

# کاربرد روش‌های حداقل مربعات در تحلیل هیدرولیکی شبکه‌های آبرسانی

ناصر موسویان<sup>۱</sup>، محمدرضا جعفرزاده<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی دکتری عمران-آب، گروه عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

۲- استاد، گروه عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

\* مشهد، میدان آزادی، دانشگاه فردوسی مشهد

jafarzad@um.ac.ir

**چکیده-** در این مقاله برای اولین بار از دو روش حداقل مربعات گوس- نیوتن و لونبرگ مارکوارت برای حل معادلات دبی  $Q$  در شبکه‌های آبرسانی استفاده می‌شود و نتایج با روش‌های نیوتن-رافسون و گرادیان سراسری ارائه شده توسط تودینی که امروزه در نرم افزارهای تجاری رایج مانند Epanet و WaterGems استفاده می‌شود، مقایسه می‌شود. برای رسیدن به همگرایی مطلوب، روش‌های نیوتنی و حداقل مربعات وابستگی شدیدی به حدس اولیه مناسب دارند. در غیر این صورت قادر به رقابت با روش گرادیان سراسری نیستند. برای رفع این مشکل به وسیله خطی‌سازی تابع افت هد، الگوریتمی برای انتخاب یک حدس اولیه مناسب پیشنهاد شده است. در این روش معادلات غیرخطی انرژی، خطی‌سازی می‌شود و دستگاه معادلات کل حل می‌شود، سپس از جواب حاصل بعنوان تخمینی برای حدس اولیه در حل دستگاه معادلات خطی - غیرخطی استفاده می‌شود. با استفاده از این الگوریتم سرعت و دقت همگرایی روش حداقل مربعات گوس- نیوتن از روش گرادیان سراسری بیشتر می‌شود.

**کلیدواژگان:** شبکه آبرسانی، تحلیل هیدرولیکی، روش‌های حداقل مربعات.

## ۱- مقدمه

مقدار حدس اولیه دبی در لوله‌ها بستگی پیدا می‌کند (Bhave and Gupta, 2006). بعدها هاردی کراس روش دیگری بر مبنای معادلات انرژی در گره‌ها ارائه کرد، اما این روش نیز به حدس اولیه بسیار حساس بود (Bhave and Gupta, 2006). مارتین و پیترز (Martin and Peters, 1963) اولین کسانی بودند که در تحلیل شبکه‌های آبرسانی از روش نیوتن-رافسون استفاده کردند. در روش آنها کلیه معادلات بر حسب هدهای گرهی،  $H$ ، نوشته می‌شوند. آنگاه با اصلاح هد در تکرارهای متوالی جواب مسأله به دست می‌آید. یکی از معایب روش مارتین

تحلیل هیدرولیکی شبکه‌های بزرگ آبرسانی از مسائل مهمی است که از چندین دهه قبل تاکنون محققان زیادی را به خود مشغول کرده است. در این سیستم‌ها معادلات بر اساس مجهولات به سه دسته معادلات دبی،  $Q$ ، معادلات هد،  $H$  و ترکیب این دو،  $Q-H$  تقسیم‌بندی می‌شوند. نخستین بار هاردی کراس روشی را بر مبنای معادلات دبی  $Q$  در لوله‌ها ارائه کرد، (Cross, 1936). اما با بزرگ شدن شبکه، همگرایی مدل بسیار کند بود و در برخی موارد واگرا می‌شد. به علاوه سرعت همگرایی به

و پیترز عدم همگرایی مطلوب آن در شبکه‌های بزرگ است. برای رفع این مشکل باید برخی از لوله‌های شبکه موقتا در روند تحلیل حذف شوند. از دیگر معایب، نوسانات زیاد تا رسیدن به همگرایی مطلوب است. برای کاهش نوسانات مقدار  $\Delta H$  اصلاحی به نصف تقلیل می‌یابد، البته این کار سبب افزایش تعداد تکرارها می‌شود. لیو (Liu, 1969) نسخه ساده تری از روش نیوتن-رافسون را ارائه کرد. در این روش ماتریس ژاکوبین به دو ماتریس مسلط قطری و غیر قطری تجزیه می‌شود. نظر به اهمیت ماتریس مسلط قطری، ماتریس غیرقطری برای ساده سازی حذف می‌شود. در نتیجه حل دستگاه معادلات خطی بسیار آسان می‌شود. در صورت انتخاب حدس اولیه نامناسب این روش واگرا می‌شود. خصوصیات نامطلوب روش نیوتن-رافسون بر روی معادلات  $H$  توسط محققان مختلفی مانند (Lamm and Wolla, 1972)، (Lemieux, 1972) و (Donachie, 1974) بررسی شد و ضریب تخفیف برای بهبود همگرایی پیشنهاد شد، اما این پیشنهاد مشخصات همگرایی را به میزان کمی بهبود داد.

روش تئوری خطی برای اولین بار توسط وود و چارلز (Wood and Charles, 1972) بر حسب معادلات  $Q$  ارائه شد. در این روش نیازی به ارضای معادلات پیوستگی در انتخاب حدس اولیه نیست و مشکلات کندی همگرایی نیز که در روش نیوتن-رافسون بر حسب معادلات  $H$  وجود داشت تا حدودی رفع شده است. در این روش معادلات غیرخطی افت انرژی، خطی می‌شوند و در هر تکرار دستگاه معادلات خطی شده  $Q$  حل می‌شود. با به‌روز رسانی دبی جریان در هر تکرار و اصلاح ضرایب خطی‌سازی، محاسبات به جواب نهایی همگرا می‌شود. عیب این روش نوساناتی است که پیرامون جواب نهایی به‌وجود می‌آید. برای غلبه بر این مشکل، دبی جریان برابر میانگین دبی تکرار قبل و ماقبل فرض می‌شود. هر چند این راه‌کار نمی‌تواند نوسانات خطا را به‌طور کلی

حذف کند، اما روند همگرایی با سرعت بیشتری انجام می‌شود. وود و فانک (Wood and Funk, 1993) با استفاده از بسط سری تیلور روش جدیدی برای حل معادلات  $Q$  ارائه کردند. این روش عینا مشابه با روش نیوتن-رافسون بر حسب معادلات  $Q$  است. با توجه به موفقیت اولیه روش تئوری خطی، ایزاک و میلز (Isaak and Mills, 1980) نسخه دیگری از این روش را بر اساس هدهای گرهی  $H$  ارائه کردند. برتری این روش نسبت به روش وود، سادگی مدل‌سازی و تقارن ماتریس ضرایب است، در نتیجه اطلاعات در فضای کمتری ذخیره می‌شود. در این روش هدهای گرهی بدون تأمین معادلات پیوستگی حدس زده می‌شوند. انتخاب حدس اولیه مناسب سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد. روش ایزاک در دبی‌های نزدیک به صفر ناپایدار می‌شود. برای رفع این مشکل ایزاک و میلز لوله‌های با دبی نزدیک به صفر را حذف کردند. کولینز و جانسون (Collins and Johnson, 1975) روش المان محدود را برای تحلیل شبکه‌های آب‌رسانی ارائه کردند که روشی خطی بر حسب معادلات  $H$  می‌باشد. در این روش با انتخاب حدس اولیه برای دبی، ماتریس ضرایب تخمین زده می‌شود و با حل دستگاه معادلات خطی حاصل، مقادیر  $H$  در هر گره به‌دست می‌آید. در مرحله بعد دبی لوله‌ها با توجه به هدهای گرهی محاسبه شده و ماتریس ضرایب بوسیله ترکیبی از دبی محاسبه شده در این مرحله و دبی موجود در تکرار قبلی به‌روز رسانی می‌شود. این عملیات تا رسیدن به همگرایی مطلوب ادامه می‌یابد.

تودینی و پیلاتی (Todini and Pilati, 1987) روش گرادیان سراسری (GGA) را برای تحلیل هیدرولیکی شبکه لوله‌ها بکار بردند. قبلاً پاول (Powell, 1978) این الگوریتم را با استفاده از ضرایب لاگرانژ برای مسائل بهینه‌سازی با قیود تساوی بکار برده بود. این روش برای معادلات ترکیبی  $Q-H$  فرمول بندی می‌شود و به‌طور

شبکه می‌باشد و می‌توان آن را برای کلیه شبکه‌های آبرسانی با هر شکل و اندازه بکار برد. در این روش معادلات غیرخطی انرژی خطی‌سازی می‌شود و دستگاه معادلات کل حل می‌شود، جواب حاصل تخمینی است برای حدس اولیه که در حل دستگاه معادلات خطی- غیرخطی از آن استفاده می‌شود. محاسبات به‌وسیله کامپیوتر Pentium 4، با CPU=3.2 GHz و Ram=2 Gb انجام شده است.

## ۲- معادلات شبکه‌های توزیع آب

شبکه‌های توزیع آب شامل لوله‌ها، مخازن، پمپ‌ها و شیرها می‌باشند. در یک شبکه توزیع آب مجهولات عبارت از دبی و افت هد در لوله‌ها و مقادیر فشار در گره‌ها می‌باشند. در صورتی که فرض شود شبکه مورد نظر دارای  $M$  لوله و  $N$  گره باشد، تعداد  $M+N-1$  مجهول وجود دارد، بنابراین، همین تعداد معادله مورد نیاز است. معادلات موجود در شبکه‌های توزیع آب شامل معادلات پیوستگی و انرژی می‌باشند. بر اساس معادله پیوستگی جمع جبری جریان‌های ورودی و خروجی به یک گره  $j$  صفر می‌شود (Bhave and Gupta, 2006).

$$\sum_i Q_i = q_j \quad (1)$$

که در آن  $q_j$  میزان برداشت از گره و  $Q_i$  دبی لوله‌های متصل به گره است. بر اساس معادله افت رابطه میان فشارهای گرهی و افت هد لوله مطابق رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$h_i = H_1 - H_2 \quad (2)$$

که در آن  $H_1$  و  $H_2$  هد گرهی در ابتدا و انتهای لوله می‌باشند. افت فشار آب در لوله نام،  $h_i$  بوسیله رابطه (۳) تعیین می‌شود (Bhave and Gupta, 2006):

$$h_i = R_i Q_i^m \quad (3)$$

در این معادله  $R_i$  ضریب مقاومت لوله نام،  $Q_i$  دبی لوله و  $m$  بسته به معادله مقاومت جریان یک عدد ثابت است.

مستقیم مقادیر اصلاح شده مجهولات را در هر تکرار محاسبه می‌کند. در این روش معادلات افت انرژی در حلقه‌ها به صورت تابع هدف و معادلات پیوستگی به صورت قید، در یک مسأله بهینه‌سازی تعریف می‌شود. سپس با استفاده از ضرایب لاگرانژ مسأله بهینه‌سازی، بدون قید شده و معادلات حاصل با بکار بردن روش نیوتن-رافسون حل می‌شود (Luenberger, Yinyu, 2008). این روش سرعت همگرایی را به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌دهد، به‌علاوه تا حدودی نیز از حدس اولیه مستقل است. اگر نقطه آغازین به اندازه کافی به جواب نهایی نزدیک باشد، این روش با مرتبه حداقل دو همگرا می‌شود (Bertsekas, 1996). در حال حاضر از این الگوریتم در تحلیل شبکه‌های آبرسانی به‌خصوص در نرم‌افزارهای تجارتي Epanet و WaterGems استفاده می‌شود.

باشا و کساب (Basha and Kassab, 1996) روشی مینی بر تئوری اختلال ارائه کردند که در هر شبکه با سه تکرار مقادیر نزدیک به جواب نهایی را ارائه می‌داد، اما دقت کافی نداشت. ژاکوب و گوپتا نیز روش سکانت (خطی‌سازی دو نقطه‌ای) را به جای روش نیوتن-رافسون در الگوریتم تودینی بکار بردند که با تقریب مناسبی به تحلیل شبکه می‌پرداخت (Jakobus and Gupta, 2008). در تحقیق حاضر برای اولین بار روش‌های حداقل مربعات گوس-نیوتن و لونبرگ-مارکوارت در تحلیل شبکه‌های آبرسانی بکار می‌رود و با روش GGA مقایسه می‌شود. در این جا از معادلات  $Q$  به دلیل همگرایی مناسب‌تر نسبت به معادلات  $H$  استفاده می‌شود و دستگاه معادلات کل به یک تابع هدف تبدیل شده به‌وسیله الگوریتم‌های مذکور کمینه می‌شود. الگوریتم گوس-نیوتن و لونبرگ-مارکوارت به حدس اولیه حساس هستند. برای غلبه بر این ضعف، روش جدیدی برای تخمین حدس اولیه مناسب، کاهش تعداد تکرار و افزایش سرعت همگرایی با دقت بسیار زیاد ارائه می‌شود که مستقل از روش تحلیل

برای هر حلقه  $k$  نیز یک دستگاه معادلات انرژی نوشته می‌شود. این دستگاه معادلات غیرخطی است (Bhave and Gupta, 2006).

$$\sum_k R_i Q_i^m = 0, \quad k = 1, 2, \dots, NL \quad (6)$$

$NL$  تعداد حلقه‌ای موجود در شبکه می‌باشد. با حل هم‌زمان دستگاه معادلات خطی پیوستگی و دستگاه معادلات غیرخطی انرژی (معادلات ۵ و ۶) دبی در لوله‌ها محاسبه می‌شود.

#### ۴- روش حل معادلات $Q$

دستگاه معادلات غیرخطی را می‌توان به‌طور مستقیم به‌وسیله روش نیوتن-رافسون یا روش تندترین کاهش حل کرد. به‌طور کلی این روش‌ها به حدس اولیه حساس هستند و در صورت انتخاب حدس اولیه نامناسب، به‌خصوص در شبکه‌های بزرگ، به‌کندی همگرا می‌شوند و حتی در بعضی حالات ممکن است واگرا شوند.

#### ۴-۱- روش نیوتن-رافسون

روش نیوتن-رافسون ( $NR$ ) یکی از مهمترین روش‌های حل معادلات غیرخطی می‌باشد در این روش تابع اسکالر غیرخطی  $f(x+s)=0$  حول نقطه  $x$  با نمو  $s$  بسط داده می‌شود.

$$f(x+s) = f(x) + s f'(x) + \frac{s^2}{2} f''(x) + \frac{s^3}{6} f'''(x) + \dots \quad (7)$$

اگر  $x+s$  جواب معادله باشد،  $f(x+s)=0$  است. با حذف جملات بالاتر سری (۷)، رابطه (۸) به‌دست می‌آید (Luenberger, Yinyu, 2008).

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)} \quad (8)$$

که در آنجا  $x^k$  تخمین مقدار  $x$  در مرتبه تکرار  $k$ ام می‌باشد. روش نیوتن-رافسون را می‌توان به سادگی به سیستم معادلات غیرخطی تعمیم داد.

برای مثال در صورت استفاده از معادله هیزن ویلیامز مقادیر  $R$  و  $m$  در سیستم آحاد SI مطابق رابطه زیر تعریف می‌شوند:

$$R = \frac{10.67L}{C 1.852 D^{4.87}}, \quad m = 1.852 \quad (4-الف)$$

که  $C$  ضریب هیزن ویلیامز (وابسته به جنس لوله)،  $D$  قطر لوله و  $L$  طول آن به متر است (Bhave and Gupta, 2006). در صورتی که از معادله داری-ویسباخ استفاده شود.

$$R = \frac{8fL}{g \pi^2 D^5}, \quad m = 2 \quad (4-ب)$$

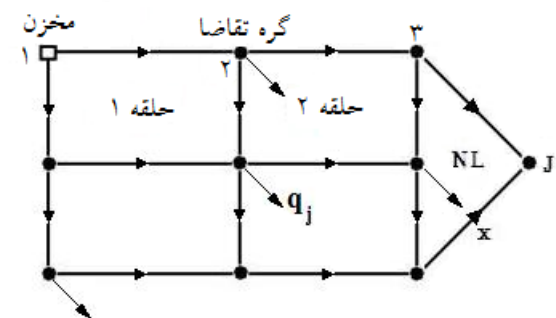
$f$  ضریب مقاومت لوله و  $g$  شتاب جاذبه به متر بر مجذور ثانیه است.

#### ۳- معادلات $Q$ در شبکه‌های حلقوی

در شکل ۱ یک شبکه تک مخزنه حلقوی نشان داده شده است. گره مخزن با شماره ۱ و گره‌های تقاضا با شماره‌های  $j$  ( $j = 2, 3, \dots, J$ ) نشان داده شده‌اند. پارامترهای مجهول مسأله دبی لوله‌ها هستند. در هر گره یک معادله خطی پیوستگی مطابق معادله (۱) نوشته می‌شود که دستگاه معادلات خطی برای کل گره‌ها در یک شبکه را تشکیل می‌دهد (Bhave and Gupta, 2006).

$$\sum_{i \text{ connected to } j} Q_i + q_j = 0, \quad j = 2, \dots, J \quad (5)$$

میزان برداشت از گره  $j$ ،  $Q_j$  دبی لوله‌های متصل به گره  $j$  و  $J$  تعداد گره‌های شبکه می‌باشد.



شکل ۱ شبکه حلقه‌ای تک مخزنه (Bhave and Gupta, 2006)

### ۴-۳- روش‌های حداقل مربعات

برای غلبه بر مشکل واگرایی روش‌هایی نیوتن-رافسون و تندترین کاهش می‌توان دستگاه معادلات را به یک مسأله حداقل مربعات تبدیل کرد. در این حالت با توجه به مثبت معین بودن<sup>۱</sup> ماتریس هسیان تحذب مسأله تأمین می‌شود. همچنین نظر بر آن که در مسائل محدب مقدار کمینه محلی معادل کمینه سراسری است، حدس اولیه مناسب به همگرایی می‌انجامد (Nocedal and Wright, 2006). روش‌های گوس-نیوتن و لوبرگ مارکوارت از متداول ترین الگوریتم‌های حل مسائل حداقل مربعات هستند.

### ۴-۳-۱- روش‌های نیوتن و گوس-نیوتن

تابع برداری  $\mathbf{F} = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$  با  $n$  متغیر  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  مفروض است، ( $m \geq n$ ). برای کمینه کردن تابع مجموع مربعات، فرایند تکراری جستجو از یک حدس اولیه  $\mathbf{x}^k$  با نمو کوچک  $\Delta$  شروع می‌شود (Nocedal and Wright, 2006):

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m f_i^2(\mathbf{x}) \quad (14)$$

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \quad (15)$$

در نتیجه رابطه (۱۶) به دست می‌آید.

$$S(\mathbf{x}^k + \Delta) = S(\mathbf{x}^k) + \left[ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}_i} \right]^T \Delta + \frac{1}{2} \Delta^T \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \right] \Delta \quad (16)$$

که در آن رابطه (۱۷) برقرار است.

$$\left[ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}_i} \right] = \mathbf{J}^T \mathbf{F} \quad (17)$$

ماتریس هسیان به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود (Nocedal and Wright, 2006):

$$\mathbf{H} = \left[ \frac{\partial^2 S}{\partial \mathbf{x}_i \partial \mathbf{x}_j} \right] = 2 \sum \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{x}_i} \left( \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{x}_i} \right)^T + f_j \frac{\partial^2 f_j}{\partial \mathbf{x}_i^2} \quad (18)$$

در صورتی که در روند محاسبات مستقیماً از رابطه (۱۸) استفاده شود، اصطلاحاً روش نیوتن باهمگرایی از مرتبه ۲ به دست می‌آید. بدین معنی که بردار خطا در مرحله  $k+1$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

در این صورت سری تیلور تابع برداری  $\mathbf{F}(\mathbf{x}+\mathbf{s})$  حول نقطه  $\mathbf{x}$  به شکل زیر بسط داده می‌شود.

$$\mathbf{F}(\mathbf{x} + \mathbf{s}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}) + \mathbf{J}(\mathbf{x})\mathbf{F}'(\mathbf{x}) + \dots \quad (10)$$

در این معادله  $\mathbf{J}$  ماتریس ژاکوبین تعریف می‌شود.

$$\mathbf{J} = \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{x}_j}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq n \quad (11)$$

$n$  تعداد معادلات موجود است. با فرض  $\mathbf{F}(\mathbf{x}+\mathbf{s})=0$ ، بردار  $\mathbf{x}$  در تکرار بعدی به دست می‌آید:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{J}]^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) \quad (12)$$

از این الگوریتم برای حل همزمان معادلات خطی و غیرخطی (۵) و (۶) استفاده می‌شود روش نیوتن-رافسون در شبکه‌های کوچک با انتخاب حدس اولیه مناسب به سرعت همگرا می‌شود. دستگاه معادله خطی (۱۲) بوسیله روش بالا و پائین مثلثی LU حل می‌شود (Luenberger, Yinyu, 2008).

### ۴-۲- روش تندترین کاهش

فرض می‌شود تابع اسکالر  $f$  دارای مشتقات جزئی پیوسته مرتبه اول در فضای اقلیدسی  $E^n$  باشد. طبق قرارداد گرادیان  $f$  یعنی  $\nabla f$  به عنوان یک بردار ستونی  $n$  بعدی تعریف می‌شود. در این صورت:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha^k \nabla f^k \quad (13)$$

ضریب  $\alpha^k$  یک پارامتر اسکالر غیر منفی است که  $f(\mathbf{x}^k - \alpha^k \nabla f^k)$  را کمینه می‌کند. به عبارت دیگر از نقطه  $\mathbf{x}^k$  در امتداد بردار  $(-\nabla f^k)$  حرکت شود تا نقطه کمینه به دست آید. در هر مرحله، جستجو در راستای عمود بر مرحله قبلی ادامه پیدا می‌کند تا نهایتاً به جواب نهایی همگرا شود (Luenberger, Yinyu, 2008).

### ۴-۳-۲- روش لونیبرگ- مارکوارت

روش لونیبرگ- مارکوارت (LM) به صورت گسترده‌ای در مسائل بهینه‌سازی بکار می‌رود (Luenberger, Yinyu, 2008). این روش ترکیبی از دو روش تندترین کاهش و نیوتن است. روش لونیبرگ - مارکوارت از روش گوس - نیوتن پایدارتر است، به این معنی که در بسیاری مواقع، حتی اگر عملیات بسیار دورتر از نقطه کمینه نهایی شروع شده باشد، حل به جواب بهینه همگرا می‌شود، اما سرعت همگرایی آن کمتر است. این الگوریتم مانند الگوریتم گوس - نیوتن تابع مجموع مربعات را حداقل می‌کند. الگوریتم لونیبرگ مارکوارت مشابه روش نیوتن به تخمین ماتریس هسیان می‌پردازد و جواب را به صورت رابطه (۲۳) به روز رسانی می‌کند (Luenberger, Yinyu, 2008):

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - [\mathbf{J}^T \mathbf{J} + \mu \mathbf{I}]^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{e}^k \quad (23)$$

هنگامی که مقدار اسکالر  $\mu$  صفر باشد، الگوریتم فوق به روش نیوتن تبدیل می‌شود و هنگامی که  $\mu$  به یک نزدیک باشد، این الگوریتم به سمت روش تندترین کاهش میل می‌کند که اندازه گام آن کوچک است. روش نیوتن در نزدیکی جواب بسیار سریع‌تر و دقیق‌تر از سایر روش‌ها عمل می‌کند، بنابراین پس از هر گام موفق، مقدار  $\mu$  کاهش داده می‌شود تا سرعت همگرایی روش LM زیاد شود (Luenberger, Yinyu, 2008).

### ۵- عوامل مؤثر در بهبود همگرایی

#### معادلات شبکه‌ها

روش‌های حداقل مربعات ارائه شده در بخش پیشین را می‌توان برای حل دستگاه معادلات غیرخطی دبی یا فشار گرهی بکار برد. این دستگاه معادلات غیرخطی شامل معادلات خطی پیوستگی جریان در هر گره و معادلات غیر خطی افت هد در هر لوله یا حلقه بسته می‌باشد. دو عامل شکل تابع و حدس اولیه مناسب در فرایند همگرایی این معادلات مؤثر هستند. در این بخش اثرات این دو عامل بررسی می‌شود.

یعنی  $\mathbf{e}^{k+1}$  با توان دوم بردار خطا در مرحله  $k$  یعنی  $\mathbf{e}^k$  متناسب است.

$$\mathbf{e}^{k+1} = -\frac{\mathbf{f}''(\mathbf{x}^k)}{2\mathbf{f}'(\mathbf{x}^k)}(\mathbf{e}^k)^2 + O((\mathbf{e}^k)^3), \quad (19)$$

$$\mathbf{e}^k = \mathbf{x} - \mathbf{x}^k$$

اگر  $\mathbf{e}^k$  به اندازه کافی کوچک باشد، مسأله به سرعت به جواب نهایی همگرا می‌شود. ایراد اساسی روش نیوتن، زمان‌بر بودن محاسبه ماتریس هسیان است. به منظور رفع این مشکل از جمله دوم رابطه (۱۸) صرف‌نظر می‌شود (Nocedal and Wright, 2006).

$$\mathbf{H} \approx 2 \sum \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)^T = \mathbf{J}^T \mathbf{J} \quad (20)$$

بدیهی است که ماتریس هسیان با تخمین فوق یک ماتریس مثبت و معین است یعنی دترمینان آن بزرگتر از صفر است (Nocedal and Wright, 2006, p. 257). بنابراین تابع  $S$  محدب و کمینه محلی همان کمینه سراسری است (Nocedal and Wright, 2006). در نهایت رابطه (۱۶) به شکل رابطه (۲۱) خلاصه می‌شود.

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}^k + \Delta) \approx \mathbf{S}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{J}^T \mathbf{F} \Delta + \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \Delta \quad (21)$$

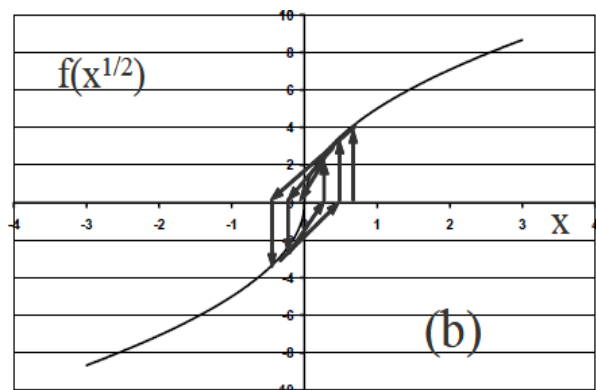
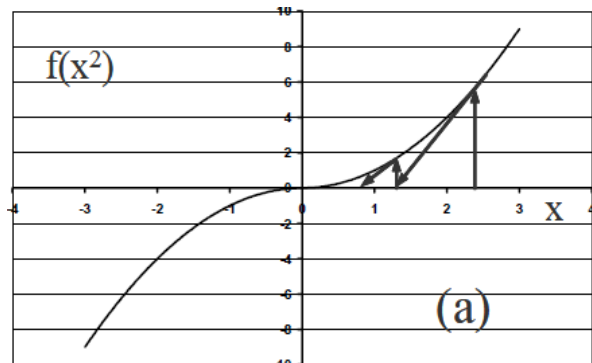
مشق رابطه (۱۹) بر حسب  $\Delta$  مساوی با صفر قرار داده شده، مقدار نمو، از حل سیستم معادلات نرمال به دست می‌آید.

$$(\mathbf{J}^T \mathbf{J}) \Delta = -\mathbf{J}^T \mathbf{F} \quad (22)$$

در اینجا  $\mathbf{J}$  ژاکوبین ماتریس  $\mathbf{F}$  نسبت به  $\mathbf{x}$  در تکرار  $k$  ام می‌باشد. دستگاه معادلات خطی (۲۲) با الگوریتم بالا و پائین مثلثی LU حل می‌شود. این روش به نام گوس- نیوتن (GN) مشهور است. مزیت روش گوس- نیوتن بر روش نیوتن در زمان همگرایی کوتاه‌تر آن است. همگرایی این روش در مسائلی که حدس اولیه نزدیک به جواب نهایی باشد، از مرتبه دو می‌شود. ایراد روش گوس- نیوتن سختی محاسبه مشتقات توابع در بسیاری از حالت‌ها است. به علاوه در صورت انتخاب حدس اولیه نامناسب همگرایی این روش کند می‌شود و یا این که واگرا می‌شود (Nocedal and Wright, 2006).

۵-۱- تأثیر شکل تابع

رفتار تابع در فرایند همگرایی تأثیر زیادی دارد. به عنوان مثال معادلات شبکه‌های آبرسانی را می‌توان بر حسب دبی لوله‌ها،  $Q$  مطابق آنچه در بخش سوم تشریح شد و یا هدهای گرهی  $H$  فرمول‌بندی کرد. اگر معادلات بر حسب دبی لوله‌ها نوشته شود، توان مجهولات  $Q$  که در معادلات غیرخطی ظاهر می‌شود برابر  $m$  است، اما در صورتی که معادلات بر حسب هدهای گرهی نوشته شود، توان مجهولات  $H$  به صورت  $1/m$  (با توجه به رابطه (۳)) ظاهر می‌شود. در شکل ۲ فرایند همگرایی توابع  $f(x^2)$  و  $f(x^{1/2})$  با استفاده از روش نیوتن-رافسون ترسیم شده است.



شکل ۲ مقایسه روش های نیوتنی برای توابع مختلف (Todini, 2006)

همان طور که ملاحظه می‌شود سرعت همگرایی منحنی  $f(x^2)$  به دلیل شکل خاص منحنی بسیار سریع‌تر از منحنی  $f(x^{1/2})$  است. این خاصیت در سرعت همگرایی معادلات  $Q$  نسبت به معادلات  $H$  به خاطر توان‌های  $m$  و  $1/m$  به طور مشابه برقرار است. به عبارت دیگر در صورتی که از

روش‌های نیوتنی برای حل معادلات شبکه‌ها استفاده شود، معادلات  $Q$  بر معادلات  $H$  ارجحیت دارند.

۵-۲- حدس اولیه

ایراد اساسی روش‌های نیوتنی وابستگی شدید آنها به حدس اولیه مناسب است. به عبارت دیگر در صورتی که حدس اولیه به اندازه کافی به جواب نهایی نزدیک باشد، سرعت همگرایی بسیار زیاد می‌شود و در صورتی که حدس اولیه دور از جواب واقعی باشد، امکان واگرایی وجود دارد. همان طور که در بخش سوم تشریح شد سیستم معادلات شبکه‌های آبرسانی از دو سری معادلات خطی پیوستگی (۵) و غیرخطی انرژی (۶) تشکیل شده است. در صورتی که معادلات غیرخطی انرژی به طور مناسبی خطی‌سازی شود و سیستم معادلات پیوستگی و انرژی خطی‌سازی شده با یک روش معمول (مثلاً LU) حل شود، جواب‌های حاصل، حدس اولیه قابل قبولی برای شروع تحلیل سیستم معادلات خطی و غیرخطی (۵) و (۶) خواهند بود. در نتیجه الگوریتم با درصد خطای نسبتاً ناچیزی در همین گام وارد محدوده جواب‌های ممکن در هر شبکه آبرسانی پیچیده می‌شود. تخمین حدس اولیه از این راه، به خصوص برای روش‌های نیوتنی بسیار مناسب است، زیرا برنامه را از جستجو در مناطق پرت و دور از جواب رها می‌کند. بر این اساس معادله افت یعنی معادله (۳) با فرض  $m=2$  به صورت رابطه (۲۴) بازنویسی می‌شود.

$$h_i = R_i \cdot Q_i^2 \quad (24)$$

شکل خطی‌سازی شده معادله افت به صورت رابطه (۲۵) نوشته می‌شود.

$$h_i = R_i \cdot Q_{\max} \cdot Q_i \quad (25)$$

در این معادله  $Q_{\max}$  حداکثر دبی است که احتمال دارد از لوله  $i$  بگذرد و آن برابر مجموع تقاضاهای گرهی در کل شبکه در نظر گرفته می‌شود، زیرا هیچ لوله‌ای نمی‌تواند بیشتر از این مقدار جریان را از خود عبور دهد.

جدول ۱ اطلاعات شبکه آبرسانی مربوط به مثال عددی

(Todini, 2006)

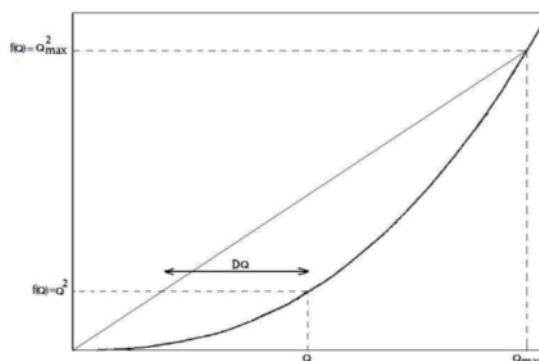
شماره لوله	$Q(l/s)$	$R(m^{-5}s)$
۱	۸۰۰	۱/۵۶۲۵
۲	۲۰۰	۵۰
۳	۱۰۰	۱۰۰
۴	۴۰۰	۱۲/۵
۵	۲۰۰	۷۵
۶	۱۰۰	۲۰۰
۷	۱۰۰	۱۰۰
شماره گره	$q(l/s)$	$H(m)$
۰	-۱۰۰۰	۱۰۰
۱	۱۰۰	۹۹
۲	۲۰۰	۹۸
۳	۳۰۰	۹۷
۴	۴۰۰	۹۶

برای تبدیل معادلات  $Q$  به یک مسأله حداقل مربعات، کلیه معادلات پیوستگی و انرژی مطابق معادله (۱۴) به توان دو رسیده، با یکدیگر جمع می‌شوند و تابع هدف مسأله را بوجود می‌آورند. تابع هدف برای شبکه مثال عددی ۱ به شکل رابطه (۲۶) محاسبه می‌شود.

$$S = \frac{1}{2} \left\{ (-R_1 Q_1^m + R_2 Q_2^m - R_3 Q_3^m)^2 + (R_3 Q_3^m - R_5 Q_5^m + R_6 Q_6^m)^2 + (-R_4 Q_4^m + R_5 Q_5^m - R_7 Q_7^m)^2 + (Q_1 - Q_3 - Q_4 - Q_5 - 0.1)^2 + (Q_2 + Q_3 - Q_6 - 0.2)^2 + (Q_6 + Q_5 + Q_7 - 0.4)^2 + (Q_4 - Q_7 - 0.3)^2 \right\} \quad (26)$$

در این رابطه سه جمله اول افت انرژی لوله‌ها هستند که به ترتیب برای حلقه‌های اول، دوم و سوم از شکل ۴ و چهار جمله بعدی جمع جبری دبی و تقاضای گرهی در معادلات پیوستگی هستند که برای گره‌های اول تا چهارم نوشته شده‌اند.

در شکل ۳ تابع افت سهمی شکل و تابع افت خطی‌سازی شده برای مقایسه ترسیم شده است. با حل سیستم معادلات خطی پیوستگی (۵) و خطی‌سازی شده انرژی (۲۵)، حدس اولیه مناسب برای شروع محاسبات سیستم معادلات خطی (۵) و غیرخطی (۶) به دست می‌آید. از مزایای خطی‌سازی تابع افت، انعطاف‌پذیری آن در مسائل مختلف است، بدین معنی که با استفاده از این روش در کلیه شبکه‌های آبرسانی با هر شکل هندسی، حدس اولیه نزدیک به جواب نهائی تخمین زده می‌شود و در نتیجه روند همگرایی تسریع می‌شود. از راهکار پیشنهادی می‌توان برای تمام روش‌های تحلیل شبکه به عنوان حدس اولیه استفاده کرد، اما همان‌طور که خواهیم دید این روش در همگرایی روش‌های نیوتنی تأثیر بیشتری دارد.



شکل ۳ خطی‌سازی تابع درجه ۲

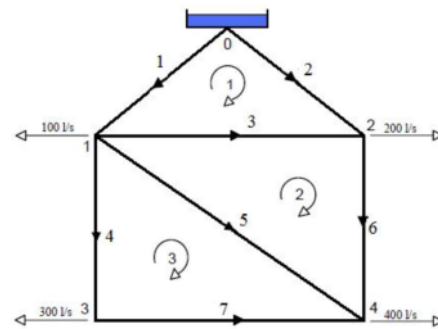
## ۶- مثال عددی

### ۶-۱- شبکه کوچک آبرسانی

شبکه شکل ۴ با ۵ گره و ۷ لوله توسط تودینی در سال ۲۰۰۶ طراحی شد. ضریب مقاومت  $R$  و تقاضای  $q$  در جدول ۱ نشان داده شده است. گره صفر را می‌توان به عنوان مخزن ذخیره‌ای در نظر گرفت که دارای هد ۱۰۰ متر بوده و دبی ۱۰۰۰ لیتر بر ثانیه را وارد شبکه می‌کند. پس از تحلیل هیدرولیکی شبکه دبی لوله‌ها  $Q_i$  و هد دیگر گره‌ها  $H_i$  محاسبه می‌شود. این اطلاعات نیز در جدول ۱ داده شده‌اند.



به جواب‌های نهایی انتخاب شده است، در نتیجه از تعداد تکرار در کلیه روش‌ها کاسته شده است. در این حالت روش گوس-نیوتن در ۴ تکرار، روش لونیبرگ-مارکوارت در ۷ تکرار، روش نیوتن-رافسون در ۵ تکرار و روش گرادیان سراسری نیز در ۷ تکرار همگرا می‌شوند. در حالت ۳ حدس اولیه به وسیله خطی‌سازی تابع افت هد تخمین زده شده است. در این حالت روش گوس-نیوتن و لونیبرگ-مارکوارت در ۳ تکرار و روش‌های نیوتن-رافسون و گرادیان سراسری در ۵ تکرار همگرا می‌شوند. زمان انجام محاسبات در این شبکه کوچک، بسیار ناچیز و کمتر از یک دهم ثانیه بود، بنابراین از آن برای مقایسه روش‌های مختلف استفاده نشد. به طور کلی نتیجه‌گیری می‌شود که حدس اولیه مناسب روند همگرایی را در کلیه روش‌ها تسریع می‌کند.

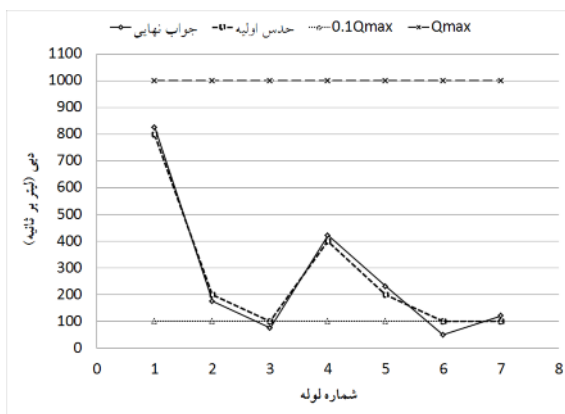


شکل ۴ شبکه حلقوی مورد مطالعه (Todini, 2006)

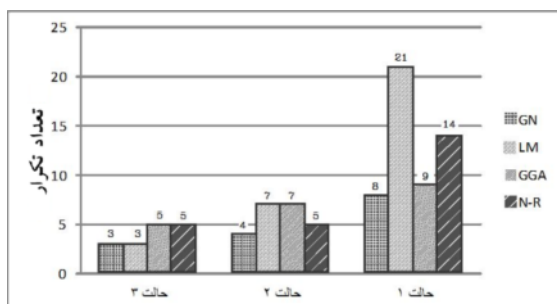
این مسأله با استفاده از چهار الگوریتم گوس-نیوتن GN، لونیبرگ-مارکوارت LM، نیوتن-رافسون NR و گرادیان سراسری GGA حل شده است. حدس اولیه دبی عبوری از لوله‌ها برای هر یک از این روش‌ها در سه حالت مختلف فرض شده است. ۱- دبی کلیه لوله‌ها برابر  $Q_{max}$  است. ۲- دبی کلیه لوله‌ها برابر  $0.1 Q_{max}$  است. ۳- دبی کلیه لوله‌ها با روش خطی‌سازی تابع افت محاسبه می‌شود. محاسبات با ارضای شرط  $\|\epsilon\| \leq 1.e-9$  خاتمه پیدا می‌کند که در آنجا  $\|\epsilon\|$  نرم باقی‌مانده و برابر قدرمطلق حداکثر اختلاف بین دبی‌های هر لوله در دو گام متوالی محاسباتی  $k$  و  $k+1$  تقسیم بر حداکثر دبی در گام  $k$  تعریف می‌شود.

$$\|\epsilon\| = \max |\epsilon_i| = \max \left| \frac{Q^{k+1} - Q^k}{Q^k} \right| \quad (27)$$

در شکل ۵ جواب نهایی با حدس اولیه در ۳ حالت مذکور مقایسه شده و ملاحظه می‌شود که حدس اولیه در حالت خطی‌سازی شده (حالت سوم) به جواب نهایی بسیار نزدیک است. در دیاگرام میله‌ای شکل ۶ تعداد تکرار در روش‌های مختلف برای سه حالت حدس اولیه ترسیم شده است. در حالت ۱ که حدس اولیه دورتر از جواب‌های نهایی است، روش گوس نیوتن در ۸ تکرار، روش لونیبرگ-مارکوارت در ۲۱ تکرار، روش نیوتن-رافسون در ۱۴ تکرار و روش گرادیان سراسری در ۹ تکرار همگرا می‌شوند. در حالت ۲ حدس اولیه نزدیک‌تر



شکل ۵ مقایسه حالت‌های مختلف انتخاب حدس اولیه

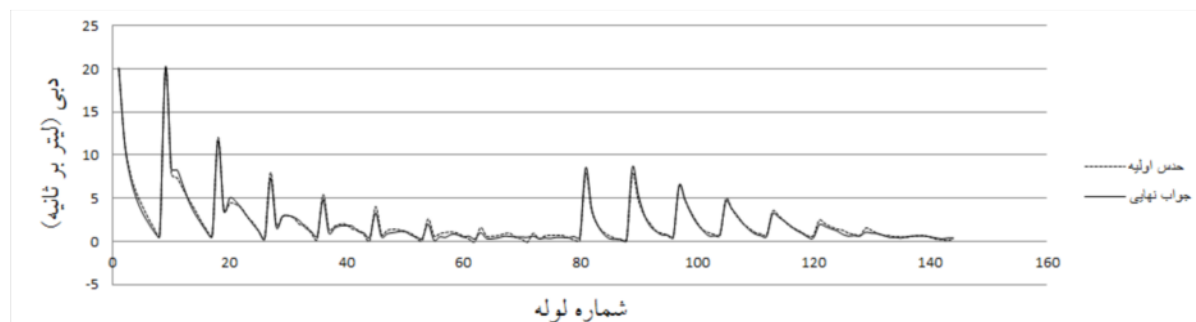


شکل ۶ مقایسه تعداد تکرار همگرایی روش‌های مختلف

به عنوان نمونه در شکل ۸ یک شبکه ۹×۹ همراه با شماره‌گذاری لوله‌ها نشان داده شده است. این شبکه دارای ۸۱ گره و ۱۴۴ لوله است. در هر کدام از گره‌ها مقدار تقاضای گرهی با استفاده از اعداد تصادفی انتخاب شده است. برای تحلیل شبکه‌های فوق علاوه بر روش‌های حداقل مربعات GN و LM از روش‌های گرادینان سراسری GGA و نیوتن-رافسون NR نیز استفاده شده است. در روش GGA که چندان به حدس اولیه حساس نیست، دبی در لوله‌ها با فرض سرعت ۱ فوت بر ثانیه مطابق توصیه EPANET (Rassman, 2002) اعمال شده است و در سه روش گوس-نیوتن، لوبرگ-مارکواریت و نیوتن-رافسون که به حدس اولیه حساس هستند، از حدس اولیه حاصل از خطی‌سازی تابع افت هد در محاسبات استفاده شده است. در شکل ۹ حدس اولیه به دست آمده از تابع خطی‌سازی افت با جواب نهایی مقایسه شده است.

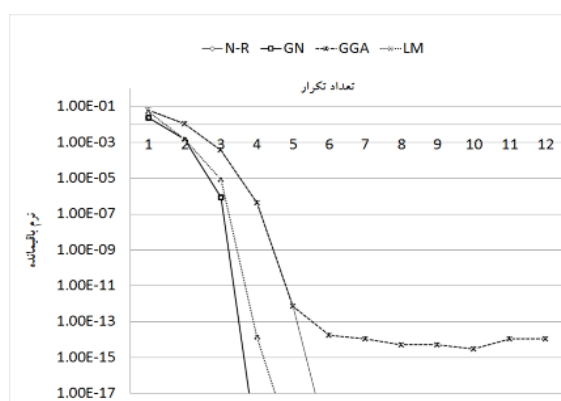
	1	2	3	4	5	6	7	8	
9	10	81	82	83			87	17	88
18	19	89					95	26	96
27	28							35	104
36								44	112
45								53	120
54								62	128
63	64						70	135	136
72	73	137					79	143	144
		74						80	

شکل ۸ شبکه آب ۹×۹



شکل ۹ حدس اولیه و جواب نهایی دبی لوله‌های شبکه ۹×۹

در شکل ۷ نرم خطای باقی‌مانده بر حسب تعداد تکرار در حالت سوم ترسیم شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود روش‌های GN و LM با شیب مشابهی بسیار سریع همگرا می‌شوند. روند همگرایی در روش‌های NR و GGA تا نرم باقی‌مانده  $\| \epsilon \| \leq 1.e-13$  یکسان است. در دقت‌های بالاتر ( $\| \epsilon \| \approx 1e-14$ ) روش GGA حول جواب نهایی نوسان می‌کند در حالی که سه روش دیگر با شیب نسبتاً تند به جواب همگرا می‌شوند.

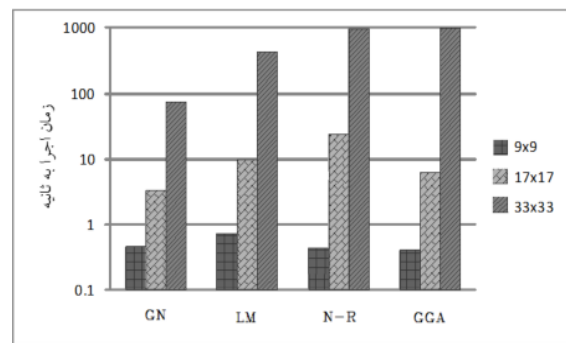


شکل ۷ مقایسه روند همگرایی روش‌های مختلف در حالت ۳

## ۶-۲- شبکه بزرگ آبرسانی

مجموعه‌ای از شبکه‌های حلقوی منظم با  $N \times N$  گره در نظر گرفته می‌شود که در آن  $N$  (تعداد گره‌ها در هر ردیف یا ستون) برابر ۹، ۱۷ و ۳۳ می‌باشد؛ حجم محاسبات با زیاد شدن  $N$  به شدت افزایش می‌یابد.

همگرا نمی‌شوند. در جدول ۲ زمان همگرایی و تعداد تکرار روش‌های مختلف برای سه شبکه درج شده است. مطابق این جدول روش GN در کلیه شبکه‌ها با ۵ تکرار همگرا می‌شود. تعداد تکرار در روش LM با بزرگ شدن شبکه افزایش پیدا می‌کند. روش NR در دو شبکه ۹x۹ و ۱۷x۱۷ به ترتیب با ۶ و ۴۱ تکرار همگرا می‌شود. روش GGA نیز در دو شبکه ۹x۹ و ۱۷x۱۷ به ترتیب با ۷ و ۲۹ تکرار همگرا می‌شود. هر دو روش اخیر در شبکه ۳۳x۳۳ نمی‌توانند شرط همگرایی ( $\|e\| \leq 1.e-9$ ) را ارضا کنند. با ملاحظه زمان همگرایی در جدول مذکور نیز می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در شبکه‌های کوچک روش‌های گرادیان سراسری و نیوتن-رافسون بهتر عمل می‌کنند، اما با بزرگ شدن شبکه زمان همگرایی آن‌ها افزایش یافته، بطوری که در شبکه ۳۳x۳۳ هیچ‌گاه همگرا نمی‌شوند. از میان دو روش حداقل مربعات گوس-نیوتن و لونبرگ-مارکوارت، روش گوس-نیوتن عملکرد مناسب‌تری دارد. در شکل ۱۱ روند همگرایی در شبکه ۳۳x۳۳ برای روش‌های مختلف ترسیم شده است. همان طور که ملاحظه می‌شود روش GN بسیار سریع‌تر از سایر روش‌ها همگرا می‌شود ( $\|e\| \approx 1.e-20$ ). روند همگرایی روش LM به دلیل استفاده از الگوریتم تندترین کاهش در ابتدا کند است اما با کم شدن ضریب  $\mu$  شیب منحنی به روش نیوتن میل می‌کند و روند همگرایی تسریع می‌شود.



شکل ۱۰ زمان همگرایی در شبکه‌های مختلف

ملاحظه می‌شود که حدس اولیه حاصل از این روش در کلیه لوله‌ها بسیار نزدیک به جواب نهایی تخمین زده شده است. زمان محاسبات با ارضای شرط  $\|e\| \leq 1.e-9$  به دست می‌آید که در آنجا  $\|e\|$  نرم باقی‌مانده مطابق رابطه (۲۷) تعریف می‌شود. در نمودار میله‌ای شکل ۱۰ زمان همگرایی روش‌ها در شبکه‌های مختلف ترسیم شده است. همان طور که ملاحظه می‌شود در شبکه کوچک ۹x۹ کم‌ترین زمان همگرایی در روش NR، برابر ۰/۲ ثانیه به دست می‌آید. بیش‌ترین زمان همگرایی در این شبکه متعلق به روش LM، برابر ۰/۷۱ ثانیه است. در شبکه متوسط ۱۷x۱۷ کم‌ترین زمان همگرایی در روش GN برابر ۳/۲۳ ثانیه به دست می‌آید و بیش‌ترین زمان هم متعلق به روش NR با ۳۵/۳۷ ثانیه است. در شبکه بزرگ ۳۳x۳۳ روش‌های GN با ۷۳/۸۸ ثانیه و LM با ۴۲۸/۴ ثانیه همگرا می‌شوند، در حالی که روش‌های NR و GGA

جدول ۲ زمان و تعداد تکرار همگرایی روش‌های مختلف در شبکه‌های ۹x۹، ۱۷x۱۷، ۳۳x۳۳

روش عددی	۹x۹		۱۷x۱۷		۳۳x۳۳	
	زمان همگرایی (ثانیه)	تعداد تکرار	زمان همگرایی (ثانیه)	تعداد تکرار	زمان همگرایی (ثانیه)	تعداد تکرار
GN	۰/۴۷	۵	۳/۲۳	۵	۷۳/۸۸	۵
LM	۰/۷۱	۹	۹/۵۵	۱۳	۴۲۸/۴	۳۱
NR	۰/۴۵	۶	۳۵/۳۷	۴۱	همگرا نمی‌شود	
GGA	۰/۴۱	۷	۶/۲	۲۹	همگرا نمی‌شود	

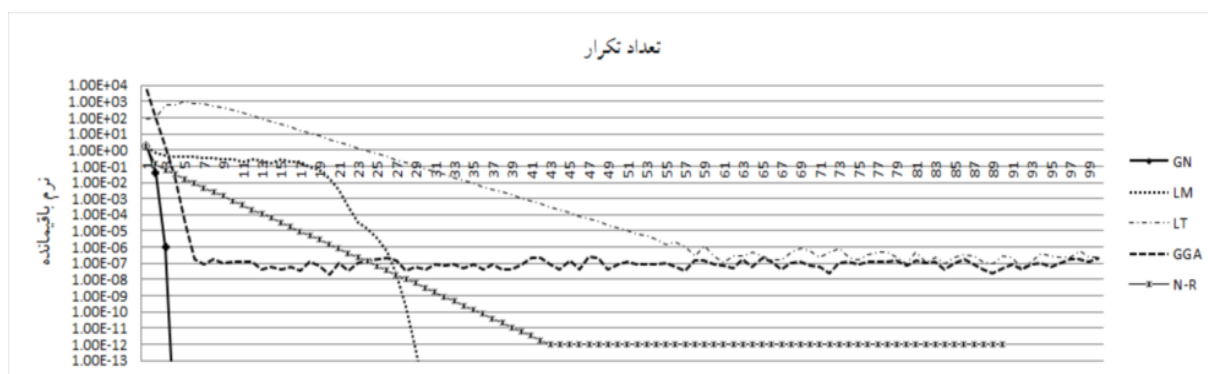
### ۶-۳- شبکه شامل پمپ، شیر و دو مخزن

شبکه شکل ۱۲ با ۸ لوله، ۲ پمپ، ۲ مخزن و ۳ شیر در نظر گرفته شده است. مشخصات هیدرولیکی مسأله در جدول ۳ درج شده‌اند (Larock et al., 2000). در این مسأله مقدار  $m=1.852$  فرض شده است. منحنی‌های مشخصه پمپها در سیستم آحاد SI با معادلات زیر تخمین زده می‌شود:

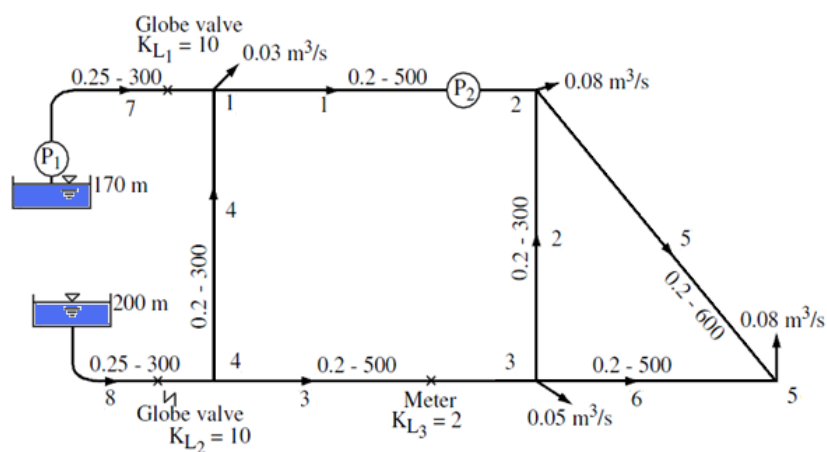
$$hp = -2220Q^2 + 44.4Q + 12.28 \quad \text{پمپ ۱}$$

$$hp = -55.6Q^2 + 1.667Q + 4.1 \quad \text{پمپ ۲}$$

روش GGA حول جواب با دقت حدود  $(\|\epsilon\| \leq 1.e-6)$  در نوسان است. با توجه به مطالب ذکر شده در بخش ۵-۱، علت نوسانات این روش را می‌توان به شکل تابع در معادلات H در هر تکرار نسبت داد. روش NR نیز از جواب با دقت  $(\|\epsilon\| \approx 1.e-12)$  فراتر نمی‌رود. جالب آن که دقت روش نیوتن-رافسون با حدس اولیه مناسب از روش GGA بیشتر است، اما به دلیل تحذب تابع حداقل مربعات در این مسأله دقت و سرعت همگرایی روش‌های LM و GN از آن زیادتر می‌شود.



شکل ۱۱ روند همگرایی روش‌های مختلف در شبکه ۳۳×۳۳



شکل ۱۲ شبکه شامل پمپ، شیر و دو مخزن (Larock et al., 2000)

جدول ۳ ضریب مقاومت لوله‌ها و توان دبی در معادله افت هیزن-ویلیامز

شماره لوله	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$R(m^{-5}s)$	۱۱۶۰	۶۱۳	۱۱۶۰	۶۹۰	۱۲۹۲	۱۱۱۵	۳۲۲	۲۳۹

ملاحظه می‌شود وجود متعلقات در شبکه آب‌رسانی تاثیری در خصوصیات همگرایی این روش‌ها ندارد. زیرا ماهیت معادلات مربوط به این متعلقات، مانند معادله افت هد است.

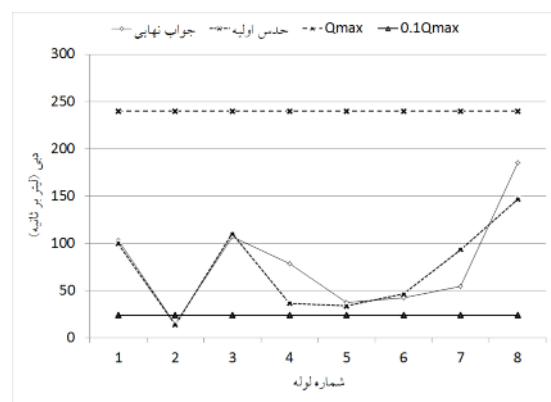
### ۷- نتیجه‌گیری

در صورت استفاده از روش‌های حداقل مربعات گوس-نیوتن و لونیبرگ-مارکوارت، به کار بردن معادلات Q سرعت همگرایی را افزایش می‌دهد. روش‌های حداقل مربعات گوس-نیوتن و لونیبرگ-مارکوارت با تضمین تحذب مسأله نوسانات را حذف می‌کنند و دقت همگرایی را بالا می‌برند. حدس اولیه مناسب برای حل معادلات پیوستگی و انرژی با روش‌های نیوتنی و حداقل مربعات از خطی‌سازی معادلات انرژی و حل معادلات کل به دست می‌آید، در نتیجه ایراد اساسی این روش‌ها برطرف شده و سرعت همگرایی به شدت افزایش پیدا می‌کند. قوت همگرایی روش‌های حداقل مربعات با دقت بسیار زیاد در زمان کوتاه‌تر از مقایسه الگوریتم گوس-نیوتن همراه با حدس اولیه مناسب با روش گرادیان سراسری در شبکه‌های آب‌رسانی بزرگ و کوچک اثبات می‌شود.

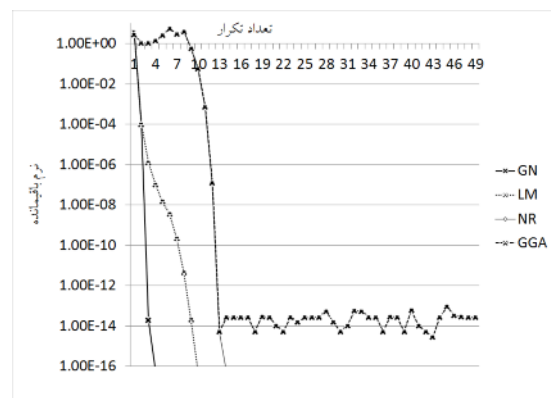
### ۸- فهرست علائم

$D$	قطر لوله
$e$	بردار خطا
$F$	تابع برداری
$f$	تابع اسکالر غیرخطی
$h$	افت هد لوله
$H$	هد گرهی
$H$	ماتریس هسیان
$J$	ماتریس ژاکوبین
$L$	طول لوله
$m$	توان دبی در معادله افت هد
$Q$	دبی لوله

این مسأله با استفاده از چهار الگوریتم گوس-نیوتن GN، لونیبرگ-مارکوارت LM، نیوتن-رافسون NR و گرادیان سراسری GGA حل شد. در شکل ۱۳ حدس اولیه ناشی از خطی‌سازی با جواب نهایی مقایسه شده است. در ۵ لوله مقدار دبی اولیه بسیار نزدیک به جواب نهایی است. بنابراین این حدس اولیه شروع مناسبی برای حل مسأله است. در شکل ۱۴ روند همگرایی روش‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده است.



شکل ۱۳ مقایسه حالت‌های مختلف انتخاب حدس اولیه



شکل ۱۴ مقایسه روند همگرایی روش‌های مختلف

روش گوس نیوتن سریع‌تر از بقیه روش‌ها همگرا می‌شود. روش لونیبرگ مارکوارت نیز پس از روش گوس نیوتن بهترین عملکرد را داراست. روش نیوتن رافسون با شیب ملایم‌تر به جواب همگرا می‌شود، اما روش GGA حول نقطه  $1. e-14$  نوسان می‌کند.

Jakobus, E., Kumar, P. and Gupta, M. (2008). "Two-point linearization method for the analysis of pipe networks", J. of Hydraulic Eng., 134, pp. 1176-1179

Larock, B.E., Jeppson, R.W. and Watters, G.Z. (2000). Hydraulics of pipeline systems, Boca Raton London New York Washington, D.C, ISBN 0-8493-1806-8.

Luenberger, D.G. and Yinyu, Y. (2008). Linear and nonlinear programming. International Series In Operations Research and Management Science, Stanford University.

Martin, D.W. and Peters, G. (1963). "The application of Newton's method to network analysis by digital computers", IWES Journal, 17, pp. 115-129.

Nocedal, J. and Wright, S. J. (2006). Numerical optimization. Springer Series in Operations Research and Financial Engineering.

Powell, M. J. D. (1978). "Algorithms for nonlinear constraints that use Lagrangian functions", Math. Prog. 14, 1978, pp. 224-248.

Rossman, L. A. (2002). EPANET 2 users manual. Water Supply and Water Resources Division, National Risk Management Research Laboratory, Cincinnati, OH45268.

Shamir, U. and Howard, C. D. (1968). "Water distribution systems analysis", J. Hydraulic., Dlv. ASCE, 94(1), pp. 219-234.

Todini E. and Pilati, S. (1987). "A gradient method for the solution of looped pipe networks", Computer Applications in Water Supply, Volume 1 (System Analysis and Simulation), John Wiley & Sons.

Todini, E. (2006). "On the convergence properties of the different pipe network algorithms", 8th Annual Water Distribution Systems Analysis Symposium, Cincinnati, Ohio, USA.

Wood, D.J. and Charles, C. O. A. (1972). "Hydraulic network analysis using linear theory", J. Hydraulic Division., ASCE, 107(3), pp. 384-385.

$Q_{max}$	دبی حداکثر عبوری از لوله
$R$	ضریب مقاومت لوله
$S$	تابع مجموع مربعات
$x$	بردار جواب
$\nabla$	بردار گرادیان
$\ \varepsilon\ $	نرم باقی مانده

## ۹- منابع

موسویان، ن.، و جعفرزاده، م. ر. (۱۳۸۹). "مقایسه روش‌های تکراری و مستقیم در تحلیل هیدرولیکی شبکه‌های آب‌رسانی"، نهمین کنفرانس هیدرولیک ایران، دانشگاه تربیت مدرس.

Basha, H.A. and Kassab, B.G. (1996). "Analysis of water distribution systems using a perturbation method. Applied Mathematics Modelling, 20, pp. 290-297.

Bertsekas, D.P. (1996). Constrained optimization and Lagrange multiplier methods. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, Academic Press, ISBN 1-886529-04-3.

Bhave, P.R. and Gupta, R. (2006). Analysis of water distribution networks. Alpha Science International Ltd. Oxford, U.K. ISBN: 978-81, pp. 7319-778-9.

Collins, A.G. and Johnson, R.L. (1975). "Finite-element method for water distribution networks", Journal American Water Works Association, 67(7), pp. 385-389.

Cross, H. (1936). "Analysis of flow in networks of conduits or conductors", Bulletin no. 286, University of Illinois Engineering Experimental Station, Urbana Illinois, USA.

Dennis, J. E. and Schnabel, R. B. (1996). Numerical methods for unconstrained optimization and nonlinear equations. Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia.

Fletcher, R. (1987). Practical methods of optimization. New York, John Wiley & Sons. ISBN 978-0-471-91547-8.