

بررسی عددی تأثیر انحناى مجرای قبل از دریچه سرویس تخلیه کننده‌های تحتانی در هیدرولیک جریان

مهدی نعمتی¹، حسن احمدی^{2*}

1- کارشناس ارشد مهندسی عمران - سازه های هیدرولیکی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رودهن، باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، رودهن
2- استادیار مهندسی عمران، عضو هیأت علمی دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد رودهن

* hgahmadi@riau.ac.ir

چکیده- تخلیه کننده‌های تحتانی به عنوان سازه‌های هیدرولیکی جانبی در سدها شناخته شده‌اند که وظیفه کنترل سیلاب، تخلیه رسوبات و انتقال جریان را برعهده دارند. در این مطالعه، حل عددی جریان در تخلیه کننده تحتانی دارای شیب، متشکل از مقاطع متعدد هندسی و دارای انحناى مجرای قبل از دریچه سرویس با استفاده از نرم‌افزار FLOW-3D به عنوان یک مدل دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) مورد بررسی قرار گرفته است. مدل $k-\epsilon$ به عنوان مدل آشفتگی برای حل جریان فوق‌بحرانی استفاده شد. اهداف این مقاله، تعیین و پیشنهاد ساختار هندسی مناسب مجرای جریان در جهت حذف الگوی جریان چرخشی پایین دست و پیش‌بینی اثر تغییر هندسه مجرا بر مشخصات جریان در محل دریچه و پایین دست جریان بوده است. نتایج مدل‌سازی عددی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شد. نتایج نشان داد که با انتخاب 25 متر طول مستقیم قبل از دریچه‌ها، مقادیر انرژی آشفتگی و فشار جریان بعد از دریچه‌ها به ترتیب 27/86% و 26/17% کاهش یافته است. همچنین، با در نظر گرفتن طول‌های بیشتر، تفاوت قابل ملاحظه‌ای یافت نشد.

کلید واژگان: مدل‌سازی عددی، تخلیه کننده تحتانی، انحناى مجرا، FLOW-3D.

1- مقدمه

خروجی از مجرا در پایین دست می‌شود. مسائل جریان در چنین ساختاری با توجه به روش حجم محدود مورد مطالعه قرار گرفته است. (Dargahi (2010 نتیجه‌گیری کرد که روش حجم محدود روشی مؤثر در تحلیل جریان‌های سطح آزاد در تخلیه کننده‌های تحتانی است. ایشان مشخصات جریان تحت فشار و سطح آزاد را با استفاده از روش حجم سیال¹ (VOF) که در نرم افزار FLOW-3D به کار گرفته شده، با دقت مدل‌سازی کرد. (Najafi et al. (2009 به منظور اندازه‌گیری منحنی شدت جریان در مقطع دریچه تونل، نیاز هوای جریان و نیز مطالعه شرایط جریان بالادست و پایین دست دریچه به مدل‌سازی عددی و آزمایشگاهی جریان در تخلیه کننده

معمولاً از تخلیه کننده تحتانی سد به منظور تخلیه و کنترل سیلاب، تخلیه اضطراری مخزن، کنترل آبگیری اولیه، تخلیه رسوبات انباشته شده در مخزن و انتقال جریان برای مصارف آبیاری استفاده شده است. چنانچه در تخلیه کننده‌های تحتانی، انحناى مجرا قبل از دریچه سرویس در نظر گرفته شود، امکان بروز جریان چرخشی و انسداد جریان در پایین دست مجرا وجود دارد. پدیده‌ی ناخواسته جریان چرخشی باعث بروز آشفتگی در جریان، ناپایداری تأسیسات هیدرولیکی در پایین دست و کاهش عمر سازه هیدرولیکی شده و اتلاف هزینه را به دنبال خواهد داشت. همچنین، طراحی ضعیف هندسه تخلیه کننده تحتانی منجر به جریان غیر قابل قبول جت

¹ Volume of Fluid (VOF)

مطابق شکل 1- ب جریان به یک مجرای دایروی به قطر 7 متر و طول 20 متر (S_1) وارد می‌شود. سپس با کاهش قطر مجرا به 5 متر، در طولی به اندازه 12 متر ادامه می‌یابد (S_2). مشخصات خم به قطر دایره ای 5 متر، شعاع خم 35 متر و زاویه خم $56/03$ درجه است (S_3). جریان عبوری از خم وارد یک مجرای مستقیم به طول 6 متر می‌شود (S_4). سپس با یک تبدیل مقطع از حالت دایره به مستطیلی با ابعاد 5 متر ارتفاع، $3/2$ متر عرض و 9 متر طول تغییر می‌کند (S_5). یک مجرای مستطیلی مستقیم در طرح اصلی به اندازه 5 متر ارتفاع، $3/2$ متر عرض و $4/23$ متر طول به عنوان طول مستقیم حداقل تعریف شده است (S_6). ابعاد دریچه اضطراری $4/4$ متر ارتفاع، $3/2$ متر عرض و $1/5$ متر طول (S_7) و ابعاد دریچه سرویس $4/2$ متر ارتفاع، 3 متر عرض و $0/77$ متر طول (S_8) می‌باشد. جریان خروجی از دریچه وارد یک مقطع مستطیلی با ابعاد $4/4$ متر ارتفاع، $3/2$ متر عرض و $7/83$ متر طول می‌شود که دارای یک شیب کف $4/7\%$ است (S_9) که در انتهای آن یک پله برای هوادهی جریان به ارتفاع $0/59$ متر تعبیه شده است. جریان بعد از عبور از پله وارد یک مسیر D شکل شده که عرض مقطع به تدریج افزایش می‌یابد و به 6 متر می‌رسد. ارتفاع مجرا در این قسمت $10/95$ متر و طول $25/95$ متر است (S_{10}). در نهایت، جریان وارد یک مقطع جامی شکل با مقطع ورودی $10/95$ متر ارتفاع، 6 متر عرض، $18/5$ متر طول و شعاع انحناى کف 35 متر (S_{11}) می‌شود. شیب کل مجرا $5/47\%$ است.

3- مدل سازی عددی

3-1- هندسه مدل و شبکه بندی

برای سهولت در مدل سازی از یک مقطع ورودی دایروی به قطر 7 متر استفاده شد. هندسه مدل مقیاس شده با استفاده از نرم افزار اتوکد بدست آمد و سپس به مدل دینامیک سیالات محاسباتی (CFD)² معرفی شد (شکل 2- الف). محدوده شبکه بندی از 32 متر بالاتر از ابتدای خم شروع شد و تا انتهای مجرا ادامه یافت.

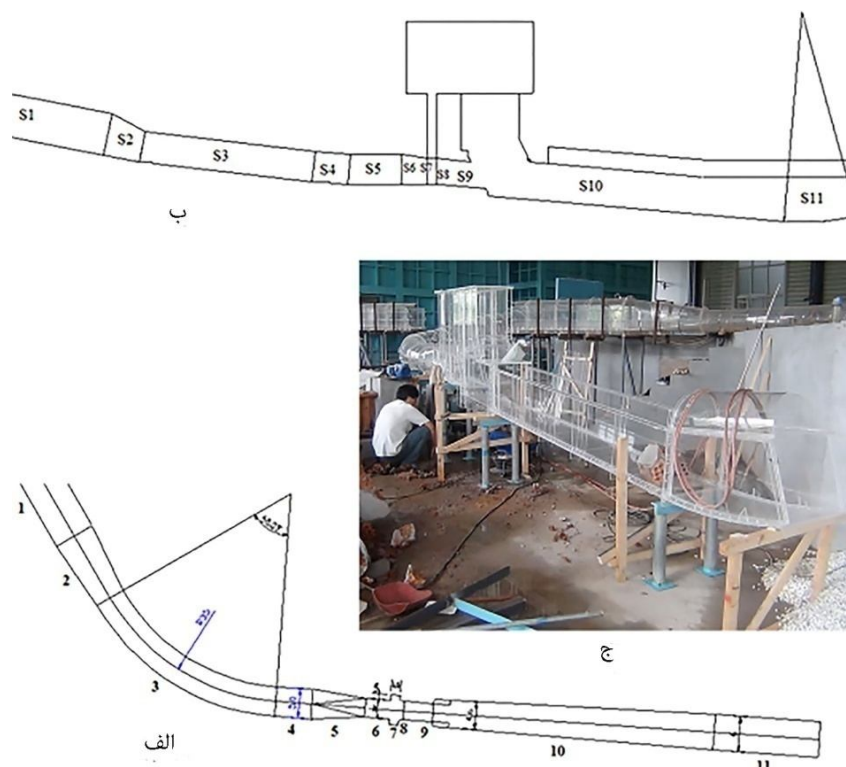
تحتانی سد گتوند پرداختند. ایشان در مطالعه خود از مدل آشفتگی $k-\epsilon$ همراه با مدل سطح آزاد VOF استفاده کردند. روش عددی حجم محدود قادر بود جریان پیچیده آب و هوا را در سرعت‌های بالا در تونل‌های دریچه دار مدل سازی کند. (Shamsai and Soleymanzadeh (2006) از روش حجم محدود به منظور بررسی جریان دوفازی در تخلیه کننده تحتانی با استفاده از مدل آشفتگی $k-\epsilon$ استفاده کردند. نتایج حاصل از مدل سازی عددی موافقت خوبی با نتایج آزمایشگاهی نشان داد. امامی و همکاران (1389) به مطالعه رفتار هیدرولیکی جریان رسوبی در تخلیه کننده تحتانی سد سفیدرود و به خصوص تغییرات سرعت پرداختند. نتایج نشان داد که روش حجم محدود از قابلیت بالایی در پیش بینی سرعت جریان برخوردار است. (Kolachian et al. (2012) وقوع کاویتاسیون را در تخلیه کننده تحتانی سد سفیدرود برای بازگشایی های مختلف دریچه مورد ارزیابی قرار دادند. ایشان با استفاده از روش حجم محدود و مدل Fluent به بررسی پروفیل سطح آب، سرعت متوسط، فشار استاتیکی و شاخص کاویتاسون پرداختند. نتایج حاصل از مدل سازی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شد.

در این مقاله، مدل سازی عددی جریان در تخلیه کننده تحتانی سد چم شیر با استفاده از مدل FLOW-3D نسخه 10.0.1، که یک برنامه بر پایه روش حجم محدود می‌باشد، ارائه شده است. هدف از این مطالعه تعیین یک طول بهینه از جریان مستقیم قبل از دریچه سرویس است که اثرات نامطلوب انحناى مجرا بر پایین دست برطرف گردد. به علاوه، اثر تغییر هندسه مجرا روی مشخصات هیدرولیکی جریان در محل دریچه و بعد از دریچه مورد بررسی قرار گرفته است.

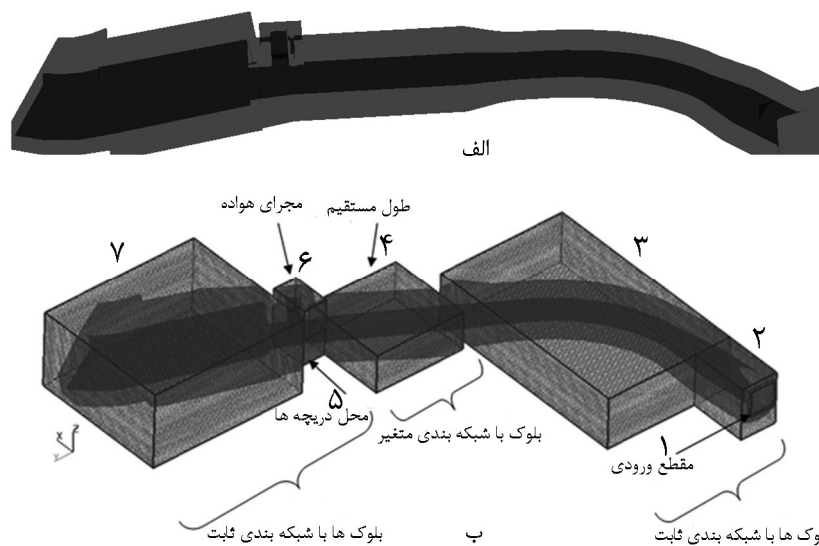
2- مطالعه آزمایشگاهی

نویسندگان از مطالعه آزمایشگاهی روی مدل فیزیکی 1:15 مقیاس شده سد چم شیر که در مؤسسه تحقیقات هیدرولیک نانتینگ انجام شده است، برای مدل سازی استفاده کردند (شکل 1- ج). مدل آزمایشگاهی از یک فلوم شیشه‌ای ارگانیک شفاف و بی رنگ ساخته شده است.

2. Computational Fluid Dynamics (CFD)



شکل 1 الف- پلان تخلیه کننده تحتانی در طرح اصلی، ب- پروفیل طولی تخلیه کننده تحتانی در طرح اصلی، ج- مدل فیزیکی سد چم شیر ساخته شده در موسسه تحقیقات هیدرولیک نانجینگ (Nanjing Hydraulic Research Institute Report, 2014)



شکل 2 الف- مدل صلب با جداره کم رنگ شده جهت مشاهده حفره مجرا (جهت جریان از راست به چپ)، ب- مدل صلب به همراه شبکه بندی تخلیه کننده تحتانی چم شیر

مطابق شکل 2- ب، تعداد سلول شبکه‌ها در راستاهای XYZ به صورت: $2 \times 14 \times 14$ (مقطع ورودی) (1)، $33 \times 21 \times 29$ (2)، $122 \times 74 \times 30$ (شبکه بر روی خم) (3)، $49 \times 53 \times 22$ (مربوط به بلوک 25 متر طول مستقیم) (4)، $22 \times 14 \times 15$ (5) (دریچه‌ها)، $22 \times 13 \times 17$ (6) هواده، $80 \times 92 \times 43$ (7) قسمت جامی شکل می‌باشد. تعداد

مطابق شکل 2- ب، تعداد سلول شبکه‌ها در راستاهای XYZ به صورت: $2 \times 14 \times 14$ (مقطع ورودی) (1)، $33 \times 21 \times 29$ (2)، $122 \times 74 \times 30$ (شبکه بر روی خم) (3)، $49 \times 53 \times 22$ (مربوط به بلوک 25 متر طول مستقیم) (4)، $22 \times 14 \times 15$ (5) (دریچه‌ها)، $22 \times 13 \times 17$ (6) هواده، $80 \times 92 \times 43$ (7) قسمت جامی شکل می‌باشد. تعداد

سلول‌ها در راستاهای X، Y و Z برای شبکه روی طول مستقیم در مدل طرح اصلی، 16×7×19، در مدل با 17/72 متر طول مستقیم (مدل مناسب پیشنهادی مطالعه آزمایشگاهی) 40×40×22 و در مدل با 25 متر طول مستقیم (مدل مناسب پیشنهادی حاصل از شبیه‌سازی)، 49×53×22 است.

بعد از تعیین تعداد سلول‌ها، صحت تناسب تعداد آنها در سه راستای X، Y و Z به وسیله دو پارامتر حداکثر نسبت بُعد³ و حداکثر نسبت اندازه سلول مجاور⁴ در راستاهای مختلف تعیین شد. پارامتر حداکثر نسبت ابعاد شبکه، بیشترین نسبت اندازه سلول‌های مجاور را در سه راستای X، Y و Z نشان می‌دهد. برای بالا رفتن دقت در حل مسئله و کاهش خطاهای ناشی از شبکه‌بندی، مقدار این پارامتر باید در هر سه راستای X، Y و Z کمتر از 1/25 باشد. پارامتر ضریب نسبت ابعاد شبکه، بیشینه نسبت صفحات را نسبت به یکدیگر به دست می‌دهد. مقدار این پارامتر نیز باید برای هر سه نسبت Y-Z، X-Z و X-Y کمتر از 3 باشد (FLOW-3D, 2008). به عنوان نمونه، اطلاعات شبکه برای بلوک شبکه‌بندی 80×92×43 در جدول 1 آورده شده است. برای یافتن بهترین اندازه شبکه، هندسه مدل با دو اندازه شبکه 0/03، 0/03 و 0/03 متر (به ترتیب در جهت‌های X، Y و Z) برای شبکه ریز و 0/2، 0/1 و 0/1 متر (به ترتیب در جهت‌های X، Y و Z) برای شبکه درشت اجرا شد. با توجه به نتایج آماره‌های خطا (جدول 2) مدل با شبکه‌بندی ریز برای مدل‌سازی انتخاب گردید.

هیدرواستاتیکی در راستای Z در نظر گرفته شد که در حقیقت همان فشار ناشی از سیال ساکن واقع در مخزن سد در بالادست تخلیه کننده تحتانی می باشد. زبری دیواره به اندازه 0/03mm تنظیم شد. مدل‌ها به صورت تک فازی مدل‌سازی شده‌اند. با این وجود، فرض می‌شود که تداخل هوا از اختلالات آشفته‌گی در سطح آزاد به وجود می‌آید (FLOW-3D, 2008). بنابراین، ضریب نرخ تداخل هوا⁵ به اندازه $C_{air}=0.5$ انتخاب شد (Kumcu, 2016). آب در دمای 20 درجه سانتی‌گراد به عنوان سیال انتخاب شد. با توجه به نتایج نشان داده شده در جدول 3، مدل $k-\epsilon$ برای حل مسأله به کار گرفته شد.

3-3- حل عددی

در کل 26 مدل‌سازی انجام شده است. مدل‌سازی‌ها با به کارگیری روش حل ضمنی باقی‌مانده حداقل تعمیم یافته⁶ اجرا شد با توجه به معیار همگرایی و پایداری در مدت تکرار⁷، اندازه گام زمانی⁸ کنترل شد. مدل‌سازی‌ها ادامه یافت تا به حل همگرایی و حالت پایدار برسد. همچنین، شرایط حالت پایدار با پایش پروفیل‌های سطح جریان و انرژی جنبشی جریان بررسی شد.

جدول 1 اطلاعات شبکه مورد استفاده برای همگرایی

حداکثر نسبت بُعد	حداکثر نسبت اندازه سلول مجاور
X_Y direction: 1.01	X direction: 1
Y_Z direction: 1.01	Y direction: 1
Z_X direction: 1	Z direction: 1

جدول 2 مقایسه دو مدل شبکه‌بندی

شبکه‌بندی	MAE	RMSE ($\text{Pa} \times 10^4$)	R^2
ریز	5/68	8/35	0/95
درشت	11/7	17/81	0/8

جدول 3 مقایسه مدل‌های آشفته‌گی

مدل آشفته‌گی	MAE	RMSE ($\text{Pa} \times 10^4$)	R^2
One-equation	24/1	35/2	0/27
K- ϵ	11/7	17/81	0/8
RNG	19/8	28/7	0/51
LES	18/8	27/2	0/56

3-2- شرایط مرزی و شرایط اولیه

شرایط مرزی سطح آب، Symmetry، دیواره‌ها، wall condition، مقطع ورودی جریان با شرایط مرزی Volume flow rate به اندازه $Q=0.574 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ ، که مقیاس شده دیی حداکثر به اندازه $500 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ با مقیاس 1:15 بر اساس عدد بی‌بعد فرود است و شرایط مرزی مقطع خروجی Outflow تنظیم شد. Fluid Initialization در نظر گرفته نشد. جریان از نوع لزج و برای شرایط مرزی ورودی فشار

⁵ Air entrainment rate coefficient

⁶ Implicit solver Generalized Minimum Residual method

⁷ Iteration

⁸ Time-step size

³ Maximum aspect ratios

⁴ Maximum adjacent cell size ratio

4- نتایج

4-1- اعتبارسنجی مدل عددی

مقایسه نتایج مدل‌سازی عددی با نتایج آزمایشگاهی در مورد پارامتر توزیع فشار در طول جریان در شکل 3 آورده شده است. مقایسه مقادیر توزیع فشار در طول مجرا در 18 نقطه اندازه‌گیری شده بر طبق شکل 4 است. یک محدوده خطا 0/01%-14/44% برای مدل‌سازی محاسبه شد.

4-2- ارائه نتایج

شکل‌های 5 جریان سه بعدی پایین‌دست مجرا را در چهار مدل نشان می‌دهند. از آنجایی که شبیه‌سازی به صورت تک فازی در نظر گرفته شده است، FLOW-3D مقدار فشار را برای پایین‌دست جریان، مقداری منفی در نظر گرفته است. مقادیر پارامترهای هیدرولیکی حاصل از مدل‌سازی در یک نقطه از مقطع دریاچه به فاصله $y=0/07$ m از مقطع ورودی دریاچه‌ها و یک نقطه بعد از دریاچه به فاصله $y=0/76$ m از مقطع ورودی دریاچه‌ها در نظر گرفته شد. روند تغییرات پارامترهای اندازه‌گیری شده در شکل 6 نشان داده شده است.

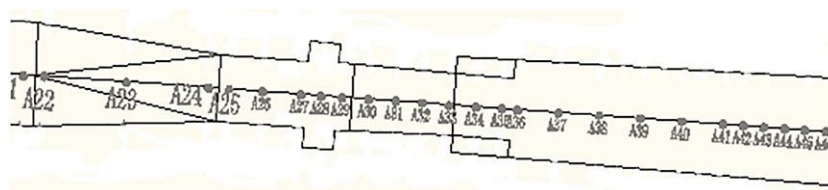
5- بحث

برای حذف جریان چرخشی و آشفتگی جریان در طرح

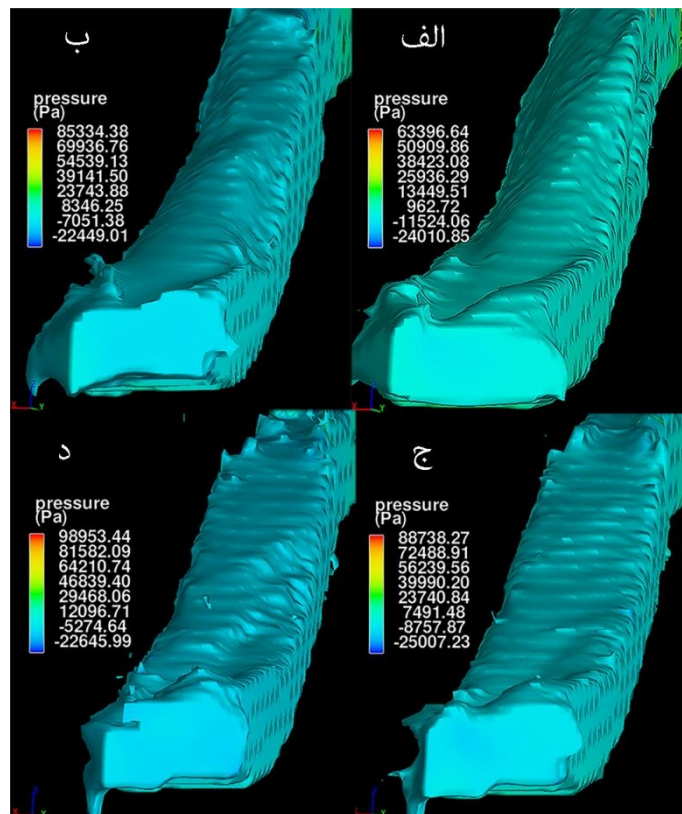
اصلی (شکل 7)، طولی از جریان مستقیم قبل از دریاچه‌ها در نظر گرفته شد. این طول در شبیه‌سازی عددی مرتباً هر 1 متر افزایش داده شد (تا 25 متر). سپس به منظور اطمینان از بهینه بودن مدل برای یک طول بیشتر از 25 متر، با طول 36 متر، مدل‌سازی انجام شد و پروفیل طولی توزیع فشار آن مطابق شکل 5-د با پروفیل طولی توزیع فشار مدل 25 متر، شکل 5-ج، مورد مقایسه قرار گرفت و تفاوت قابل ملاحظه‌ای مشاهده نشد. با در نظر گرفتن 25 متر تونل مستقیم، جریان خروجی از دریاچه‌ها نسبتاً آرام است، الگوی جریان پایین‌دست تقریباً پایدار بوده، جریان در سمت راست و چپ دیواره متقارن است و پدیده بال آبی در دیواره تونل کمتر شده است. به علت پایداری جریان در پایین‌دست مجرا، پدیده پاشش آب به دیواره‌ها در هنگام خروج جریان از بین رفته است. همچنین، انسداد جریان و برخورد جریان به سقف تونل نیز کاملاً حذف شده است. اگرچه شکل‌گیری بال آبی در جریان خروجی از مجرا کاملاً بر طرف نشده است، اما اثر آن به حدی نیست که برای ساختار هیدرولیکی تهدیدی محسوب شود. همچنین، مشخص شد که پارامترهای اندازه‌گیری شده به شدت تحت تأثیر خم قرار دارند، به گونه‌ای که با افزایش فاصله دریاچه‌ها از خم، بعد از دریاچه‌ها مقدار فشار به شکل معنی‌داری کاهش یافته است.



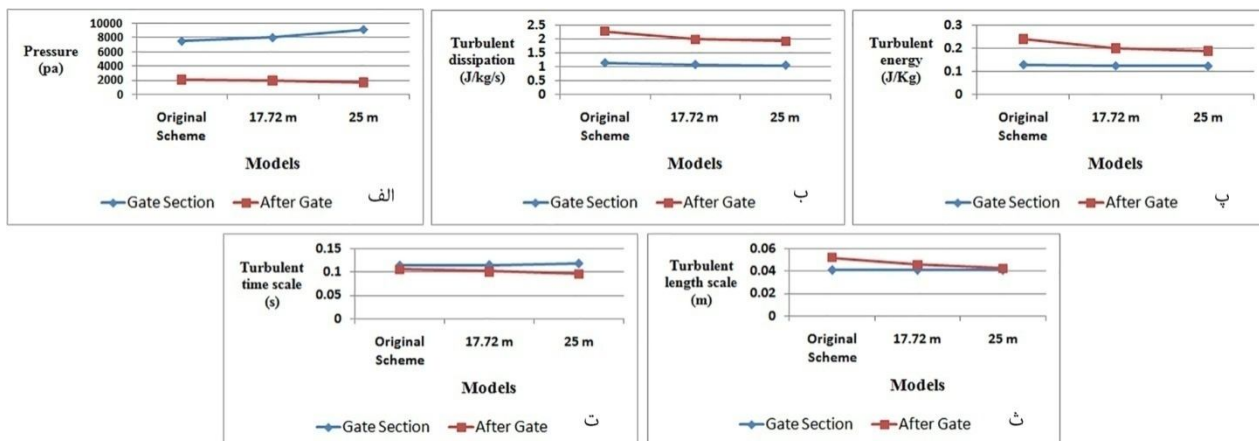
شکل 3 مقایسه بین نتایج فشار در مدل فیزیکی و مدل مدل‌سازی شده



شکل 4 موقعیت نقاط اندازه‌گیری فشار در طرح اصلی



شکل 5 الف- وضعیت جریان در طرح اصلی، ب- مدل با 17/72 متر طول مستقیم، ج- مدل با 25 متر طول مستقیم، د- مدل با 36 متر طول مستقیم



شکل 6 مقایسه پارامترها بین مدل‌های شبیه‌سازی شده، الف) فشار (Pa)، ب) اتلاف آشفتگی (J/kg/s)، پ) انرژی آشفتگی (J/kg)، ت) مقیاس زمان آشفتگی (s)، ث) مقیاس طول آشفتگی (m)

اتلاف آشفتگی، مقیاس زمانی آشفتگی و مقیاس طول آشفتگی کاهش نسبت به مدل اصلی داشته‌اند. همچنین در محل دریچه‌ها، مقدار فشار و مقیاس زمان آشفتگی با افزایش طول مستقیم افزایش یافته‌اند (به ترتیب 17/6% و

(مثال: برای مدل 25 متر، 26/17% کاهش نسبت به مدل اصلی) و مقادیر پارامترهای آشفتگی نیز یک روند کاهشی را تجربه کرده‌اند که برای مدل 25 متر، 27/86%، 18/61%، 9/44% و 21/93% به ترتیب انرژی آشفتگی،

قبل از دریچه‌ها و بدون تغییرات زیاد در مدل اصلی، اثرات خم روی جریان عبوری از دریچه‌ها به میزان قابل توجهی کاهش داده شد. همچنین، با اصلاح هندسه مجرا مقادیر آشفتگی و فشار جریان بعد از دریچه‌ها به طور محسوسی کاهش یافت. بنابراین مدل‌سازی عددی با کاهش هزینه در ساخت مدل آزمایشگاهی نتایج قابل قبول و قابل اطمینانی را فراهم آورده است.

7- فهرست علائم

C_{air}	ضریب نرخ تداخل هوا
$k-\epsilon$	مدل دو معادله‌ای آشفتگی
MAE	میانگین خطای مطلق
Q	دبی
RMSE	خطای ریشه متوسط مربعات
RNG	مدل آشفتگی گروه‌های نرمال شده
R^2	ضریب تعیین
y	طول در راستای عرضی

8- منابع

امامی، س. م. ک.، کاویانپور، م. ر. و روشن، ر. (1389). "بررسی عددی توزیع سرعت در جریان غلیظ در تخلیه‌کننده تحتانی (مطالعه موردی تخلیه‌کننده تحتانی سد سفیدرود)", نهمین کنفرانس هیدرولیک ایران، دانشگاه تربیت مدرس، تهران.

Dargahi, B. (2010). "Flow characteristics of bottom outlets with moving gates". *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 48, No. 4, pp. 476-482, Doi: 10.1080/00221686.2010.507001

FLOW-3D. (2008). *User manual. Excellence in flow modeling software*, V 9.3, Flow Science, Inc., Santa Fe.

Kumcu, S.Y. (2016). "Investigation of flow over spillway modeling and comparison between experimental data and CFD analysis". *KSCE Journal of Civil Engineering*, Vol. 21, No. 3, pp. 1-10, Doi: 10.1007/s12205-016-1257-z.

Kolachian, R. Abbaspour, A. and Salmasi, F. (2012). "Aeration in bottom outlet conduits of dams for prevention of cavitation". *J. Civil Eng. Urban*, Vol. 2, No. 5, pp. 196-201.

Nanjing Hydraulic Research Institute Report. (2014). *Intermediate results 2 of gate flow-induced*

3/39% در مدل 25 متر نسبت به مدل اصلی) درحالی که مقیاس طول آشفتگی بدون تغییر ثابت مانده است (0/041متر) و مقادیر انرژی آشفتگی و اتلاف آشفتگی کاهش یافته‌اند (به ترتیب 4/88% و 7/85% در مدل 25 متر نسبت به مدل اصلی) (شکل 6). بنابراین با توجه به اندازه تغییرات صورت گرفته در بین پارامترها به نظر می‌رسد که فشار حساسیت بیشتری را به افزایش طول نشان می‌دهد.



شکل 7 رژیم جریان پایین‌دست در طرح اصلی (Nanjing Hydraulic Research Institute Report, 2014)

6- نتیجه‌گیری

در این پژوهش جریان فوق‌بحرانی در یک تخلیه‌کننده تحتانی شیب‌دار با مقاطع مختلف هندسی و یک انحنا قبل از دریچه‌ها مطالعه شد و اثرات اصلاح هندسه مجرا روی رژیم جریان و پارامترهای هیدرولیکی جریان برای بازشدگی 100% دریچه‌های اضطراری و سرویس مورد بررسی قرار گرفت. از داده‌های تجربی برای اعتبارسنجی مدل عددی استفاده شد. پروفیل‌های سطح آب و مقادیر پارامترهای هیدرولیکی با محدوده قابل قبولی از خطا بدست آمد. نتایج بدست آمده برای طول 17/72 متر- طول پیشنهادی مطالعه آزمایشگاهی- نشان داد که به علت وجود خم قبل از دریچه‌ها، پدیده‌های حاصل از جریان آشفته هنوز به شکل نامطلوبی در جریان قابل مشاهده هستند. متعاقباً، برای بدست آوردن نتیجه مطلوب، مدل‌سازی عددی برای یافتن طول مناسب ادامه یافت. در نتیجه، با در نظرگیری یک طول مستقیم بهینه

Rodi, W. (1980). *Turbulence models and their application in hydraulics: a state of the art review*. International Association for Hydraulic Research (IAHR), Delft, The Netherlands.

Shamsai, A. and Soleymanzadeh, R. (2006). "Numerical simulation of air-water flow in bottom outlet". *International Journal of Civil Engineering*, Vol. 4, No.1, pp. 14-33.

vibration model of discharging bottom hole of CHAMSHIR hydropower station in Iran.

Najafi M.R., Roshan R., Zarrati A.R., and Kavianpour M.R. (2009). "Numerical modeling of flow condition in a bottom outlet", *Advances in Water Resources and Hydraulic Engineering*, Proc. of 16th IAHR-APD Cong., Berlin, Heidelberg.