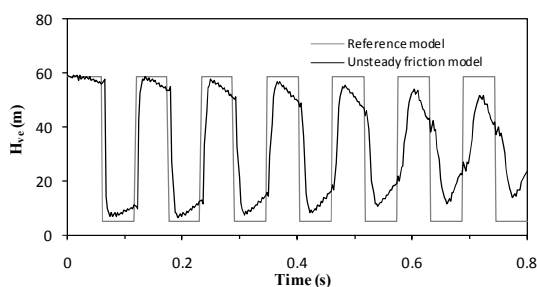
جدول ۱ مشخصات مسأله در مثال اول

سرعت موج	رقوم شیر	رقوم مخزن	زمان بستن شیر	هد مخزن 2	هد مخزن 1	سرعت جریان ماندگار	قطر داخلی لوله	طول لوله	جنس لوله	نوع سیال
۱۳۱۹m/s	۲/۰۳m	0 m	۰/۰۰۹s	۳۲m	۲/۰۳m	۰/۲m/s	۲۲ mm	۳۷/۲m	مس	آب

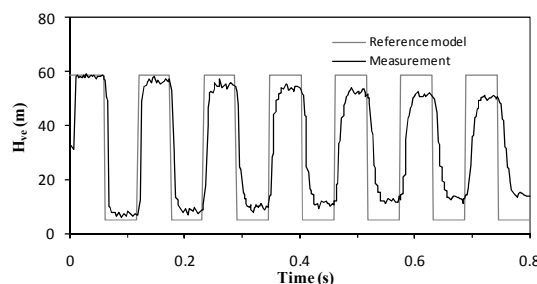
۴-۱-۱- مثال اول

این مسأله یک مدل ساده مخزن-لوله-شیر است که در آزمایشگاه هیدرولیک روبین^۱ در شهر آدلاید کشور استرالیا توسط Bergant و Simpson در سال ۱۹۹۹مورد آزمایش قرار گرفته و نتایج آن در مقالات مختلف توسط این پژوهشگران و دیگران مطالعه شده است (Bergant et.al., 1999; Bergant & Tijsseling, 2001; Bergant et.al., 2006). هدف از حل این مسأله بررسی صحت حل معادلات هیدرولیکی است. مشخصات مسأله و پارامترهای جریان، لوله و شیر در شکل ۱ و جدول ۱ ارائه شده است.

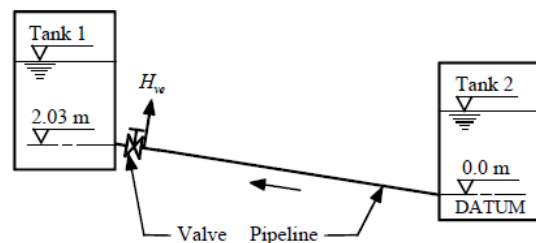
در مقایسه با مدل مرجع و در شکل ۴ مقایسه تحلیل عددی مدل اصطکاک غیرماندگار با نتایج آزمایشگاهی آورده شده است.



شکل ۲ تغییرات هد در پشت شیر حاصل از تحلیل عددی



شکل ۳ تغییرات هد در پشت شیر حاصل از آزمایش



شکل ۱ سیستم ساده مخزن-لوله-شیر مثال اول

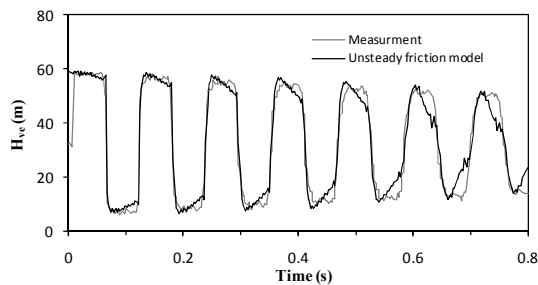
۴-۱-۱-۱- بحث و بررسی نتایج مثال اول

همانگونه که در شکل ۲ دیده می شود، مدل اصطکاک غیرماندگار به کار رفته در تحلیل عددی، باعث افت قابل توجهی در هد جریان در فاصله زمانی نسبتاً کوتاهی شده است؛ درحالی که وقتی از مدل اصطکاک ماندگار کلاسیک لوله ها در تحلیل این مسأله استفاده شد، به دلیل کوتاه بودن لوله و بازه زمانی بسیار کوتاه، اصطکاک بر جریان سیال تأثیر ناچیزی داشته و نتایج به مدل مرجع (بدون اصطکاک) بسیار نزدیک بود. مقایسه دو نمودار در شکل ۴ نشان دهنده نزدیک بودن

جریان غیرماندگار ناشی از بسته شدن شیر پایین دست، به وسیله برنامه کامپیوتری تهیه شده، تحلیل شده است. در این مسأله برای کنترل مستقل هیدرولیک جریان، از اثر تداخلی سیال-سازه صرف نظر و معادلات هیدرولیکی به تنهایی حل شده است. در شکل ۲ نتایج تحلیل عددی مسأله با مدل اصطکاک غیرماندگار برای هد پشت شیر در مقایسه با تحلیل بدون اصطکاک (مدل مرجع) نشان داده شده است. در شکل ۳ نتایج آزمایشگاهی شرح داده شده

1. Robin Hydraulic Laboratory

به وسیله برنامه کامپیوتری تحلیل شده است. در این مسأله، در ابتدا و انتهای لوله تکیه‌گاه مفصلی در نظر گرفته شده و لوله در طول آن آزاد فرض شده و می‌تواند تغییر مکان جانبی داشته باشد. نتایج این تحلیل در شکل‌های ۵ تا ۱۰ آورده شده است.



شکل ۴ مقایسه تغییرات هد در پشت شیر حاصل از آزمایش با نتایج تحلیل عددی تحقیق حاضر

۴-۲-۱- بحث و بررسی نتایج مثال دوم

در شکل ۵ تغییر فشار پشت شیر حاصل از تحلیل عددی تحقیق حاضر با نتایج عددی (2003) Tijsseling مقایسه شده است. در این شکل به منظور درک بهتر اثر تداخلی سیال-سازه و امکان مقایسه آن، مشابه مقاله Tijsseling (2003)، از اصطکاک جریان صرف نظر شده است.

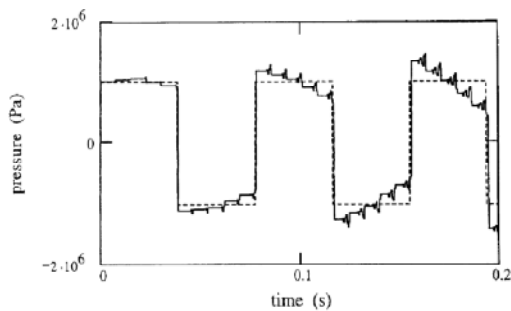
نتایج تحلیل با مدل اصطکاک غیرماندگار و نتایج آزمایشگاهی است. در این شکل همان‌گونه که دیده می‌شود در هر سیکل، بیشینه فشارهای به دست آمده از مدل عددی با نتایج آزمایشگاهی فاصله چندانی ندارند. (سیکل اول ۳/۳٪، سیکل دوم ۱/۱٪، سیکل سوم ۰/۴٪، سیکل چهارم ۰/۴٪، سیکل پنجم ۰/۳٪، سیکل ششم ۰/۲٪ و ...). این اختلاف اندک می‌تواند مؤید صحت نتایج تحلیل عددی معادلات هیدرولیکی این تحقیق بوده و تأییدی بر درستی استفاده از مدل‌های اصطکاک غیرماندگار در مسائل ضربه قوچ باشد.

۴-۲-۲ مثال دوم

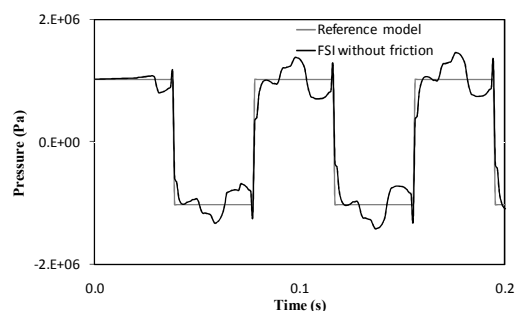
این مسأله نیز مانند مسأله قبل نوعی مدل مخزن-لوله-شیر است که در مقاله (2003) Tijsseling تحلیل شده و هدف اصلی از حل آن، بررسی درستی مدل‌سازی اثر تداخلی پواسن بین سیال و سازه و نیز صحت‌سنجی تغییر مکان‌های جانبی (عمود بر پلان) به دست آمده از مدل عددی است. مشخصات مسأله و پارامترهای جریان، لوله و شیر در جدول ۲ آورده شده است. جریان غیرماندگار ناشی از بسته شدن شیر پایین دست

جدول ۲ مشخصات مسأله در مثال دوم

سرعت موج	رقوم شیر	رقوم مخزن	زمان بستن شیر	هد مخزن	سرعت جریان ماندگار	قطر داخلی لوله	طول لوله	جنس لوله	نوع سیال
۱۰۲۴/۷m/s	0 m	0 m	۰/۰۰۹s	0 m	۱m/s	۷۹۷mm	۲۰m	فولاد نرم	آب

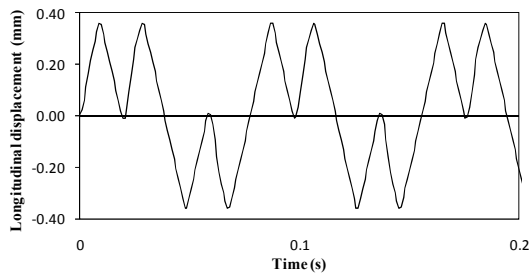


ب- نتایج تحقیق حاضر

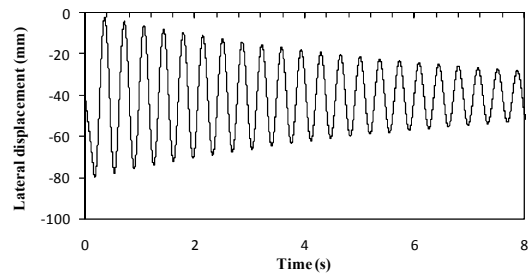


الف- نتایج (2003) Tijsseling

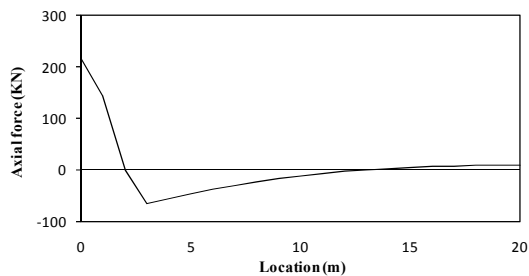
شکل ۵ تغییر فشار در پشت شیر با در نظر گرفتن اثر تداخلی پواسن



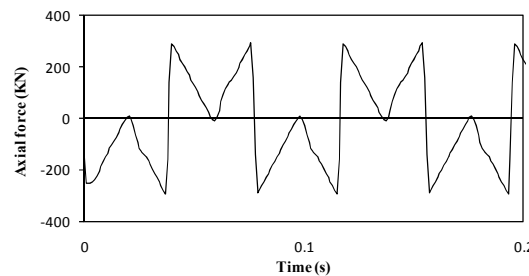
شکل ۷ تغییر مکان طولی در نقطه میانی



شکل ۶ تغییر مکان جانبی نقطه میانی



شکل ۹ دیاگرام نیروی محوری در طول لوله در زمان $t=0.1s$



شکل ۸ تغییرات نیروی محوری در محل شیر

همان‌گونه که دیده می‌شود در روند تغییر سیکل‌های مختلف شباهت‌های معناداری وجود دارد و در هر دو مدل، اثر تداخلی سیال-سازه ناشی از کوپله پواسن باعث تشدید بیشینه فشارها شده و هر دو نمودار روند افزایشی مشخصی را طی می‌کنند. در بررسی فشار بیشینه در سه سیکل در نمودارهای شکل ۵، بین دو نمودار اختلاف زیادی مشاهده نمی‌شود. (سیکل اول ۰/۵٪، سیکل دوم ۰/۴٪، سیکل سوم ۰/۳٪). این دلیل دیگری بر نزدیکی نتایج دو تحقیق است. البته بین شکل ارتعاشی نمودارها اختلاف‌هایی دیده می‌شود که احتمالاً ناشی از تفاوت در روش‌های به‌کار رفته است. در تحقیق Tijsseling (2003) معادلات هیدرولیکی و سازه‌ای هر دو با روش مشخصه حل شده‌اند، لذا این اختلاف شکل ارتعاش دور از انتظار نیست.

ناشی از وزن لوله و سیال درون آن است و با ایجاد جریان غیرماندگار، نوسان در لوله آغاز می‌شود. در این شکل همان‌گونه که دیده می‌شود، نوسان لوله پس از گذشت زمان به سمت مقدار خیز استاتیکی اولیه همگرا می‌شود. خیز استاتیکی این لوله را در حالت دوسر مفصل می‌توان از رابطه خیز تیر ساده با بار گسترده به شرح زیر محاسبه کرد:

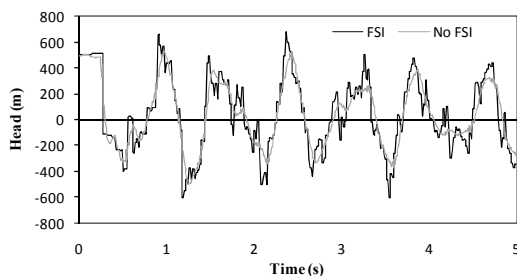
$$\Delta_{Static} = \frac{5WL^3}{384EI} = \frac{5 \times (658.39 \times 20) \times 20^3}{384 \times 2.1e10 \times 1.639e-3} = 0.0399m$$

در این مسأله پس از گذشت حدود ۵۰ ثانیه - که با توجه به ابعاد مسأله می‌توان آن را زمان بی‌نهایت دانست - جابجایی جانبی به ۰/۰۳۹۹m همگرا می‌شود که با مقدار استاتیکی بالا برابر است.

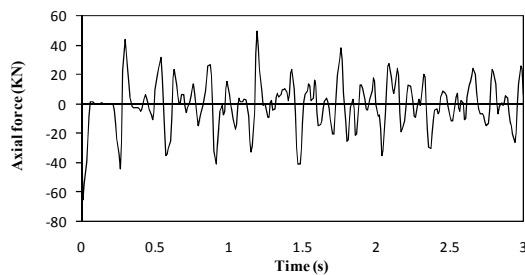
شکل ۷ تغییر جابجایی طولی را در نقطه میانی لوله نشان می‌دهد که بیشینه آن به ۰/۳۶ mm رسیده است. شکل ۸ تغییر نیروی محوری (واکنش تکیه‌گاهی) را در محل شیر نشان می‌دهد و بیشینه آن برابر ۲۹۵KKN (مقداری قابل توجه) است. تعیین واکنش تکیه‌گاهی لوله در تحلیل

شکل ۶ تغییر مکان جانبی نقطه میانی لوله را در هر لحظه نشان می‌دهد. با توجه به آزاد بودن بین دو تکیه‌گاه، لوله عملکردی مشابه تیر دوسر مفصل خواهد داشت که نوسان جانبی می‌کند. در زمان صفر، خیز لوله برابر خیز استاتیکی

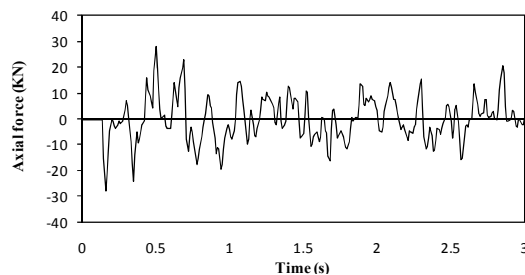
جنس تمامی لوله‌ها از فولاد نرم با ضخامت جداره 5mm بوده و در رقوم ارتفاعی یکسانی قرار دارند. در این شبکه، نخست لوله‌ها شماره‌گذاری شده و روابط پیوستگی در اتصالات تعریف شده است. محل اتصال تمامی لوله‌ها تکیه‌گاه مفصلی فرض شده تا اثر اتصال در تداخل سیال-سازه وارد نشود. همان‌گونه که در شکل ۱۰ مشخص شده، در انتهای یکی از شاخه‌ها شیر قرار دارد که با بسته شدن آن در مدت 0/01 ثانیه، جریان غیرماندگار در شبکه ایجاد می‌شود. نتایج تحلیل کوپله سیال-سازه این سیستم در شکل‌های ۱۱ تا ۱۵ آورده شده است. سیال جاری در شبکه، آب است.



شکل ۱۱ تغییرات هد در محل شیر



شکل ۱۲ تغییرات نیروی محوری لوله در محل شیر

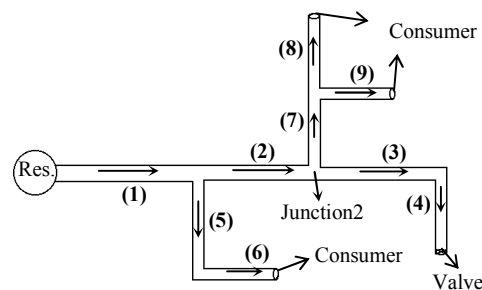


شکل ۱۳ تغییرات واکنش تکیه‌گاهی اتصال (۲) در جهت y

ضربه قوچ می‌تواند در طراحی تکیه‌گاه‌های مقاوم راهگشا باشد. شکل ۹ توزیع نیروی محوری لوله را در زمان منتخب $t=0/1s$ نشان می‌دهد.

۳-۴- مثال سوم

این مسأله یک شبکه شاخه‌ای شامل لوله‌هایی با ویژگیهای مختلف است که در انتهای هر شاخه، یک مصرف‌کننده قرار دارد. یک مخزن با هد ثابت ۳۰ متر در ابتدای شبکه باعث ایجاد جریان ماندگار می‌شود. همان‌گونه که دیده می‌شود، این مسأله پیچیدگی بیشتری نسبت به دو مثال قبل دارد و هدف از تحلیل آن نشان دادن قابلیت مدل و برنامه‌تهیه شده است. در شکل ۱۰ پلان شبکه و در جدول ۳ ویژگیهای لوله‌های آن ارائه شده است.



شکل ۱۰ پلان شبکه لوله مثال سوم

جدول ۳ ویژگیهای لوله‌های شبکه

شماره لوله	طول (m)	قطر (mm)	سرعت موج فشاری (m/s)	دبی عبوری در حالت ماندگار (m ³ /s)
۱	۱۰۰	۴۰۰	۱۰۰۰	۰/۶۵
۲	۷۰	۳۵۰	۱۰۰۰	۰/۴۵
۳	۸۰	۲۰۰	۱۰۰۰	۰/۱۵
۴	۶۰	۲۰۰	۱۰۰۰	۰/۱۵
۵	۷۰	۲۰۰	۱۰۰۰	۰/۲
۶	۶۰	۲۰۰	۱۰۰۰	۰/۲
۷	۵۰	۲۵۰	۱۰۰۰	۰/۳
۸	۶۰	۲۰۰	۱۰۰۰	۰/۱۵
۹	۶۰	۲۰۰	۱۰۰۰	۰/۱۵

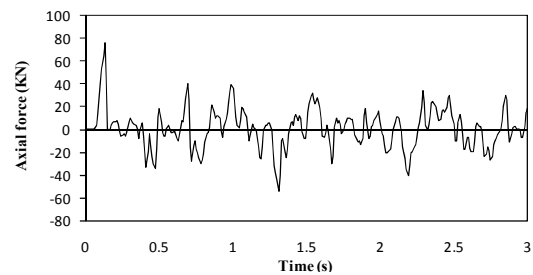
به پایان مسیر خود، بار دیگر در جهت معکوس به حرکت در می‌آیند. این نمودار تا زمان حدود ۰/۳ ثانیه، حالت منظمی دارد. این زمانی است که امواج برگشتی از لوله‌های مختلف، یکی پس از دیگری به محل شیر می‌رسند و هر یک باعث افزایش یا کاهش در مقدار فشار پشت شیر می‌شوند. بدین ترتیب نمودار حالتی آشفته یافته و شکلی که در مثال‌های ساده قبلی دیده شد، ایجاد نمی‌شود. نیروهای محوری و جابجایی‌های طولی سازه‌ای نیز تابعی از فشار سیستم هستند، بنابراین اغتشاش‌ها در نمودار تغییرات آن‌ها نیز دیده می‌شود.

نکته دیگر در شکل ۱۱ مقایسه نمودار فشار با در نظر گرفتن FSI و نمودار فشار بدون اثر FSI است. این مقایسه نیز -مانند مثال دوم- بیانگر اثر بحرانی FSI بر فشار سیال در پدیده ضربه قوچ است. شکل ۱۲ نمودار تغییرات نیروی محوری را در محل شیر نشان می‌دهد. بر طبق این تحلیل، نیروی محوری بیشینه در محل شیر -که همان بیشینه واکنش تکیه‌گاهی افقی این نقطه است- ۶۵KN است. در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ تغییرات واکنش‌های تکیه‌گاهی در محل اتصال (۲) نشان داده شده است. شکل ۱۵ تغییرات جابجایی طولی را در نقطه میانی لوله (۴) نشان می‌دهد که مقدار بیشینه آن به ۱/۷۷mm می‌رسد. شکل ۱۶ توزیع نیروی محوری لوله را در زمان منتخب $t=1s$ در لوله (۴) نشان می‌دهد.

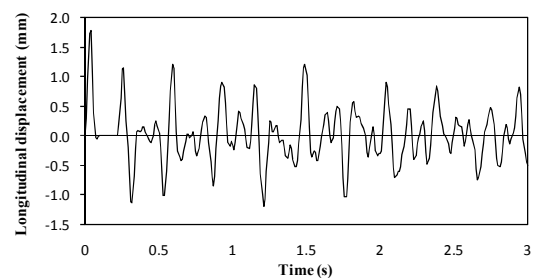
۵- نتیجه‌گیری

با توجه به معادلات حاکم، روش حل پیشنهادی و مثال‌های حل شده نتایج زیر به دست می‌آید:

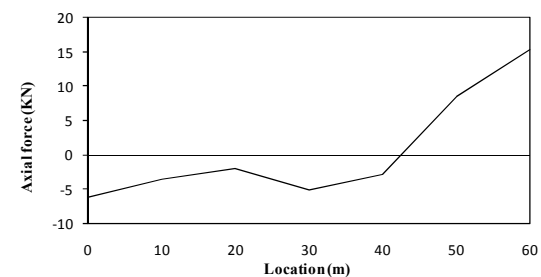
- استفاده از مدل‌های اصطکاک غیرماندگار در مسائلی که جریان غیرماندگار سریع رخ می‌دهد، مانند ضربه قوچ، می‌تواند به نتایج بسیار واقعی‌تری نسبت به مدل‌های اصطکاک کلاسیک در لوله‌ها منجر شود. این موضوع در مثال اول با مقایسه نتایج با اندازه‌گیری‌های آزمایشگاهی



شکل ۱۴ تغییرات واکنش تکیه‌گاهی اتصال (۲) در جهت X



شکل ۱۵ نمودار تغییرات جابجایی طولی در نقطه میانی لوله ۴



شکل ۱۶ دیاگرام نیروی محوری در طول لوله ۴ در زمان

$$t=1s$$

۴-۳-۱- بحث و بررسی نتایج مثال سوم

همان‌گونه که مشخص است در این مسأله، نمودارها نسبت به مسائل تک لوله اغتشاش بیشتری دارند که علت آن را می‌توان تداخل امواج انتشار یافته در لوله‌های مختلف دانست. شکل ۱۱ را که تغییرات فشار را در محل شیر نشان می‌دهد در نظر بگیرید. در آغاز فشار ناشی از بسته شدن شیر و تبدیل انرژی جنبشی به انرژی فشاری، افزایش می‌یابد. این افزایش فشار به صورت یک موج فشاری به طرف بالادست لوله حرکت می‌کند و در لوله‌های مختلف منتشر می‌شود. این امواج پس از رسیدن

اثبات شد.

تحلیل اثر تداخلی سیال-سازه، مزیت‌هایی مانند دقت بالا در حل معادلات هیدرولیکی به دلیل استفاده از روش MOC، سادگی تحلیل معادلات سازه‌ای از روش FDM، سرعت بالای حل دستگاه معادلات با استفاده از الگوریتم‌های TDMA و PDMA و قابلیت تحلیل سیستم‌های پیچیده داشته و نتایج حاصل از آن همان‌گونه که در حل مثال‌ها نیز گفته شد، صحت قابل قبول و کاربرد مناسبی دارند.

۶- فهرست علائم

A_p	مساحت لوله
C	سرعت موج فشاری سیال
D	قطر لوله
E	مدول الاستیسیته لوله
e	ضخامت لوله
F_x	نیروی محوری لوله
f	ضریب اصطکاک جریان
g	شتاب ثقل
H	ارتفاع پیزومتریک سیال
I	ممان اینرسی لوله
M	مجموع جرم لوله و سیال در واحد طول
m_f	جرم سیال در واحد طول لوله
P	فشار سیال
S_f	شیب خط انرژی
t	زمان
V	سرعت سیال
u	جابجایی جانبی لوله (عمود بر پلان)
U	سرعت طولی لوله
x	فاصله در جهت طول لوله
α	زاویه لوله با افق
Δx	طول بازه مکانی
μ	ضریب پواسن
Δt	طول بازه زمانی
ξ	جابجایی طولی لوله
σ_x	تنش محوری لوله

- نتایج تحلیل عددی و مدل ریاضی این تحقیق نشان می‌دهد که پدیده FSI (تداخل سیال-سازه) ناشی از اثر پواسن می‌تواند اثر قابل توجهی بر فشار سیال در جریان غیرماندگار ناشی از ضربه قوچ در لوله‌ها داشته باشد. این اثر بحرانی، همان‌گونه که در مثال ۲ نشان داده شد، با نتایج تحقیق Tijsseling (2003) انطباق مناسبی داشته و مؤید تحلیل‌های محققان دیگر در این زمینه نیز (که در مقدمه گفته شد) است. البته اثر FSI در عمل به دلیل وجود اصطکاک جریان و استهلاک ذاتی خطوط لوله، شاید چندان بحرانی نشود، اما در سیستم‌های حساس مانند نیروگاه‌ها یا رآکتورهای هسته‌ای باید به دقت مطالعه و تحلیل شود.

- به دست آوردن تغییر مکان‌های طولی، نیروهای محوری و واکنش‌های تکیه‌گاهی در تمامی نقاط و تمامی زمان‌ها در پدیده ضربه قوچ در شبکه‌های انتقال سیال، دیگر دستاورد تحقیق حاضر به‌شمار می‌رود و مقادیر پیشینه حاصل از آنها را می‌توان برای طراحی ایمن و اقتصادی خطوط انتقال به‌کار برد.

- از نتایج دیگر این تحقیق به دست آوردن بیشینه خیز لوله در اثر پدیده ضربه قوچ است که می‌تواند به‌عنوان معیاری مناسب برای قرار دادن تکیه‌گاه‌های لازم در طول لوله به‌کار رود.

- همان‌گونه که در نتایج مثال سوم دیده شد، در مدل‌های پیچیده‌ای، مانند شبکه‌ها، به دلیل تداخل امواج مثبت و منفی فشاری سیال از لوله‌های مختلف، نمودارهای تغییرات فشار و به تبع آن جابجایی‌ها و نیروهای محوری، شکل منظم مدل‌های تک لوله را ندارند، اما در این سیستم‌ها نیز اثر بحرانی FSI بر فشار به‌وضوح دیده می‌شود.

- در مجموع می‌توان گفت مدل به‌کار رفته در این تحقیق شامل ترکیب روش مشخصه و تفاضل محدود در

Lavooij C.S. and Tijsseling A.S. (1990). "Fluid structure interaction in compliant piping systems", Proc. of 6th Int. Conf. on Pressure Surges, BHRA, pp. 85-100.

Lee U. and Kim J. (1999). "Dynamics of branched pipeline systems conveying internal unsteady flow", J. Vibration and Acoustics, Transactions of the ASME, 121(1), pp. 114-122.

Rachid F.B.De.F and Mattos H.S.C. (2002). "Modelling of the fluid-structure interaction in inelastic piping systems", J. Brazilian Society of Mechanical Sciences, 24(1), pp. 62-69.

Skalak R. (1956). "An extension of the theory of water hammer", Trans. ASME, 78(1), pp. 105-116.

Sreejith B., Jayaraj K. and Ganesan N. (2004). "Finite element analysis of fluid-structure interaction in pipeline systems", Nuclear Engineering and Design, 227(3), pp. 313-322.

Tijsseling A.S. (2007). "Water hammer with fluid-structure interaction in thick-walled pipes", Computers & Structures, 85(11-14), pp. 844-851.

Tijsseling A.S. (2003). "Exact solution of linear hyperbolic four-equation system in axial liquid-pipe vibration", J. Fluids and Structures 18(2), pp. 179-196.

Wiggert D.C., Hatfield F.J and Stuckenbrock, S. (1987). "Analysis of liquid and structural transients in piping by method of characteristics", J. Fluid Engineering, ASME, 109(2), pp. 161-165.

Wylie E. B. and Streeter V. L. (1978). Fluid Transients, McGraw-Hill, New York, USA.

Zhang L., Tijsseling A.S. and Vardy A.E. (1999). "FSI analysis of liquid-filled pipes", J. Sound and Vibration, 224(1), pp. 69-99.

Zhong M.W. and Soon K.T. (1997). "Coupled analysis of fluid transients and structural dynamic responses of a pipeline system", J. Hydraulic Research, Vol. 35, pp. 119-131.

ρ	جرم حجمی سیال
ε_x	کرنش محوری لوله
ρ_p	جرم حجمی لوله
n اندیس	پارامتر در زمان حال
n+1 اندیس	پارامتر در زمان آینده

۷- منابع

Belytchko T., Karabin M. and Lin J. I. (1986). "Fluid-structural interaction in water hammer response of flexible piping", ASME, Vol. 108, pp. 249-255.

Bergant A. and Simpson A.R. (1994). "Estimating unsteady friction in transient cavitating pipe flow", Proc., 2nd Int. Conf. on Water Piping Systems, BHR Group, Edinburgh, Scotland, pp. 333-342.

Bergant A., Simpson and Angus R. (1999). "Pipeline column separation flow regimes", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 125, pp. 835-848.

Bergant A. and Tijsseling A.S. (2001). "Parameters affecting water hammer wave attenuation, shape and timing", Proc. of the 9th Int. Meeting of the IAHR Work Group on the Behaviour of Hydraulic Machinery under Steady Oscillatory Conditions, Trondheim, Norway.

Bergant A., Simpson A.R. and Tijsseling A.S. (2006). "Water hammer with column separation: A historical review", Journal of Fluids and Structures, 22, pp. 135-171.

Brunone B., Golia U.M. and Greco M. (1991). "Some remarks on the momentum equation for fast transients", Int. Meeting on Hydraulic Transients with Column Separation, 9th Round Table, IAHR, Valencia, Spain, pp. 140-148.

Davidson L. C. and Smith J. E. (1969). "Liquid-structure coupling in curved pipes", The Shock and Vibration Bulletin, 40(4), pp. 197-207.