مجله علمی- پژوهشی
دوره ۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۱

وزن‌دهی تطبیقی دوبعدی در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش

سیما کریمی[۱]، محسن لشکربلوک[۲]، ابراهیم جباری[۳*]
۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه علم و صنعت ایران
۲-دانشجوی دکتری، دانشگاه علم و صنعت ایران
۳- دانشیار، دانشگاه علم و صنعت ایران

*** تهران، کد پستی ۱۳۱۱۴- ۱۶۸۴۶**
jabbari@iust.ac.ir

چکیده- تحلیل تطبیقی یکی از مطالعات مهم در زمینه روش‌های عددی است. در چند دهه اخیر فعالیت‌های پژوهشی متعددی در این حوزه انجام شده است. هدف نهایی از این تحلیل‌ها، به دست آوردن حل عددی با دقت مطلوب و کمترین هزینهٔ محاسباتی است. هر فرایند تظریف تطبیقی شامل دو بخش اصلی است: بخش اول برآورد کنندهٔ خطا و دیگری ابزاری برای فرایند تظریف می‌باشد. یکی از مزایای روش‌های بدون شبکه، انعطاف‌پذیری آنها در فرایندهای تظریف تطبیقی است. روش‌های معمول در تظریف، شامل جابجایی نقاط و اضافه کردن نقاط جدید است. در این مقاله یک روش کم هزینه به نام وزن‌دهی تطبیقی به منظور بالا بردن دقت جواب‌ها در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش (CDLS) ارائه شده است. در روش ارائه شده باقی‌مانده‌ها به‌عنوان برآورد کنندهٔ خطا به کارگرفته شده و از آنها در تعریف تابع وزن استفاده شده است.

کلیدواژگان: روش‌های بدون شبکه، وزن‌دهی خودکار، حداقل مربعات گسسته همپوش.

۱- مقدمه

اولین ایدهٔ استفاده از روش‌های بدون شبکه در روش هیدرودینامیک ذرات هموار [۱] توسط Gingold and Monaghan (1977) به منظور مدل‌سازی پدیده‌های نجومی مانند گسترش ستارگان و توده ابرهای غباری به کار گرفته شد. پس از انتشار مقالهٔ روش جزء پخش [۲] توسط Nayroles et al. (1992)، روش‌های زیادی به نام روش‌های بدون شبکه مانند روش بدون شبکه گالرکین [۳] توسط Belytschko et al. (1994)، روش تولید ذرات کرنال[۴] توسط Liu et al. (1995)، روش اجزای محدود افراز واحد [۵] توسط Babuska and Rheinboldt (1980)، روش ابرهای اچ پی[۶] توسط Duarte and Oden (1996)، روش بدون شبکه محلی گالرکین [۷] توسط Atluri et al.

1. Smooth Particle Hydrodynamic
2. Diffuse Element
3. Element Free Galerkin
4. Reproducing Kernel Particle Method
5. Partition of Unity Finite Element
6. HP-clouds
7. Meshless Local Petrov Galerkin

(1999) و غیره ارائه شده‌اند. Afshar and Arzani (2004) در مقالهٔ خود یک روش جدید بدون شبکه را – که کاملاً مبتنی بر فرایند حداقل مربعات [1] بود– با عنوان حداقل مربعات گسسته [2] ارائه کردند. روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش، با افزودن دو ابزار جدید با نام‌های نقاط همپوش و توابع وزنی، به روش حداقل مربعات گسسته موجود حاصل شد (Afshar and Lashckarbolok , 2008). از قابلیت‌های این روش می‌توان به دقت بالا، سادگی، هزینهٔ محاسبهٔ پایین و عدم نیاز به انتگرال‌گیری اشاره کرد. فیروزجایی و افشار Firoozjaee and Afshar (2010) با معرفی روش نیمه افزایشی به حل معادله‌های ناویراستوکس با استفاده از روش حداقل مربعات گسسته همپوش پرداختند. شبیری و افشار مسائل سطح آزاد را با استفاده از این روش حل کردند. آنها همچنین فرایند تظریف تطبیقی [3] را برای حل این‌گونه جریان‌ها ارائه کردند (Shobeyri and Afshar, 2010).

تظریف تطبیقی در روش‌های عددی ابزاری قدرتمند در حل مسائل مهندسی است. فرایندهای تظریف تطبیقی به طور گسترده‌ای در اجزای محدود محاسباتی بکار رفته‌اند؛ ولی این فرایندها مراحل ابتدایی خود را در روش‌های بدون شبکه طی می‌کنند. در اجزای محدود از سه روش تظریف تطبیقی شامل ریزتر یا درشت‌تر کردن شبکه‌ها [4]، جابجا کردن شبکه‌ها [5] و تغییر درجه چند جمله‌ای درون‌یاب [6] استفاده می‌شود. در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش، اولین تلاش در راستای تهیهٔ الگوریتمی برای فرایند تظریف تطبیقی، توسط Afshar and Lashckarbolok (2008) انجام شد. آنها الگوریتمی برای جابجایی نقاط در مسائل یک‌بعدی ارائه دادند. این روش توسط Firoozjaee and Afshar (2010) تکمیل شده و در حل مسائل دوبعدی با موفقیت به کار رفته است.

در این مقاله سعی شده است معیاری برای وزن‌دهی نقاط همپوش، در روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش با استفاده از خطاهای براورد شده [7] ارائه شود. به این صورت ابزاری برای بهبود جواب‌ها در این روش بدون شبکه اضافه خواهد شد. بدیهی است که پس از به کارگیری فرایندهای تظریف موجود، می‌توان از این روش برای بهبود هرچه بهتر پاسخ های نهایی استفاده کرد. در این مقاله در ابتدا فرمول‌بندی روش بدون شبکه حداقل مربعات گسسته همپوش آورده شده است. سپس روش پیشنهادی برای وزن‌دهی ارائه شده و در نهایت چند مسأله نمونه حل شده است. با توجه به اهمیت مدل‌سازی شوک در مسائل هذلولوی، جواب تمامی مسائل حل شده با شوک همراه هستند.

۲- روش بدون شبکه CDLS

معادله دیفرانسیل زیر -که در حوزه Ω تعریف شده- در نظر گرفته شود:

$$L(u)=f \qquad in\ \ \Omega \tag{۱}$$

مسأله دارای شرط مشتقی مرزی به صورت زیر است:

$$B(u)=g \qquad in\ \ \Gamma_t \tag{۲}$$

همچنین شرط مرزی طبیعی به صورت زیر تعریف شده است:

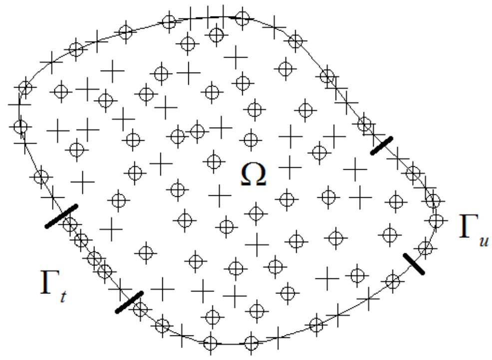
$$u=\bar{u} \qquad in\ \ \Gamma_u \tag{۳}$$

در معادلات بالا L و B عملگرهای دیفرانسیلی و f نیروهای خارجی یا منابعی هستند که بر حوزه مسأله اعمال می‌شوند.

Γ_u و Γ_t به ترتیب مرزهای مشتقی و طبیعی هستند. اساس روش حداقل مربعات به دست آوردن جواب به

1. Least Square
2. Discrete Least square
3. Adaptive Refinement
4. H-refinement
5. R-refinement
6. P-refinement
7. Estimated Error

گونه‌ای است که باقی‌مانده حاصل از تقریب کمینه شود. در روش CDLS دامنهٔ مسأله با استفاده از دو سری نقاط به نام نقاط گرهی و نقاط همپوش گسسته می‌شود. در شکل ۱ دامنهٔ مسأله با استفاده از این دو سری نقطه گسسته شده است.



شکل ۱ نحوه گسسته سازی دامنه مسأله با استفاده از نقاط گرهی و نقاط همپوش

تعداد نقاط در داخل دامنه و روی مرزها برابر با n_p است. علاوه بر نقاط گرهی، از نقاط همپوش در داخل دامنه مسأله و مرزهای آن استفاده می‌شود. در این روش در هر نقطه گرهی، باید یک نقطه همپوش نیز قرار داده شود. در یک نقطه همپوش مانند x_k، مقدار تابع مجهول u توسط رابطه زیر تقریب زده می‌شود (Gingold et al., 1977):

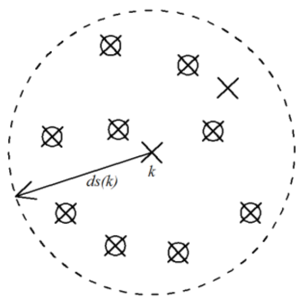
$$u(x_k)=\sum_{i=1}^{\bar{n}} N_i(x_k).u_i \qquad (۴)$$

در رابطه (۴) N_i مقدار تابع شکل iام در نقطه همپوش k است. $\bar{n}$ تعداد نقاط گرهی در دامنه kامین نقطه همپوش با مختصات x_k است. این مفهوم دامنه تاثیر در شکل ۲ نشان داده شده است (Belytschko et al., 1994). برای تنظیم دامنه برای هر یک از نقاط همپوش، شعاع d_s به گونه‌ای تعریف می‌شود که تعداد مشخصی از نقاط گرهی در این دامنهٔ تأثیر قرار بگیرند(Belytschko et al., 1994).
با جایگزینی معادله (۴) در معادله‌های (۱) تا (۳) مقدار باقی‌مانده‌ها در حوزه مسأله $R_k^{(d)}$، مرز مشتقی $R_k^{(t)}$ و مرز دریچله $R_k^{(u)}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$R_k^{(d)}=L(u_k)-f(x_k)=\sum_{i=1}^{n}L(N_i(x_k))u_i-f(x_k) \qquad (k=1...M) \qquad (۵)$$

$$R_k^{(t)}=B(u_k)-g(x_k)=\sum_{i=1}^{n}B(N_i(x_k))u_i-g(x_k) \qquad (k=1...n_t) \qquad (۶)$$

$$R_k^{(u)}=u_k-\bar{u}=\sum_{i=1}^{n}(N_i(x_k))u_i-\bar{u} \qquad (k=1...n_u) \qquad (۷)$$



شکل ۲ دامنه تاثیر kامین نقطه همپوش

در این روابط n_t تعداد نقاط همپوش قرار گرفته بر روی نقاط گرهی در مرز مشتقی و n_u تعداد نقاط همپوش واقع بر روی مرز دریچله است. M نیز تعداد کل نقاط همپوش است. مجموع مربعات باقی‌مانده‌ها به صورت زیر محاسبه می‌شود (Atluri et al., 1999):

$$J=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{M}W_k\left[R_k^{(d)}\right]^2+\alpha\sum_{k=1}^{n_t}\left[R_k^{(t)}\right]^2+\beta\sum_{k=1}^{n_u}\left[R_k^{(d)}\right]^2\right) \qquad (۸)$$

پارامترهای α و β ضرایب جریمه نام دارند و نشان دهندهٔ اهمیت بزرگی باقی‌مانده‌های مرزی در مقایسه با باقی‌مانده‌های حوزه مسأله است (Atluri et al., 1999). W مقادیر وزنی است که به هر نقطه همپوش نسبت داده می‌شود. تاکنون در پژوهش‌های قبلی این مقدار برای تمامی نقاط همپوش برابر با واحد در نظر گرفته می‌شد. در این مقاله روشی برای تعیین مقادیر وزن در هر نقطه

همپوش ارایه شده است. با کمینه کردن رابطه حاصل نسبت به پارامترهای مجهول در نقاط گرهی n_i، معادلات زیر به دست می‌آیند.

$$KU = F \qquad (۹)$$

U بردار پارامترهای مجهول در نقاط گرهی و K ماتریس سختی است که از روابط (۱۰) و (۱۱) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} K_{ij} &= \sum_{k=1}^{M} W_k L(N_i(x_k)).L(N_j(x_k)) \\ &+ \alpha \sum_{k=1}^{n_t} B(N_i(x_k)).B(N_j(x_k)) \\ &+ \beta \sum_{k=1}^{n_u} N_i(x_k).N_j(x_k) \quad i,j = 1,\dots,n_p \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_{k=1}^{M} W_k L(N_i(x_k)).f(x_k) \\ &+ \alpha \sum_{k=1}^{n_t} B(N_i(x_k)).g(x_k) + \beta \sum_{k=1}^{n_u} L(N_i(x_k))\bar{u} \\ i &= 1,\dots,n_p \end{aligned} \qquad (۱۱)$$

روابط بالا متقارن بودن ماتریس نهایی را تأیید می‌کنند. ماتریس نهایی به دلیل استفاده از تابع وزن با شعاع تأثیر محدود در محاسبه توابع شکل، نواری خواهد بود.

همان‌طور که روابط (۱۰) و (۱۱) نشان می‌دهند ماتریس ضرایب نهایی تنها به تعداد نقاط گرهی بستگی داشته و نقاط همپوش تنها با بهتر تقریب زدن باقی‌مانده‌ها، به بهبود جواب‌ها کمک می‌کنند.

۳- تظریف تطبیقی

تحلیل تطبیقی[1] یکی از مطالعات مهم در زمینه مهندسی و مکانیک محاسباتی است. هدف نهایی از این تحلیل‌ها، به دست آوردن حل عددی با دقت مطلوب و کمترین هزینهٔ محاسباتی است. هر فرایند تظریف تطبیقی دو بخش اصلی دارد. بخش اول برآورد کننده خطا و دیگری ابزاری برای فرایند تظریف می‌باشد. برآورد کننده‌های خطا ابزاری مهم در هر فرایند تظریف تطبیقی است.

در اجزای محدود از سه روش تطریف تطبیقی شامل ریزتر کرن یا درشت‌تر کردن شبکه‌ها، جابجا کردن شبکه‌ها و تغییر درجه چند جمله‌ای درون‌یاب استفاده می‌شود. این استراتژی‌ها می‌توانند به تنهایی یا ترکیبی استفاده شوند. در فرایند ریزتر کردن شبکه‌ها، شبکه‌بندی ابتدایی باقی می‌ماند وشبکه‌های جدیدی اضافه خواهند شد. در فرایند حرکت‌دهی شبکهها، تعداد کل نقاط، ثابت باقی می‌ماند ولی محل نقاط طبق خطاهای به دست آمده تغییر می‌کند. در فرایند تغییر درجه چند جمله‌ای درون‌یاب، شبکه‌ها تغییر نمی‌کنند، اما درجه چند جمله‌ای درون‌یاب در سرتاسر دامنه به صورت محلی تغییر می‌کند. مناسبترین روش تظریف به دلیل اینکه تعداد نقاط ثابت می ماند، حرکت‌دهی شبکه است. ولی در اجزای محدود به دلیل اینکه المان‌ها بعد از اینکه طبق خطاهای محاسبه شده حرکت داده می‌شوند، بعضی ازآنها دچار بد شکلی شده و باعث خراب شدن کل فرایند حل می‌شوند. به همین دلیل در اجزای محدود محبوب‌ترین روش برای تظریف تطبیقی، استفاده از اضافه کردن شبکه‌های جدید است که این امر مستلزم استفاده از هزینه بالاتر است. از آنجا که در روش‌های بدون شبکه، جابجایی نقاط به راحتی امکان‌پذیر می‌باشد، جابجایی تطبیقی نقاط، جزو روش‌های متداول در فرایندهای تطبیقی در روش‌های بدون شبکه است. به جرأت می‌توان گفت مؤثرترین روش بهبود جواب‌ها، استفاده از روش جابجایی تطبیقی نقاط می‌باشد، ولی با وجود تمام مزایای این روش، همچنان محدودیت‌هایی برای آن وجود دارد. به این ترتیب که نمی‌توان نقاط را از حدی بیشتر در منطقه‌ای متمرکز یا پراکنده کرد. در این مقاله روشی برای بهبود جواب‌ها ارایه شده که بدون جابجا کردن نقاط به بهبود جواب‌های روش کمک می‌کند. بنابراین پس از اعمال فرایند جابجایی تطبیقی نقاط، می‌توان با استفاده از این روش به بهبود هر چه بیشتر جواب‌ها پرداخت.

1. Adaptive analysis

۴- وزن‌دهی نقاط در مسائل دوبعدی در روش بدون شبکه CDLS

در فرایند پیشنهادی، ابتدا وزن تمامی نقاط در تقریب مقدار تابع، یکسان و برابر با یک قرار داده شده و مسأله حل می‌شود. سپس مقدار باقی‌مانده‌ها در نقاط همپوش با استفاده از روابط (۵) تا (۷) محاسبه شده و به عنوان معیاری برای خطا در این نقاط شمرده می‌شود. واضح است که هرچه مقدار باقی‌مانده‌ها در نقاط همپوش کمتر باشد، مقدار خطا نیز کمتر خواهد بود.

روش وزن‌دهی پیشنهادی، بر اساس اطلاعات حاصل از برآورد خطاها در نقاط همپوش انجام می‌شود. از آنجا که خطا در بعضی از نقاط همپوش، مقداری مثبت و در بعضی دیگر، مقدار منفی دارد، قدرمطلق خطای بدست آمده در مرحله قبل محاسبه می‌شود. به دلیل اختلاف فاحش بین مقادیر خطا در نقاط همپوش، از لگاریتم مقادیر خطا استفاده می‌شود. با تقسیم این مقادیر بر مقدار بیشینهٔ آنها، مقدار نرمالایز شده آنها به دست آورده خواهد شد. مقدار مطلق به دست آمده از اعداد حاصل، وزن های جدید را بدست می‌آورد و برای وزن‌دهی مجدد نقاط همپوش از این مقادیر استفاده خواهد شد. بنابراین وزن پیشنهادی عبارت است از:

$$W_k = \left| \log \frac{|error(k)|}{\max |error(k)|} \right| \qquad (۱۲)$$

که در آن W_k وزن جدید منصوب به نقطهٔ همپوش kام و error(k) مقدار خطای برآورد شده برای نقطهٔ kام می‌باشد.

حال برای تقریب تابع از این وزن های جدید استفاده می‌شود. در ادامه سه مسألهٔ نمونه برای بررسی این روش آورده شده است.

۵- مثال‌های عددی

در تمامی مسائل ارایه شده در این بخش تعداد نقاط داخل هر زیر حوزه، حداقل تعداد مورد نیاز برای اطمینان داشتن از موجود بودن توابع شکل حداقل مربعات متحرک انتخاب می‌شود. معیار همگرایی در این مسأله کمتر شدن حداکثر اختلاف بین جواب‌ها در دو گام زمانی متوالی از عدد مفروض 10^{-5} می‌باشد. برای حل مسأله از گام زمانی برابر با ۰/۱ استفاده شده است. برای گسسته‌سازی حوزهٔ مسأله اول و دوم از ۷۰۹ نقطهٔ گرهی و ۲۷۵۳ نقطه همپوش که به صورت غیریکنواخت در دامنه توزیع شده‌اند، استفاده شده است. تعدد نقاط گرهی و همپوش در مسأله سوم به ترتیب برابر با ۱۴۰۹ و ۵۵۰۵ است. تعداد تک جملات موجود در چند جمله ای درون یاب مورد استفاده برای تولید توابع شکل، ۶ می‌باشد.

معادله کلی حاکم بر تمامی مسائل به شکل زیر است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad \text{on } \Omega \qquad (۱۳)$$

۵-۱- مسأله اول: معادله دوبعدی غیرخطی برگر

با جایگذاری $A = u\,,\,B = 1$ در معادله (۱۳) معادله حاکم بر مسأله مطابق رابطه (۱۴) به دست می‌آید که در یک حوزه مربعی تعریف شد است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (۱۴)$$

$$0 \le x \le 1 \quad , \quad 0 \le y \le 1$$

مسأله دارای سه مرز دریچله به صورت زیر است:

$$u(0,y) = 1 \qquad \text{on} \quad (0 \le y \le 1)$$

$$u(1,y) = -1 \qquad \text{on} \quad (0 \le y \le 1)$$

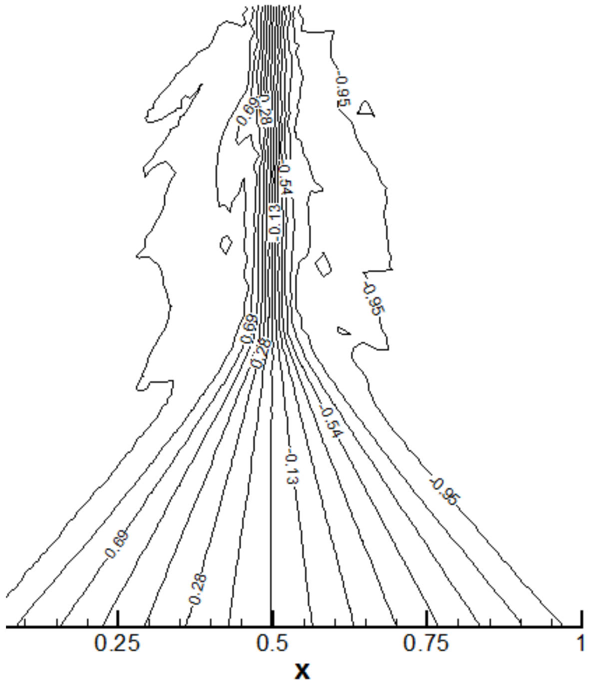
$$u(x,0) = 1 - 2x \qquad \text{on} \quad (0 \le x \le 1)$$

جواب دقیق مسأله یک ناپیوستگی دارد که دقیقاً در وسط حوزه قرار خواهد گرفت. مسأله تا رسیدن به حالت دائمی حل می‌شود. جواب به دست آمده از روش موجود CDLS و بدون استفاده از تابع وزن، در شکل ۳ آورده شده است. با محاسبه مقدار باقی‌مانده، مقدار خطا در تمامی نقاط همپوش بدست می‌آید. نمودار رسم شده در شکل ۴ بیان‌گر خطا در نقاط همپوش است. با استفاده از خطای

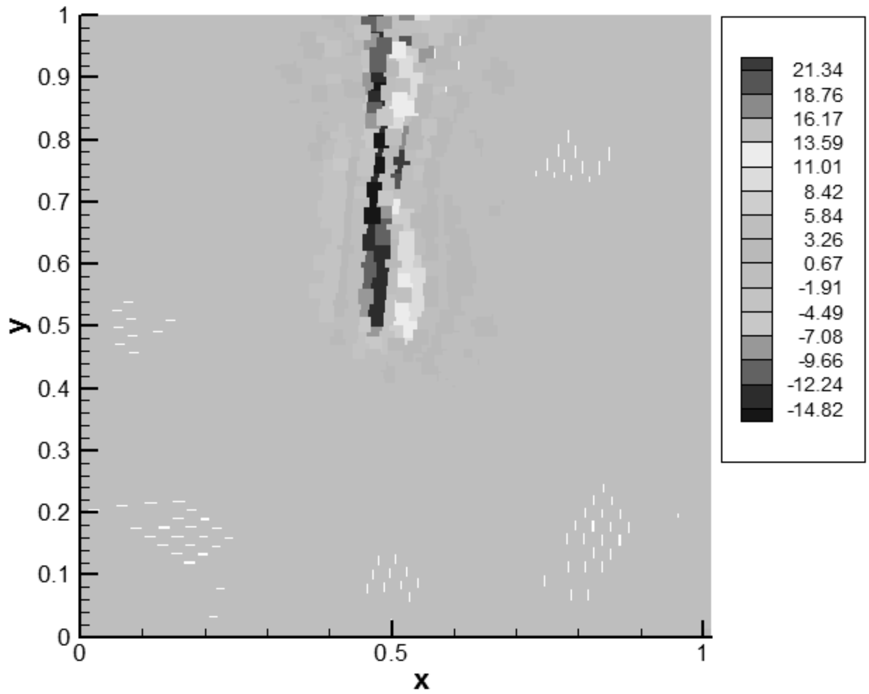
برآورد شده در نقاط و فرمول پیشنهادی در بخش قبل، وزن‌های جدیدی به نقاط همپوش اختصاص داده می‌شود. حال با استفاده از این وزن‌های جدید اختصاص داده شده به نقاط، به حل مجدد مسأله پرداخته میشود. جواب مسأله این بار در شکل ۵ آورده شده است. خطای برآورد شده پس از اعمال تابع وزن در شکل ۶ آورده شده است. با مقایسه شکل‌های ۳ و ۵ می‌توان به بهبود جواب‌ها و بهتر مدل شدن شوک پی برد.

۵-۲- مسأله دوم: معادله انتقال در میدانی با سرعت ثابت

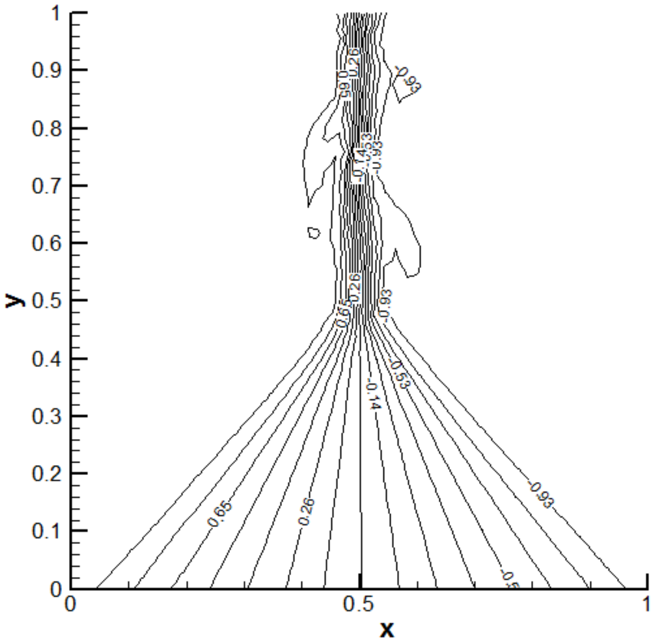
با جایگذاری $A=u\,,\,B=v$ در معادله (۱۳) معادله حاکم بر مسأله مطابق رابطه (۱۵) به دست خواهد آمد که در یک حوزه مربعی تعریف شد است.



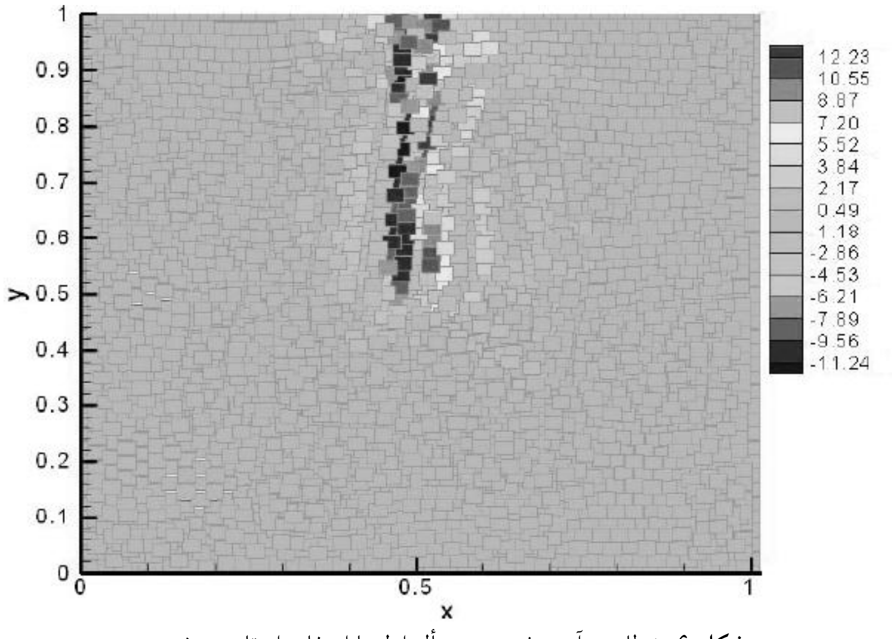
شکل ۳ حل مسأله اول با استفاده از روش CDLS و بدون استفاده از تابع وزن



شکل ۴ خطای برآورد شده در مسأله اول بدون استفاده از تابع وزن



شکل ۵ جواب مسأله اول با استفاده از تابع وزن



شکل ۶ خطای برآورد شده در مسأله اول با استفاده از تابع وزن

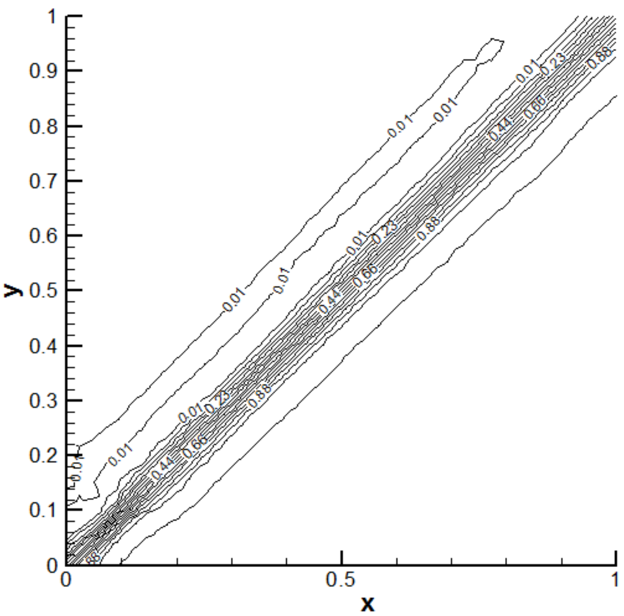
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=0 \qquad 0\le x\le 1 \quad 0\le y\le 1 \tag{۱۵}$$

شرایط مرزی طبیعی مسأله به صورت زیر است:

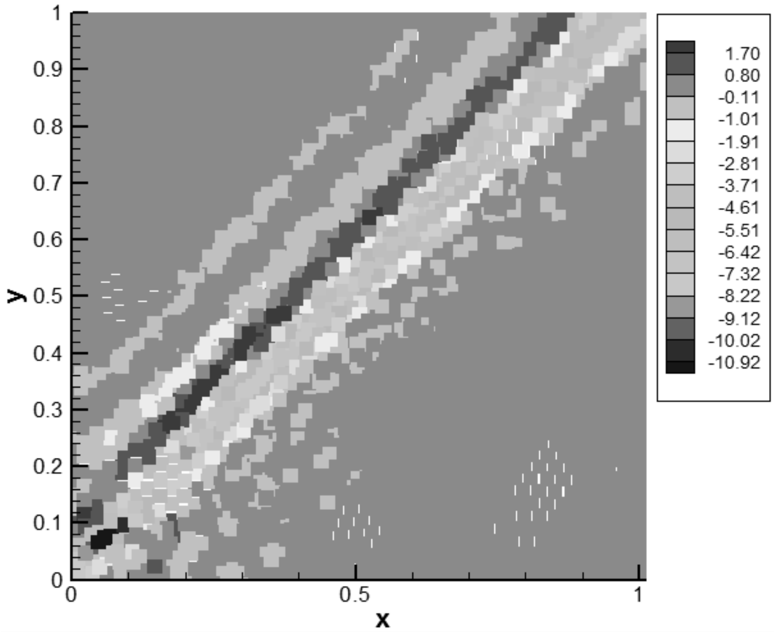
$$u=0 \quad \text{on} \quad x=0,\ \ 0\le y\le 1$$
$$u=1 \quad \text{on} \quad y=0,\ \ 0\le x\le 1$$

جواب دقیق مسأله شامل یک شوک است که به صورت قطری در داخل دامنه مربعی قرار گرفته است که دقیقاً در وسط حوزه قرار خواهد گرفت. جواب به دست آمده از روش موجود CDLS و بدون استفاده از تابع وزن، در شکل ۷ آورده شده است.

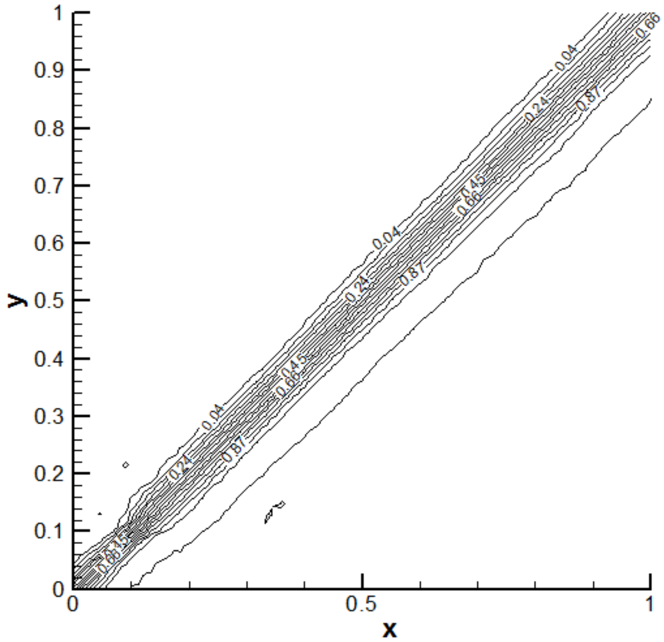
خطای برآورد شده در نقاط مختلف محاسبه شده و در شکل ۸ ارایه شده است. با استفاده از این مقادیر خطا و روش پیشنهادی، وزن‌های جدید به نقاط اختصاص داده می‌شود. با استفاده از این وزن‌های جدید، جواب مسأله به صورت شکل ۹ بدست می‌آید. با مقایسۀ شکل‌های ۷ و ۹ می‌توان به بهتر مدل شدن شوک در اثر اعمال تابع وزن پی برد. خطای به‌دست آمده از حل مجدد مسأله با استفاده از وزن های اختصاص داده شده به صورت نمودار (۱۰) می‌باشد.



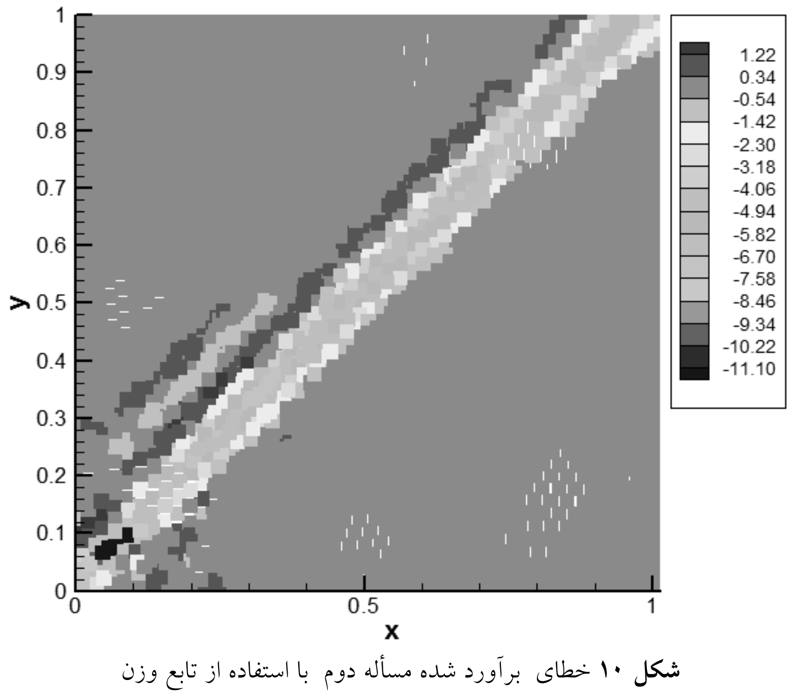
شکل ۷ جواب مسأله اول بدون استفاده از تابع وزن



شکل ۸ خطای برآورد شده در مسأله دوم بدون استفاده از تابع وزن



شکل ۹ جواب مسأله دوم با استفاده از تابع وزن



شکل ۱۰ خطای برآورد شده مسأله دوم با استفاده از تابع وزن

۵-۳- مسأله سوم: معادله انتقال در میدانی با سرعت متغیر

با جایگذاری $A = y\ ,\ B = -x$ در معادله (۱۳) معادله حاکم بر مسأله مطابق رابطه (۱۶) به دست خواهد آمد که در یک حوزه مربعی تعریف شد است.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + y\,\frac{\partial u}{\partial x} - x\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (۱۶)$$

$$-1 \le x \le 1, \qquad 0 \le y \le 1$$

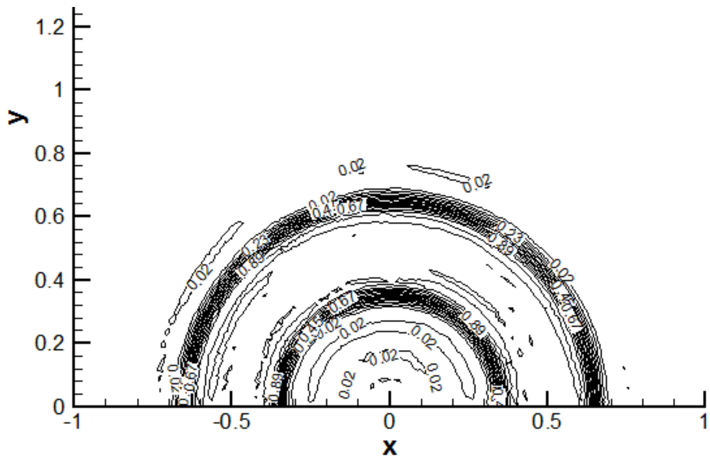
شرایط مرزی مسأله به صورت زیر است:

$$
\begin{array}{lll}
u(-1,y)=1 & \text{on} & 0\le y\le 1\\
u(x,1)=0 & \text{on} & 0.5\le x\le 1\\
u(x,0)=0 & \text{on} & 0.35\le x\le 1\\
u(x,0)=0 & \text{on} & -1\le x\le -0.65\\
u(x,0)=1 & \text{on} & -1\le x\le -0.65
\end{array}
$$

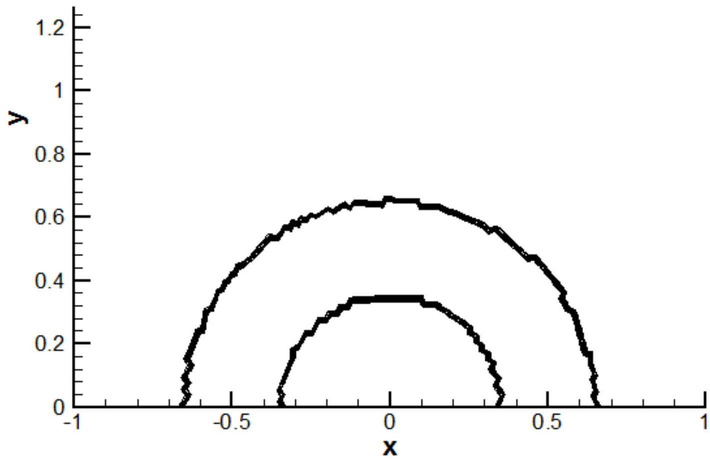
جواب تحلیلی این مسأله به صورت زیر است:

$$
\begin{cases}
u(x,y)=1 & 0.35\le (x^2+y^2)^{0.5}\le 0.65\\
u(x,y)=0 & \text{otherwise}
\end{cases}
\qquad (۱۷)
$$

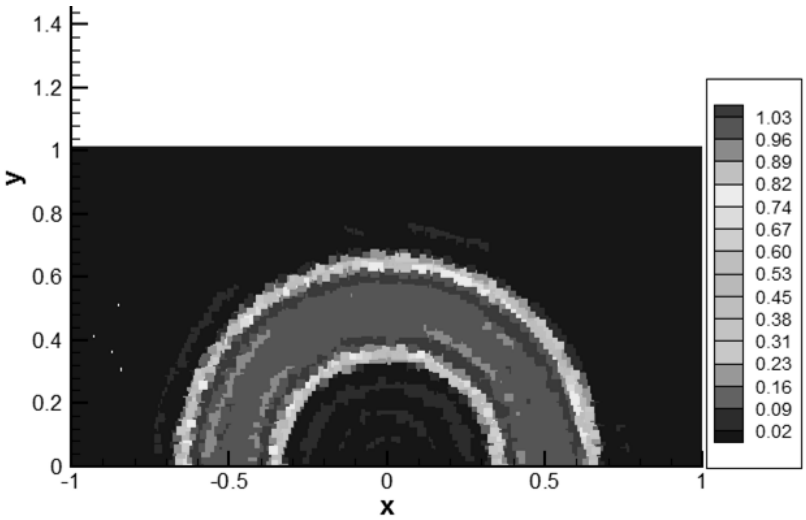
مسأله تا رسیدن به حالت دائمی حل می‌شود. جواب به دست آمده از روش موجود CDLS و بدون استفاده از تابع وزن، در شکل ۱۱ آورده شده است. از آنجا که جواب دقیق مسأله در دسترس است، می‌توان خطای واقعی را محاسبه کرد. جواب دقیق مسأله در شکل ۱۲ و مقدار خطای واقعی در شکل ۱۳ آورده شده است. خطای برآورد شده در نقاط همپوش محاسبه شده و در شکل ۱۴ نشان داده شده است. با استفاده از این مقادیر خطا و روش پیشنهادی، وزن‌های جدید به نقاط اختصاص داده می‌شود. جواب مسأله به صورت شکل ۱۵ بدست می‌آید. خطای به دست آمده از حل جدید مسأله در شکل ۱۶ آمده است. در این مسأله به منظور ارزیابی کمّی تأثیر وزن‌دهی، جدول ۱ تهیه شده است. همان‌طور که این جدول نشان می‌دهد، استفاده از روش وزن‌دهی تطبیقی باعث بهبود نتایج روش CDLS خواهد شد.



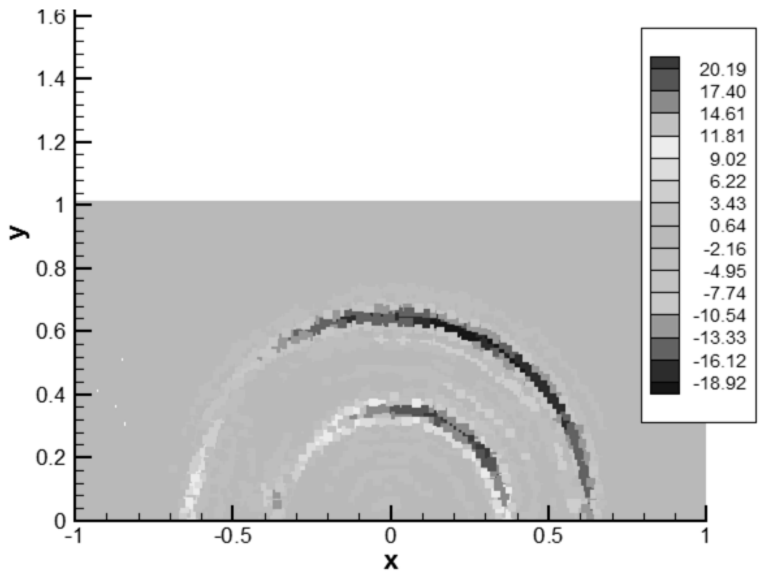
شکل ۱۱ حل مسأله سوم بدون استفاده از تابع وزن



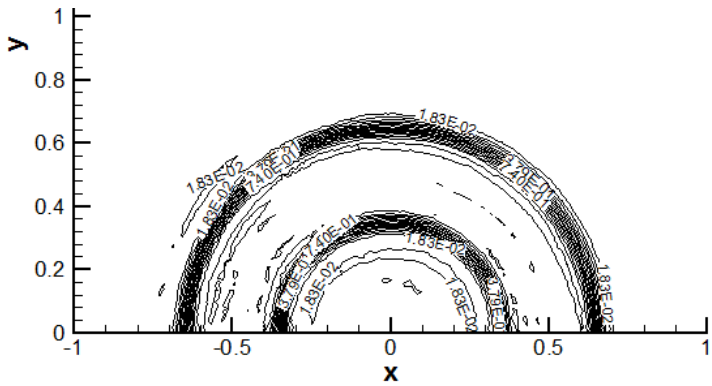
شکل ۱۲ جواب دقیق مسأله سوم



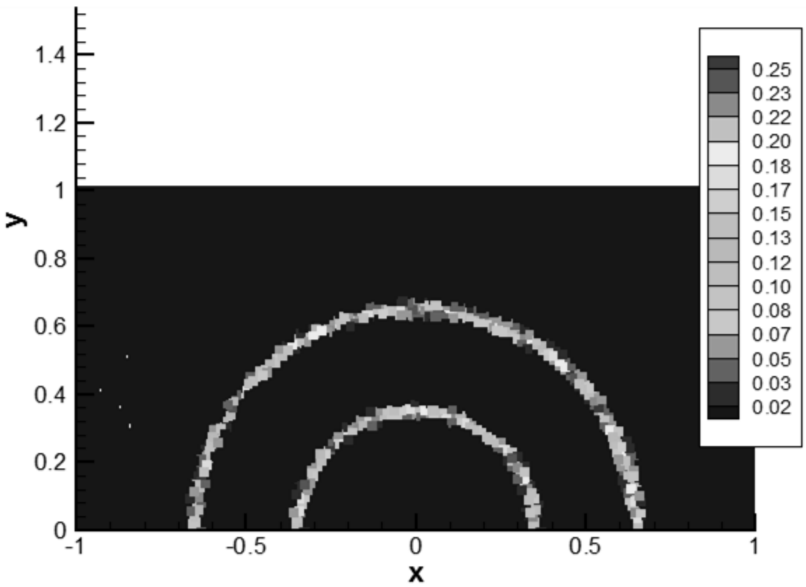
شکل ۱۳ خطای واقعی مسأله سوم قبل از استفاده از تابع وزن



شکل ۱۴ خطای برآورد شده مسأله سوم بدون استفاده از تابع وزن



شکل ۱۵ جواب مسأله سوم با استفاده از تابع وزن



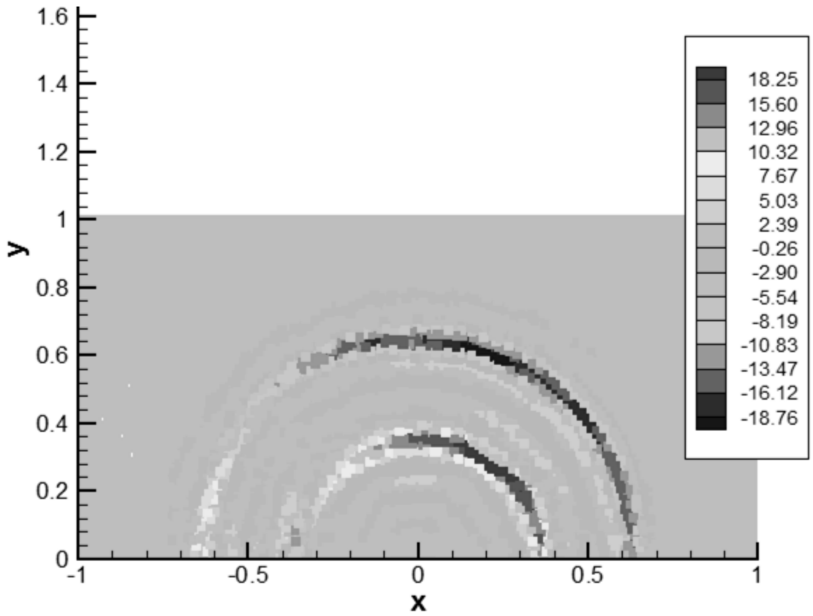
شکل ۱۶ خطای واقعی مسأله سوم پس از استفاده از تابع وزن

جدول ۱ اثر تابع وزن بر مقدار خطای واقعی در مسأله سوم

	کمترین اندازه خطا	**بیشترین اندازه خطا**	**مجموع اندازه خطا**
بدون استفاده از تابع وزن	$۲/۵\times۱۰^{-۲۵}$	۱/۰۵	۴۴/۹
با استفاده از تابع وزن	$۴/۹\times۱۰^{-۲۸}$	۰/۲۶	۴۴/۵

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش کم هزینه به نام وزن‌دهی تطبیقی در روش حداقل مربعات گسسته همپوش برای بهبود نتایج حاصل ارائه شد. در این روش از باقی‌مانده‌ها به‌عنوان معیار براورد کنندهٔ خطا استفاده شده است. وزن‌دهی نقاط در این روش با استفاده از مقادیر براورد شده خطاها در هر نقطه همپوش صورت می‌گیرد. با این وزن‌دهی، در مراحل حل به روش حداقل مربعات، تمرکز بیشتری روی مناطقی با خطای بالا شده و بدین صورت می‌توان انتظار داشت که جواب‌ها در این نقاط با کیفیت بهتری بدست آیند. برای بررسی روش ارائه شده، سه مسأله نمونه حل شده است. در تمامی این مسائل، جواب با یک ناپیوستگی همراه بوده است. در مسأله اول مقدار بیشینهٔ خطای براورد شده با حل به روش معمول CDLS برابر با ۲۱/۳۴ بوده که پس از حل با روش ارائه شده، این مقدار خطا به ۱۲/۲۳ کاهش پیدا کرده است. در همین مسأله با مقایسهٔ بین خطوط همتراز رسم شده برای جواب‌ها نیز می‌توان به بهتر شده کیفیت مدل شدن شوک پی برد. در مسأله دوم نیز با مقایسه شکلهای ۷ و ۹ کارایی روش ارائه شده در حذف برخی از نوسان‌های نزدیک ناپیوستگی، مشخص می‌شود. در مسأله سوم علاوه بر نشان دادن مزیت روش ارائه شده، به بررسی عملکرد براورد کننده خطا نیز پرداخته شده است. همان‌طور که شکلهای ۱۶ و ۱۷ نشان می‌دهند، براورد کنندهٔ خطا به خوبی رفتار خطای واقعی را نشان داده است. به این ترتیب نتایج حاصله بیان‌گر بهبود نتایج و بهتر تقریب زده شدن ناپیوستگی‌ها با استفاده از ابزار پیشنهادی است. با این حال با توجه به اینکه جابجایی نقاط مؤثرترین روش برای بهبود جواب‌هاست، پیشنهاد می‌شود پس از اعمال فرایند جابجایی تطبیقی نقاط، با استفاده از روش ارائه شده به بهبود هر چه بیشتر جواب‌ها پرداخته شود.



شکل ۱۷ خطای برآورد شده مسأله سوم پس از استفاده از تابع وزن

۷- فهرست علایم

عملگر دیفرانسیلی B

نیرو یا منابع اعمال شده بر حوزه مسأله f

شعاع دامنه تاثیر یک نقطه همپوش d_s

مجموع مربعات باقی‌مانده‌ها در حوزه مسأله و مرزها J

ماتریس سختی K

عملگر دیفرانسیلی L

تعداد کل نقاط همپوش M

مقدار تابع شکل iام در kامین نقطه همپوش N_i

تعداد نقاط گرهی واقع در حوزه مسأله و روی مرزها n_p

تعداد کل نقاط همپوش قرار گرفته بر روی نقاط گرهی در مرز مشتقی n_t

تعداد کل نقاط همپوش قرار گرفته بر روی نقاط گرهی در مرز دریچله n_u

تعداد نقاط گرهی در دامنه kامین نقطه همپوش $\overline{n}$

مقدار باقی‌مانده در حوزه مسأله $R_k^{(d)}$

مقدار باقی‌مانده در مرز مشتقی $R_k^{(t)}$

مقدار باقی‌مانده در مرز دریچله $R_k^{(u)}$

بردار پامترهای مجهول در نقاط گرهی U

تابع تقریب زننده مقدار تابع مجهول u در kامین نقطه همپوش $u(x_k)$

مقادیر وزنی اختصاص داده شده به هر نقطه گرهی همپو W

وزن جدید منصوب به نقطه همپوش kام W_k

نقطه همپوش واقع در داخل حوزه مسأله و یا روی مر x_k

ضریب پنالتی α

ضریب پنالتی β

مرز مشتقی Γ_t

مرز طبیعی Γ_u

حوزه مسأله Ω

مقدار خطای برآورد شده در kامین نقطه همپوش error(k)

۸- منابع

Afshar M.H. and Lashckarbolok M. (2008). "Collocated discrete least-squares (CDLS) meshless method: Error estimate and adaptive refinement", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 56(10), pp. 1909-1928.

Afshar M.H. and Arzani H. (2004). "Solving Poisson`s equations by the Discrete Least Square meshless method", WIT Transactions on Modelling and Simulation, Vol. 42, pp. 23-32.

Atluri S.N., Kim H.G. and Cho J.Y. (1999). "A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) and local boundary integral equation (LBIE) methods", Comput. Mech, Vol. 24, pp. 348-372.

Babuska. I. and Rheinboldt W.C. (1980). "Reliable error estimation and mesh adaptation for the finite element method", In Computational Methods in Nonlinear Mechanics, (ed. J.T. Oden), pp. 67-108.

Belytschko T., Lu Y.Y. and Gu L. (1994). "Element-free Galerkin methods", Int. J. Numer. Meth. Eng, Vol. 37, pp. 229-256.

Duarte A. and Oden J.T. (1996). "An H-P adaptive method using clouds", TICAM report, pp. 96-97.

Firoozjaee A.R. and Afshar M.H. (2010). "Steady-state solution of incompressible Navier–Stokes equations using discrete least-squares meshless method", International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol. 67 (3), pp. 369-382.

Firoozjaee, A.R. and Afshar M.H. (2010). "Adaptive simulation of two dimensional hyperbolic problems by collocated discrete least squares meshless method", Computers & Fluids, pp. 2030-2039.

Gingold R.A. and Monaghan J.J. (1977). "Smooth Particle Hydrodynamics: theory and application to non spherical stars", Man. Not. Roy. Astron, Soc. Vol. 181, pp. 375-389.

Liu WK, Jun S. and Zhang Y. (1995). "Reproducing kernel particle methods", Int. J. Numer Meth. Eng.,Vol. 20, pp. 1081–1106.

Nayroles B. and Touzot. G., Villon. P. (1992). "Generalizing the finite element method diffuse approximation and diffuse element", Comput. Mech., Vol. 10, pp. 307-318.

Shobeyri. G. and Afshar M.H. (2010). "Efficient simulation of free surface flows with discrete least-squares meshless method using a priori error estimator", International Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol. 24(9). pp. 349-367.