

# Two-Dimensional Modeling of Fractional Advection-Dispersion Equation using Meshfree Local Petrov-Galerkin Numerical Method (Case Study: Athabasca River)

Zakie Gholami<sup>1</sup>, Mehdi Yasi<sup>2\*</sup>, Arezoo NaziGhameshlou<sup>3</sup>, Mehdi Mazaheri<sup>4</sup>

1- PhD Graduate of Hydraulic Structures, Department of Irrigation and Reclamation Engineering, College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran, Karaj, Iran.

2- Associate Professor, Department of Irrigation and Reclamation Engineering, College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran, Karaj, Iran.

3- Associate Professor, Department of Irrigation and Reclamation Engineering, College of Agriculture and Natural Resources, University of Tehran, Karaj, Iran.

4- Associate Professor, Department of Water Engineering and Management, Faculty of Agriculture, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran.

\* [m.yasi@ut.ac.ir](mailto:m.yasi@ut.ac.ir)

Received: 4 July 2022, Accepted: 11 September 2022  J. Hydraul. Homepage: [www.jhyd.iha.ir](http://www.jhyd.iha.ir)

## Abstract

**Introduction:** The study of surface water quality has special importance. Unfortunately, sometimes sewage and industrial effluents are discharged into the river. If the mechanism of transport and diffusion of pollution in rivers with different geometry is known, it can be planned to reduce the effects of pollution on the general health of human society by raising the issue of water mixing and strengthening the self-purification of rivers. The governing equation over the pollution transport phenomenon in rivers is advection-dispersion equation. This equation is classic and does not have the necessary accuracy in predicting the amount of pollutant concentration in the river; Therefore, this equation must be changed in such a way to have the least error in the simulation. The fractional calculus method is used to accurately study the transport of pollutants in the stream. To model the pollutant transport in the river, differential equation must be solved. Meshless method is one of the newest numerical methods in recent years that was able to correct some of the disadvantages of mesh-based methods. Studies show that the most studies have focused on solute transport in steady-state flow regimes and regular cross-sections. This study seeks to provide a comprehensive model for simulating the phenomenon of pollutant transport in rivers with steady and non-uniform flow to eliminate the shortcomings of common models.

**Methodology:** In order to discretize the fractional advection-dispersion equation, Meshfree Local Petrov-Galerkin method is used. On the present research, the used shape function and weight function respectively are approximation function of Moving Least Squares and the quadratic spline function. To generalize the correct order derivative to the fractional order derivative, there are three methods of the Granwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo fractional derivative method. In the research, the Caputo fractional derivative method was used. Finally, the most discrete form of the fractional advection-dispersion equation was created and the boundary conditions (Dirichlet and Neumann boundary condition) were applied. Then, the validity of the model was checked with observational data of the Athabasca River and the results of research presented by Maleki (output of the

Mike21 model). The Athabasca River is one of the most important rivers in Canada, located in the Hinton area of Canada near Edmonton. The average width of this river is 150 meters and its depth varies from 1 meter to more than 3 meters in different parts of it. In this research, 5 km at the beginning of the interval is modeled. The tracer (Rhodamine) was injected continuously with a constant flow for 5.25 hours at the upstream and near the right bank of the river. Before injecting the tracer into the river, its concentration in the river was measured, which is equal to  $5 \times 10^{-8}$  g/L.

**Results and discussion:** In the validation, the parameters of dispersion coefficients, fractional order derivatives and skewness coefficients were optimized with increasing  $R^2$ , decreasing MSE and MAE between observational and computational data. The results showed that due to the location of the source of pollutants on the right bank, the movement of pollutants is more in the right areas of the river that gradually moves to the left due to transverse dispersion, which is well illustrated by the simulation model. Normalized dimensionless tracer concentration versus  $q/Q$  were plotted for observational, computational, and Mike21 data at cross sections of 2.425, 3.725, and 4.725 km. Comparison of the results of the presented numerical method with the output of Mike21 software showed that the value of  $R^2$  in the Meshfree Local Petrov-Galerkin method compared to the Mike model for cross sections of 2.425, 3.725 and 4.725 km increases by an average of 11%. The high value of  $R^2$  and the low values of MSE and MAE can indicate that the numerical solution of the fractional advection-dispersion equation with Meshfree Local Petrov-Galerkin method compared to Mike21 have a more accurate answer, due to the fractional order derivatives and skewness coefficients. The application of fractional order derivatives increased the residence time in the storage and hyporheic zones, thus reducing the error between the simulated data and the field data. The results of this study indicate that the fractional advection-dispersion equation provides a much more accurate description and outputs closer to the measured data than in the classical (correct order derivative) case due to its high flexibility.

**Conclusion:** In this study, the parameters of dispersion coefficients, fractional order derivatives and skewness coefficients were optimized in the longitudinal and transverse directions. The values of dispersion coefficient in the longitudinal and transverse directions were 68 and  $2.5 \text{ m}^2/\text{s}$ , respectively. The output of the proposed model was compared with the observational data of the Athabasca River and the Mike21 model for three cross sections. The results showed that the amount of  $R^2$  in the Meshless Local Petrovo-Galerkin method increased by an average of 11% compared to the Mike model.

**Keywords:** Pollutant Transport, Meshfree Local Petrov-Galerkin Method, Spline Function, Caputo Method.



© 2022 Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.  
This is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license)

(<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

# مدل سازی دوبعدی معادله جابه جایی-پراکندگی کسری به روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین (مطالعه موردی: رودخانه آتاباسکا)

زکيه غلامی<sup>۱</sup>، مهدی یاسی<sup>۲\*</sup>، آرزو نازی قمشلو<sup>۳</sup>، مهدی مظاهری<sup>۴</sup>

- ۱- دانش آموخته دکتری سازه های آبی، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده گان کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.
- ۲- دانشیار، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده گان کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.
- ۳- دانشیار، گروه مهندسی آبیاری و آبادانی، دانشکده گان کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.
- ۴- دانشیار، گروه مهندسی و مدیریت آب، دانشکده کشاورزی، دانشگاه تربیت مدرس، تهران، ایران.

\* m.yasi@ut.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۱/۰۴/۱۳، پذیرش: ۱۴۰۱/۰۶/۲۰، وبگاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

**چکیده:** در این پژوهش به منظور مدل سازی انتقال آلاینده در رودخانه های دو بعدی از روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین استفاده شده است. هدف از انجام این تحقیق ارائه یک مدل جامع با استفاده از الگوریتم های دقیق و کارآمد برای حل معادله جابه جایی-پراکندگی می باشد. برای دستیابی به این هدف، حل دو بعدی معادله جابه جایی-پراکندگی کسری مکانی برای آبراهه های با هندسه و ضریب های هیدرولیکی متغیر (جریان پایدار و غیریکنواخت) ارائه می شود. مشتقات مرتبه کسری به دلیل ماهیت غیرمحلی قادر به تولید منحنی هایی با دنباله های بلند و چولگی هستند که در این پژوهش برای حل این جمله از روش کاپوتو استفاده شده است. به منظور حل معادله جابه جایی-پراکندگی کسری با روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین، تابع تقریب حداقل مربعات متحرک و تابع وزن اسپیلاین درجه چهار به کار گرفته شد. در نهایت اعتبار مدل با داده های مشاهده شده رودخانه آتاباسکا و نتایج تحقیقات ارائه شده توسط ملکی (خروجی مدل مایک ۲۱) برای مقطع های عرضی در کیلومترهای ۲/۴۲۵، ۳/۷۲۵ و ۴/۷۲۵ بررسی شد. در حالت اعتبارسنجی فراسنجه (پارامتر) ضریب های پراکندگی، مشتقات مرتبه کسری و ضریب های چولگی با افزایش R2، کاهش MSE و MAE بین داده های مشاهده شده و محاسبه شده بهینه شدند. میزان ضریب پراکندگی به ترتیب در راستای طول و عرض برابر ۶۸ و ۲/۵ مترمربع بر ثانیه به دست آمد. بررسی ها نشان داد میزان R2 در روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین نسبت به مدل مایک برای سه مقطع عرضی یادشده به طور میانگین ۱۱ درصد افزایش یافته است. بر مبنای نتایج این بررسی، معادله جابه جایی-پراکندگی کسری به دلیل انعطاف پذیری بالا، توصیفی به مراتب دقیق تر و خروجی های نزدیک تر به داده های اندازه گیری شده نسبت به حالت کلاسیک (مشتق مرتبه صحیح) ارائه می کند.

**کلیدواژگان:** انتقال آلاینده، روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین، تابع اسپیلاین، روش کاپوتو.

## ۱- مقدمه

پخش آلودگی در رودخانه های با هندسه مختلف مشخص باشد، می توان برای کاهش اثرگذاری های آلودگی بر سلامت عموم جامعه انسان ها با طرح مسئله اختلاط آبها و تقویت قدرت خودپالایندگی رودخانه ها برنامه ریزی نمود (Riahi-Madvar et al., 2009). هنگامی که یک منبع آلودگی به درون آب رها می شود، به علت حرکت مولکولی، تلاطم و غیریکنواختی سرعت در سطح مقطع جریان، به

بررسی و ارزیابی کیفیت آب های سطحی دارای اهمیت ویژه ای است. این موضوع با توجه به اینکه آب رودخانه ها از جمله منابع های عمده تأمین آب آشامیدنی انسان ها، آب لازم برای کشاورزی و صنایع است، نیاز به توجه بیشتری دارد. متأسفانه گاهی فاضلاب و پساب های صنعتی در رودخانه تخلیه می شوند. اگر سازوکار (مکانیسم) انتقال و

واقعی یک سامانه در طبیعت و ورود فراسنجه‌های بسیار زیادی که در حل مسئله دخیل هستند، استفاده از روش‌های عددی اجتناب‌ناپذیر است. روش‌های بدون شبکه از نوین‌ترین روش‌های عددی در سال‌های اخیر هستند که توانسته‌اند پاره‌ای از کاستی‌های روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی را اصلاح کرده و مسئله‌هایی را حل کنند که تحلیل آن‌ها با روش‌های مبتنی بر شبکه‌بندی یا به‌طور کلی امکان‌پذیر نبوده، و یا اینکه نیاز به صرف هزینه و زمان زیادی دارند.

(Mohtashami (2017) به مدل سازی جریان آب زیرزمینی در آبخوان آزاد دشت بیرجند در دو حالت ماندگار و غیرماندگار با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین<sup>۴</sup> پرداختند. ایشان سطح آب زیرزمینی مدل سازی شده به روش بدون شبکه را با سطح آب زیرزمینی مشاهده شده و روش تفاضل محدود مقایسه کردند. نتایج تحقیق ایشان گویای کارکرد و دقت قابل قبول این روش است. (Tayebi et al. (2017) یک روش بدون شبکه برای حل معادله جابه‌جایی-پخشیدگی با مشتقات کسری زمانی با مرتبه متغیر دوبعدی ارائه دادند. برای حل معادله یادشده در دامنه‌های زمان از روش تفاضل محدود با طرح وزن دهی  $\theta$ ، و در دامنه مکان تقریب MLS برای به‌دست آوردن راه‌حل‌های نیمه‌گسسته مناسب استفاده شد. روش پیشنهادشده در حل سه مثال متفاوت شامل دو مسئله استاندارد و یک مثال کاربردی از توزیع آلودگی در هواسپهر (اتمسفیر) تأیید شده است. در همه این موارد، نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که روش پیشنهادشده خیلی دقیق و قوی است. (Lian et al. (2017) به حل عددی معادله یک‌بعدی جابه‌جایی-پخشیدگی کسری مکانی به روش بازتولید ذرات کرنل پرداختند. ایشان برای انتگرال گیری گوسی عبارت دارای مشتق کسری از روش مشتق کسری کاپوتو استفاده کردند و در نهایت به کمک چند مثال یک‌بعدی صحت مدل ارائه‌شده را بررسی کردند که نتایج گویای دقت و کارکرد بالای مدل است. (Deymevar (2018) به حل عددی معادله‌های آب‌های

سرعت در آب پخش و همراه با جریان آب جابه‌جا می‌شود. سازوکار پخش و حرکت آلاینده‌ها در آب بخش مهمی از دانش محیط زیست است که تاکنون پژوهش‌های بسیاری در موضوع‌های مربوط به آن صورت گرفته است (Mahmoodian Shooshtari, 2009). معادله حاکم بر پدیده‌ی انتقال آلودگی در رودخانه‌ها، معادله جابه‌جایی-پراکندگی است که از نوع معادله‌های دیفرانسیل جزئی سهموی است (Chapra, 1997). معادله یادشده که از نوع کلاسیک می‌باشد دقت لازم را در پیش‌بینی میزان غلظت آلاینده در رودخانه ندارد؛ لذا بایستی این معادله به‌گونه‌ای تغییر داده شود که کمترین خطا را در شبیه‌سازی داشته باشد. برای بررسی دقیق انتقال آلاینده در آبراهه از روش حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری<sup>۱</sup> که دارای مقبولیت بیشتری است، استفاده می‌شود. تفاوت بین مشتق مرتبه صحیح مثبت و مشتق مرتبه کسری، در رفتار محلی یا غیرمحلی آن‌هاست. در مشتق مرتبه صحیح مثبت، شیب تابع در یک بازه بسیار کوچک تعریف می‌شود (Blank, 1996). مشتق مرتبه کسری برای یک تابع معین در یک نقطه داده شده، نه تنها به مقادیر تابع در نقطه‌های مجاور بستگی دارد، بلکه بستگی به ویژگی‌های تابع در سراسر دامنه مکانی تابع دارد. در روش کسری، مرتبه مشتق جمله‌های پراکندگی و جابه‌جایی به‌صورت کسری تغییر می‌یابد و معادله جابه‌جایی-پراکندگی کسری<sup>۲</sup> حاصل می‌شود که به‌خوبی می‌تواند روند انتقال غیرفیککی<sup>۳</sup> ماده حل‌شونده از طریق مشتق کسری در مکان را شبیه‌سازی کند (Huang et al., 2008). مهم‌ترین گام را در این زمینه Deng et al. (2004) برداشتند و مدل جابه‌جایی-پراکندگی کسری را برای شبیه‌سازی انتقال آلودگی در رودخانه‌های دارای پهنه ماندابی ارائه دادند.

برای انجام مدل‌سازی انتقال آلاینده در رودخانه می‌بایست معادله دیفرانسیلی انتقال حل شود. حل این معادله‌ها تنها در حالت‌های بسیار ساده به صورت تحلیلی امکان‌پذیر است و برای حالت‌های کاربردی به‌دلیل پیچیدگی رفتار

1 Fractional Calculus

2 Fractional Advection-Dispersion Equation (FADE)

3 non-Fickian Transport

4 Meshless Local Petrov-Galerkin

آلاینده را برطرف سازد.

## ۲- مواد و روش‌ها

بسته به این که مبنای کار روش‌های بدون شبکه بر پایه روند فرمول‌بندی، تقریب یا درونی‌یابی، یا نمایش دامنه باشد، می‌توان روش‌های مختلفی را در نظر گرفت. روش محلی پتروو- گالرکین یکی از روش‌های بدون شبکه می‌باشد (Liu, 2002; Atluri and Zhu, 1998).

### ۲-۱- روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین

روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین برای تقریب تابع و انتگرال‌گیری به شبکه کلی نیاز ندارد. فرآیند کار به کلی همانند روش‌های عددی بر مبنای فرمول‌بندی شکل قوی مانند تفاضل محدود است. از آن جایی که تقریب حداقل مربعات متحرک در روش یادشده به کار می‌رود، لازم است که روش‌های خاصی برای اعمال شرایط مرزی ضروری به کار گرفته شود (Lin and Atluri, 2000). شکل ۱ دامنه مسئله به همراه شرایط مرزی ضروری و طبیعی را نشان می‌دهد که در آن  $X_Q$ : نقطه گوسی،  $\Omega_s$ : دامنه پایه،  $\Omega_q$ : دامنه انتگرال‌گیری،  $\Omega_w$ : دامنه تابع وزن،  $\Gamma_{qi}$ : مرز درونی دامنه انتگرال‌گیری،  $\Gamma_{qu}$ : قسمتی از مرز ضروری و  $\Gamma_{qt}$ : قسمتی از مرز طبیعی می‌باشد (Liu and Gu, 2005).

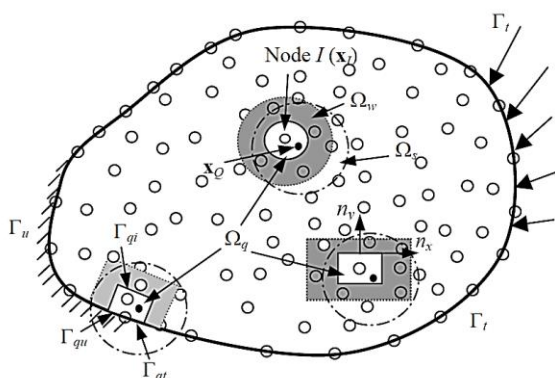


Fig. 1 Problem domain with essential and natural boundary conditions (Liu and Gu, 2005)

شکل ۱ دامنه مسئله به همراه شرایط مرزی ضروری و طبیعی (لو و ژو، ۲۰۰۵).

کم‌عمق با استفاده از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین در حالت غیرماندگار پرداخت. هدف از تحقیق ایشان، مدل‌سازی عبور جریان آب از روی سرریز سد سیاه‌بیشه بود که در دو حالت با توزیع منظم گره‌ای و توزیع نامنظم گره‌ای انجام شد. نتایج تحقیق گویای کارکرد و دقت قابل‌قبول این روش می‌باشد. (Lin et al. (2020) به حل عددی معادله‌های دیفرانسیل جزئی کسری به روش ریمان-لیوویل در معادله یک، دو و سه‌بعدی پخشیدگی کسری مکانی پرداختند. روش عددی به کار برده در این تحقیق روش بدون شبکه و اجزای محدود پتروو-گالرکین است. ایشان برای کاهش پیچیدگی و افزایش تأثیر روش یادشده، از تقریب بدون شبکه بازتولید کرنل به‌عنوان تابع آزمون و تابع شکل روش اجزای محدود صریح به‌عنوان تابع وزن استفاده کردند. خروجی مدل ارائه شده بیانگر کارکرد خوب روش به کار برده است. (Gholami et al. (2021) به حل عددی معادله یک‌بعدی جابه‌جایی-پراکندگی به روش عددی بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین پرداختند. ایشان به‌منظور بررسی صحت کارکرد مدل از داده‌های رودخانه مری‌پرن (۱۱ آزمایش) استفاده کردند که ۹ آزمایش برای واسنجی و ۲ آزمایش برای اعتبارسنجی مدل به کار برده شد. در حالت واسنجی، ضریب پراکندگی و سرعت بهینه شد. سپس میزان‌های ضریب پراکندگی و سرعت برای اعتبارسنجی دو آزمایش دیگر برآورد شد. نتایج تحقیق گویای کارکرد و دقت قابل قبول روش بدون شبکه می‌باشد.

مدل‌سازی انتقال آلاینده‌ها در رودخانه‌های طبیعی نشان می‌دهد که بر خلاف پیشرفت‌های چشم‌گیر، هنوز چالش‌های بسیاری وجود دارد که نیازمند تحقیقات بیشتری است. از جمله این چالش‌ها این است که در گذشته، اغلب بررسی‌ها بر انتقال ماده حل‌شده در رژیم جریان پایدار و مقطع‌های منظم تمرکز می‌کردند که با در نظر گرفتن سرعت میانگین ثابت در مدل نمود پیدا می‌کند. این در حالی است که انتقال ماده آلاینده در آبراه‌های طبیعی که مقطع‌های نامنظمی دارند، امری عادی است. بنابراین این پژوهش درصدد ارائه مدلی جامع برای شبیه‌سازی پدیده انتقال آلاینده در رودخانه‌های با جریان پایدار و غیریکنواخت است تا نقض‌های موجود در مدل‌های رایج موجود در زمینه شبیه‌سازی انتقال

رابطه های بعدی تعریف می شوند.

$$A(X) = \sum_I^n W(X_I) p(X_I) P^T(X_I) \quad (6)$$

که در آن  $A(X)$  ماتریس لنگر وزنی است، و ماتریس

$$B(X) = \{W_1 p(x_1) \ W_2 p(x_2) \ \dots \ W_n p(x_n)\} \quad (6)$$

$$U_s = \{U_1 \ U_2 \ \dots \ U_n\} \quad (8)$$

با قرار دادن رابطه (۵) در رابطه (۱)، تقریب حداقل مربعات به صورت رابطه (۹) ارائه می شوند.

$$U^h(X) = \sum_I^n \sum_j^m p_j(X) (A^{-1}(X) B(X))_{jI} U_I = \frac{\sum_I^n \phi_I(X) U_I}{\sum_I^n \phi_I(X)} \quad (7)$$

که در آن  $U^h(X)$  تابع تقریب،  $\phi_I(X)$  تابع شکل و  $U_I$  فراسنجه گرهی می باشد (Liu and Gu, 2005).

### ۳-۲- تابع وزن

تابع وزن نقش مهم و مؤثری در کارکرد تقریب حداقل مربعات متحرک دارد. برای محاسبه تابع وزن از تابع های اسپیلاین درجه سه ( $W_1$ )، اسپیلاین درجه چهار ( $W_2$ ) و تابع نمایی ( $W_3$ ) استفاده می شود. در بیشتر تحقیقات انجام شده از تابع های نمایی و اسپیلاین درجه سه برای تابع های وزنی استفاده شده است. به همین منظور در این تحقیق تابع اسپیلاین درجه چهار انتخاب می شود (رابطه ۱۰). این تابع پیوسته از مرتبه سوم است که در آن  $d_i$  فاصله بین نقطه  $x_i$  تا نقطه  $x$  است و  $r_w$  شعاع تأثیر تابع وزن است (Liu and Gu, 2005).

$$W_i(X) = \begin{cases} 1 - 6r_i^2 + 8r_i^3 - 3r_i^4 & r \leq 1 \\ 0 & r > 1 \end{cases}, \quad (8)$$

$$\left[ r_i = \frac{d_i}{r_w} = \frac{|x - x_i|}{r_w} \right]$$

### ۴-۲- انواع مشتق کسری

به طور کلی روش های مختلفی برای تعمیم مشتق معمولی به مشتق مرتبه کسری وجود دارد که از آن جمله می توان به مشتق کسری گرانوالد-لتنیکوف<sup>۱</sup>، مشتق کسری ریمان-لیوویل<sup>۲</sup> و مشتق کسری کاپوتو<sup>۳</sup> اشاره کرد. در روش مشتق

### ۲-۲- تابع تقریب حداقل مربعات متحرک / تابع

#### شکل

Atluri and Zhu (1998) و Belytschko et al. (1994)

برای ساخت توابع شکل در روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین از تابع تقریب حداقل مربعات متحرک بهره برده اند. اگر  $U^h(X)$  یک تابع تغییر میدانی در محدوده مورد بررسی  $\Omega$  باشد، تقریب  $U^h(X)$  در نقطه  $X$  با  $U^h(X)$  نشان داده می شود که به صورت رابطه (۱) بیان می شود (Liu and Gu, 2005).

$$U^h(X) = \sum_j^m p_j(X) a_j(X) = P^T(X) a(X) \quad (1)$$

که در آن  $m$  شمار تک جمله ای های تشکیل دهنده  $P(X)$  و  $a(X)$  بردار ضریب  $P(X)$  است که به صورت رابطه (۲) تعریف می شود.

$$a^T(X) = \{a_1(X) \ a_2(X) \ \dots \ a_m(X)\} \quad (2)$$

در رابطه (۱)،  $P(X)$  یک بردار از تابع های پایه است، که اغلب شامل بیشترین تک جمله ای های لازم برای دستیابی به کمترین کامل بودن، می باشد. در فضای یک بعدی، یک پایه چندجمله ای کامل از مرتبه  $m$  برابر رابطه (۳) بیان می شود.

$$P^T(X) = \{1 \ x \ x^2 \ \dots \ x^m\} \quad (3)$$

شمار گره هایی که به طور موضعی برای برآورد مقدار تابع در نقطه  $X$  استفاده می شود، توسط دامنه پایه تعیین می شود. به منظور تعیین ضریب های مجهول  $a(X)$ ، تابع وزن دار نرم  $L_2$  باید کمینه شود:

$$J = \sum_I^n W(X - X_I) [P^T(X_I) a(X) - U_I]^2 \quad (4)$$

در رابطه بالا  $W_i(X)$  نشان دهنده تابع وزن مربوط به گره  $I$  و میزان درون گروه اختلاف بین میزان برآورد شده در نقطه  $I$  و میزان داده شده در همان نقطه می باشد. همچنین،  $n$  شمار نقطه ها در دامنه پایه تابع وزن می باشد. به منظور کمینه کردن تابع  $J$  شرط  $\partial J / \partial a = 0$  بررسی می شود که در نهایت منجر به رابطه خطی (۵) می شود.

$$a(X) = A^{-1}(X) B(X) U_s \quad (5)$$

که در معادله بالا،  $A(X)$ ،  $B(X)$  و  $U_s$  به ترتیب در

1 Grunwald- Letnikov

2 Riemann-Liouville

3 Caputo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(hC(x, y, t))}{\partial t} + \frac{\partial(huC(x, y, t))}{\partial x} \\ & + \frac{\partial(hvC(x, y, t))}{\partial y} \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( hD_x \frac{\partial^\alpha C(x, y, t)}{\partial x^\alpha} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left( hD_y \frac{\partial^\beta C(x, y, t)}{\partial y^\beta} \right) \pm hS \end{aligned} \quad (11)$$

که در آن  $\alpha$  و  $\beta$  مرتبه‌های مشتق مکان به ترتیب در راستای طولی و عرضی است. معادله (۱۳) را با باز کردن مشتقات حاصل ضرب برای سه عبارت اول آن، استفاده از معادله پیوستگی جریان و انجام عملیات جبری می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( hD_x \frac{\partial^\alpha C}{\partial x^\alpha} \right) \\ & - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left( hD_y \frac{\partial^\beta C}{\partial y^\beta} \right) = S \end{aligned} \quad (12)$$

با گسسته‌سازی رابطه بالا به روش محلی پتروو-گالرکین و باقیمانده‌های وزن دار، و با باز کردن مشتقات حاصل ضرب می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} W_j \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} W_j u \frac{\partial C}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} W_j v \frac{\partial C}{\partial y} d\Omega \\ & - \int_{\Omega} W_j \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x} \left( hD_x \frac{\partial^\alpha C}{\partial x^\alpha} \right) d\Omega \\ & - \int_{\Omega} W_j \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial y} \left( hD_y \frac{\partial^\beta C}{\partial y^\beta} \right) d\Omega \\ & = \int_{\Omega} W_j S \delta(x - x_k)(y - y_k) d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

در رابطه بالا و جمله آخر از سمت چپ،  $S$  غلظت متمرکز ورودی (چاه) به آبراهه (کانال) یا رودخانه در نقطه  $x_k$  و  $y_k$  است. با توجه به ویژگی‌های تابع دیراک، اگر  $k$  یک گره از دامنه باشد؛ به عبارتی اگر  $S$  بر روی گره رخ دهد، در این صورت جمله آخر برابر  $S$  خواهد بود. با باز کردن مشتقات حاصل ضرب و به کارگیری انتگرال گیری کسری جزء به جزء ( Abdeljawad *et al.*, 2019, Li and Xu, 2010, Lin *et al.*, 2020 ) و استفاده از طرح وزنی  $\theta_x$  و  $\theta_y$  می‌توان نوشت:

کسری ریمان-لیوویل، در آغاز از تابع انتگرال جزئی و آنگاه مشتق معمولی مرتبه اول گرفته می‌شود و در روش مشتق کسری کاپوتو، در آغاز مشتق مرتبه اول و آنگاه انتگرال جزئی از تابع گرفته می‌شود. مشتق کسری در مفهوم کاپوتو به صورت رابطه (۱۱) تعریف شده است (Podlubny, 1999):

$$\begin{aligned} & {}_a^C D_t^\alpha f(t) = D^{-(m-\alpha+1)} [f^{(m+1)}(x)] = \\ & \frac{1}{\Gamma(m-\alpha+1)} \int_a^t (t-x)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(x) dx \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن،  $m \leq \alpha \leq m+1$  و  $\alpha > 0$  است. مشتق گیری کسری ریمان-لیوویل بیشتر مورد استفاده ریاضیدانان قرار گرفته و چون نیازمند شرایط اولیه کسری می‌باشد، تاکنون بیان فیزیکی معنی داری نداشته و برای مسئله‌های دنیای واقعی مناسب نمی‌باشد.

## ۲-۵- گسسته‌سازی معادله جابه‌جایی-پراکندگی کسری مکانی در حالت دوبعدی

برای پیش‌بینی انتقال آلاینده در رودخانه‌های عریض از معادله جابه‌جایی-پراکندگی کلاسیک در حالت دوبعدی به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(hC(x, y, t))}{\partial t} + \frac{\partial(huC(x, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial(hvC(x, y, t))}{\partial y} \\ & = \frac{\partial}{\partial x} \left( hD_x \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left( hD_y \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} \right) \pm hS \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن،  $C(x, y, t)$  غلظت آلاینده در مجرای رودخانه،  $u$  سرعت طولی جریان،  $v$  سرعت عرضی جریان،  $D_x$  ضریب پراکندگی طولی،  $D_y$  ضریب پراکندگی عرضی،  $h$  عمق جریان،  $t$  مدت زمان سپری شده پس از تخلیه ماده آلاینده،  $S$  منبع چاه یا چشمه،  $x$  فاصله طولی از نقطه تخلیه و  $y$  فاصله عرضی از نقطه تخلیه است (Fischer *et al.*, 1979). معادله جابه‌جایی-پراکندگی مرتبه کسری مکانی که در این پژوهش بررسی شده است، به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} W_j \frac{\partial C}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega} W_j u \frac{\partial C}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} W_j v \frac{\partial C}{\partial y} d\Omega \\
& + \theta_x \left[ - \left( \int_{\Omega} D_x {}^c D_b^\alpha W_j \frac{\partial C}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial D_x}{\partial x} {}^c D_b^\alpha W_j C d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{h} D_x \frac{\partial h}{\partial x} {}^c D_b^\alpha W_j C d\Omega \right) \right] \\
& + (1 - \theta_x) \left[ - \left( - \int_{\Omega} D_x {}^c D_x^\alpha W_j \frac{\partial C}{\partial x} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial D_x}{\partial x} {}^c D_x^\alpha W_j C d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{h} D_x \frac{\partial h}{\partial x} {}^c D_x^\alpha W_j C d\Omega \right) \right] \\
& + \theta_y \left[ - \left( \int_{\Omega} D_y {}^c D_b^\beta W_j \frac{\partial C}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial D_y}{\partial y} {}^c D_b^\beta W_j C d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{h} D_y \frac{\partial h}{\partial y} {}^c D_b^\beta W_j C d\Omega \right) \right] \\
& + (1 - \theta_y) \left[ - \left( - \int_{\Omega} D_y {}^c D_y^\beta W_j \frac{\partial C}{\partial y} d\Omega - \int_{\Omega} \frac{\partial D_y}{\partial y} {}^c D_y^\beta W_j C d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{h} D_y \frac{\partial h}{\partial y} {}^c D_y^\beta W_j C d\Omega \right) \right] \\
& = \int_{\Omega} W_j S \delta(x - x_k)(y - y_k) d\Omega
\end{aligned} \tag{14}$$

و هرچه میزان  $\theta_x$  به صفر نزدیک تر باشد، تأثیر گره های بالادست بیشتر خواهد بود و در حالت  $\theta_x$  برابر ۰/۵، تأثیر گره های بالادست و پایین دست بر غلظت گره مورد نظر یکسان خواهد بود. با استفاده از تقریب مشتق مرتبه اول جمله زمانی غلظت در نقطه خاص به روش ضمنی می توان نوشت:

در رابطه بالا،  ${}^c D_y^\beta$  و  ${}^c D_x^\alpha$  بیانگر مشتق مرتبه کسری غلظت می باشد که در آن  $a$  و  $a'$  معرف ابتدای بازه  $b$  و  $b'$  معرف انتهای بازه مورد نظر به ترتیب در راستای طولی و عرضی رودخانه، و  $C$  معرف روش کسری کاپوتو است. لازم به یادآوری است میزان  $\theta_x$  و  $\theta_y$  در محدوده  $0 \leq \theta_x, \theta_y \leq 1$  تغییر می کند. هرچه میزان  $\theta_x$  به یک نزدیک تر باشد، تأثیر گره های پایین دست بیشتر خواهد بود

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} W_j \frac{C^{m+1} - C^m}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Omega} W_j u \frac{\partial C^{m+1}}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} W_j v \frac{\partial C^{m+1}}{\partial y} d\Omega \\
& - \theta_x \left( \int_{\Omega} D_x {}^c D_b^\alpha W_j \frac{\partial C^{m+1}}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial D_x}{\partial x} {}^c D_b^\alpha W_j C^{m+1} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{h} D_x \frac{\partial h}{\partial x} {}^c D_b^\alpha W_j C^{m+1} d\Omega \right) \\
& + (1 - \theta_x) \left( \int_{\Omega} D_x {}^c D_x^\alpha W_j \frac{\partial C^{m+1}}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial D_x}{\partial x} {}^c D_x^\alpha W_j C^{m+1} d\Omega \right) \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{h} D_x \frac{\partial h}{\partial x} {}^c D_x^\alpha W_j C^{m+1} d\Omega - \theta_y \left( \int_{\Omega} D_y {}^c D_b^\beta W_j \frac{\partial C^{m+1}}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial D_y}{\partial y} {}^c D_b^\beta W_j C^{m+1} d\Omega \right) \\
& + \int_{\Omega} \frac{1}{h} D_y \frac{\partial h}{\partial y} {}^c D_b^\beta W_j C^{m+1} d\Omega \\
& + (1 - \theta_y) \left( \int_{\Omega} D_y {}^c D_y^\beta W_j \frac{\partial C^{m+1}}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial D_y}{\partial y} {}^c D_y^\beta W_j C^{m+1} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{h} D_y \frac{\partial h}{\partial y} {}^c D_y^\beta W_j C^{m+1} d\Omega \right) \\
& = \int_{\Omega} W_j S \delta(x - x_k)(y - y_k) d\Omega
\end{aligned} \tag{15}$$

$$\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} = \sum_{i=1}^n C_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \tag{18}$$

با جایگزینی رابطه های بالا در رابطه (۱۷) و با فرض اینکه غلظت متمرکز ورودی به آبراهه یا رودخانه در نقطه  $x_k$  و  $y_k$  باشد، به دست می آید:

برای میزان برآوردی غلظت و مشتق آن نسبت به متغیر مستقل مکان از رابطه های زیر استفاده می شود:

$$C(x, y, t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \Phi_i(x, y) \tag{16}$$

$$\frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} = \sum_{i=1}^n C_i(t) \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \tag{17}$$



$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n W_j \frac{\Phi_i}{\Delta t} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n W_j u_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n W_j v_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} d\Omega \\
 & - \theta_x \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n D_{x_i} {}^c D_b^\alpha W_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} \right)_i {}^c D_b^\alpha W_j \Phi_i d\Omega \right. \\
 & \left. + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} D_{x_i} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_i {}^c D_b^\alpha W_j \Phi_i d\Omega \right) \\
 & + (1 - \theta_x) \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n D_{x_i} {}^c D_x^\alpha W_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial D_x}{\partial x} \right)_i {}^c D_x^\alpha W_j \Phi_i d\Omega \right. \\
 & \left. + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} D_{x_i} \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)_i {}^c D_x^\alpha W_j \Phi_i d\Omega \right) \\
 & - \theta_y \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n D_{y_i} {}^c D_b^\beta W_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial D_y}{\partial y} \right)_i {}^c D_b^\beta W_j \Phi_i d\Omega \right. \\
 & \left. + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} D_{y_i} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_i {}^c D_b^\beta W_j \Phi_i d\Omega \right) \\
 & + (1 - \theta_y) \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n D_{y_i} {}^c D_y^\beta W_j \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial D_y}{\partial y} \right)_i {}^c D_y^\beta W_j \Phi_i d\Omega \right. \\
 & \left. + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \frac{1}{h_i} D_{y_i} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_i {}^c D_y^\beta W_j \Phi_i d\Omega \right) \Big] C_i^{m+1} = \int_{\Omega} W_j \frac{C_i^m}{\Delta t} d\Omega + S
 \end{aligned} \tag{19}$$

داده شده است.

برای محاسبه انتگرال گیری رابطه بالا از انتگرال گیری گوسی استفاده می‌شود. شکل ۲ نمونه‌ای از موقعیت قرارگیری گره مجهول به همراه نقطه‌های گوسی استفاده شده در این تحقیق را نشان می‌دهد.

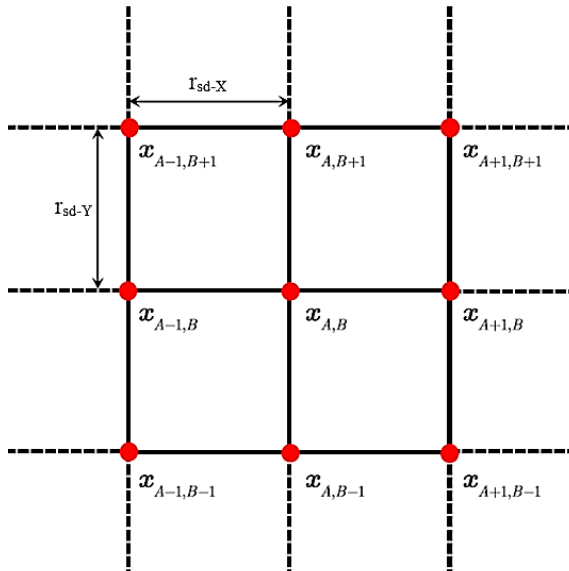


Fig. 3 Two-dimensional integration domain

شکل ۳ دامنه انتگرال گیری دوبعدی

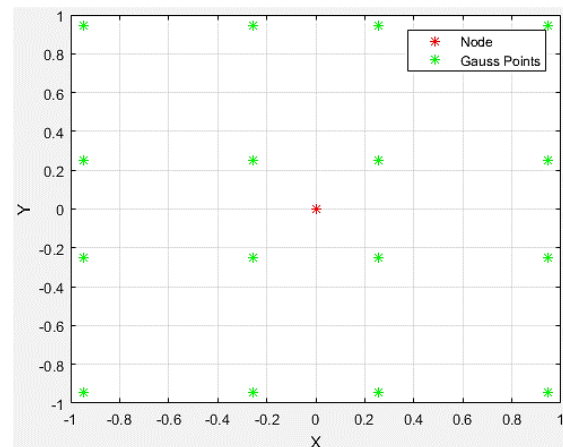


Fig. 2 Unknown node with Gauss points (2D)

شکل ۲ گره مجهول به همراه نقطه‌های گوسی (دوبعدی)

تابع وزن دوبعدی مورد استفاده در این تحقیق برابر رابطه (۲۲) می‌باشد که دامنه انتگرال گیری آن در شکل ۳ نشان

$$W_i(x, y) = \begin{cases} \left( 1 - 6 \left( \frac{|x - x_A|}{r_{sd-x}} \right)^2 + 8 \left( \frac{|x - x_A|}{r_{sd-x}} \right)^3 - 3 \left( \frac{|x - x_A|}{r_{sd-x}} \right)^4 \right) \\ \times \left( 1 - 6 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^2 + 8 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^3 - 3 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^4 \right), & (x, y) \in \Omega_{A,B} \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (20)$$

حل مشتق مرتبه کسری تابع وزن (سمت راست و سمت چپ) در راستای طولی به روش عددی کاپوتو پرداخته شده است.

که در آن  $x$  طول نقطه های گوسی،  $y$  عرض نقطه های گوسی،  $x_A$  طول گره مجهول،  $y_B$  عرض گره مجهول،  $r_{sd-x}$  و  $r_{sd-y}$  شعاع های دامنه انتگرال گیری در راستای طول و عرض، و  $\Omega_{A,B} = [x_{A-1}, x_{A+1}] \times [y_{B-1}, y_{B+1}]$  است. در ادامه به

مشتق مرتبه کسری سمت راست تابع وزن در راستای طول  $({}_x^C D_b^\alpha W_j)$  برای  $\alpha > 0$ :

$${}_x^C D_b^\alpha W(x, y) = \frac{-1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_x^b (\xi - x)^{-\alpha} W'(\xi, y) d\xi, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (21)$$

$${}_x^C D_b^\alpha W(x, y) = \frac{-1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_x^b (\xi - x)^{1-\alpha} W''(\xi, y) d\xi, \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \quad (22)$$

$${}_x^C D_b^\alpha W(x, y) = \lambda(\alpha) \times$$

$$\begin{cases} \left( 4(x_A - x)^{3-\alpha} + (x_{A+1} - x)^{3-\alpha} - \frac{3(x_{A+1} - x)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)r_{sd-x}} + (x_{A-1} - x)^{3-\alpha} \right. \\ \left. + \frac{3(x_{A-1} - x)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)r_{sd-x}} \right) \times \left( 1 - 6 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^2 + 8 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^3 - 3 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^4 \right), & (x, y) \in \Omega_{1,B} \\ \left( 4(x_A - x)^{3-\alpha} + (x_{A+1} - x)^{3-\alpha} - \frac{3(x_{A+1} - x)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)r_{sd-x}} \right) \\ \times \left( 1 - 6 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^2 + 8 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^3 - 3 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^4 \right), & (x, y) \in \Omega_{A-1,B} \\ \left( (x_{A+1} - x)^{3-\alpha} - \frac{3(x_{A+1} - x)^{4-\alpha}}{(4-\alpha)r_{sd-x}} \right) \\ \times \left( 1 - 6 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^2 + 8 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^3 - 3 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^4 \right), & (x, y) \in \Omega_{A,B} \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (23)$$

$$\Omega_{1,B} = [x_1, x_{A-1}] \times [y_{B-1}, y_{B+1}]$$

$$\Omega_{A-1,B} = [x_{A-1}, x_A] \times [y_{B-1}, y_{B+1}] \quad (25)$$

$$\Omega_{A,B} = [x_A, x_{A+1}] \times [y_{B-1}, y_{B+1}]$$

در رابطه های بالا:

$$\lambda(\alpha) = \frac{24}{r_{sd-x}^3 \Gamma(4-\alpha)} \quad (24)$$

مشتق مرتبه کسری سمت چپ تابع وزن در راستای طول  $({}_a^C D_x^\alpha W_j)$  برای  $\alpha > 0$ :

$${}_a^C D_x^\alpha W(x, y) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^x (x - \xi)^{-\alpha} W'(\xi, y) d\xi, \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (26)$$

$${}_a^C D_x^\alpha W(x, y) = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)} \int_a^x (x - \xi)^{1-\alpha} W''(\xi, y) d\xi, \quad 1 \leq \alpha \leq 2 \quad (27)$$

$$\begin{aligned}
 {}_a D_x^\alpha W(x, y) &= \lambda(\alpha) \times \\
 &\left\{ \begin{aligned}
 &0, && \text{others} \\
 &\left( (x - x_{A-1})^{3-\alpha} - \frac{3(x - x_{A-1})^{4-\alpha}}{(4-\alpha)r_{sd-x}} \right) \\
 &\quad \times \left( 1 - 6 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^2 + 8 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^3 - 3 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^4 \right), && (x, y) \in \Omega_{A-1,B} \\
 &\left( 4(x - x_A)^{3-\alpha} + (x - x_{A-1})^{3-\alpha} - \frac{3(x - x_{A-1})^{4-\alpha}}{(4-\alpha)r_{sd-x}} \right) \\
 &\quad \times \left( 1 - 6 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^2 + 8 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^3 - 3 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^4 \right), && (x, y) \in \Omega_{A,B} \\
 &\left( 4(x - x_A)^{3-\alpha} + (x - x_{A-1})^{3-\alpha} - \frac{3(x - x_{A-1})^{4-\alpha}}{(4-\alpha)r_{sd-x}} + (x - x_{A+1})^{3-\alpha} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{3(x - x_{A+1})^{4-\alpha}}{(4-\alpha)r_{sd-x}} \right) \times \left( 1 - 6 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^2 + 8 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^3 - 3 \left( \frac{|y - y_B|}{r_{sd-y}} \right)^4 \right), && (x, y) \in \Omega_{A+1,B}
 \end{aligned} \right. \quad (28)
 \end{aligned}$$

در رابطه‌های بالا:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{A-1,B} &= [x_{A-1}, x_A] \times [y_{B-1}, y_{B+1}] \\
 \Omega_{A,B} &= [x_A, x_{A+1}] \times [y_{B-1}, y_{B+1}] \\
 \Omega_{A+1,B} &= [x_{A+1}, x_N] \times [y_{B-1}, y_{B+1}]
 \end{aligned} \quad (29)$$

با جایگذاری مشتقات مرتبه کسری در رابطه (۲۱)، گسسته‌ترین شکل معادله جابه‌جایی-پراکندگی کسری ایجاد می‌شود و می‌توان آن را به شکل  $KC=F$  خلاصه کرد که  $K$  ماتریس سختی،  $C$  ماتریس مجهول و  $F$  ماتریس نیرو است. پس از تشکیل ماتریس‌های بالا، شرط مرزی دیریکله (مرز ضروری) و شرط مرزی نیومن (مرز طبیعی) به آن اعمال می‌شود (شکل ۴).

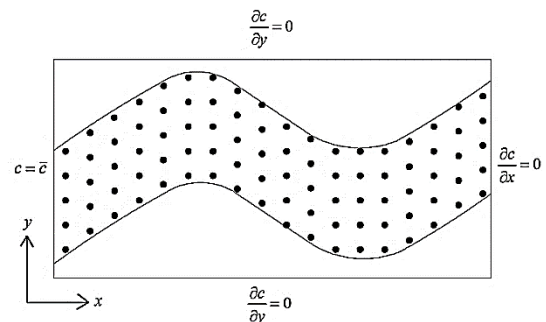


Fig. 4 Problem domain and boundary conditions in solving the advection-dispersion equation

شکل ۴ دامنه مسئله و شرایط مرزی در حل معادله جابه‌جایی-پراکندگی

شرط مرزی نیومن به‌طور مستقیم اعمال می‌شود، ولی از آنجایی که تابع‌های شکل حداقل مربعات متحرک، شرط دلتای کرونگر را ارضاء نمی‌کنند، به‌همین دلیل هنگام اعمال شرط مرزی دیریکله نیاز به یک ضریب پنالیتی ( $\alpha_p$ ) است. حال اگر شرایط مرزی دیریکله را به‌صورت  $C - \bar{C} = 0$  فرض کنیم، جمله زیر به عنوان شرط مرزی ورودی به ماتریس سختی و بردار نیرو اضافه می‌شود.

$$[\alpha_p W_j (C^{m+1} - \bar{C})] = [\alpha_p W_j C^{m+1} - \alpha_p W_j \bar{C}] \quad (30)$$

در نهایت پس از اعمال شرایط مرزی بر گسسته‌ترین شکل معادله جابه‌جایی-پراکندگی کسری، میزان مجهول هر گره (غلظت) با استفاده از رابطه (۳۳) محاسبه می‌شود.

$$C = \frac{F}{K} \quad (31)$$

در این تحقیق، به‌منظور بررسی کارکرد روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین در حل معادله جابه‌جایی-پراکندگی کسری از داده‌های رودخانه آتاباسکا<sup>۱</sup> استفاده شده است.

## ۶-۲- موقعیت و ویژگی‌های رودخانه مورد

### مطالعه

رودخانه آتاباسکا یکی از رودخانه‌های مهم و پر آب کشور

رودخانه ۱۵۰ متر بوده و عمق آن از ۱ متر تا بیش از ۳ متر در نقطه‌های مختلف آن متغیر است. شکل ۵ محدوده مورد بررسی را نشان می‌دهد. در این پژوهش ۵ کیلومتر ابتدای بازه مدل‌سازی شده است که در جدول ۱ ویژگی‌های هندسی و هیدرولیکی مقطع‌های یادشده آورده شده است. شکل ۶ نمایی از بازه‌ی رودخانه مورد مطالعه (۵ کیلومتر ابتدای رودخانه) را نشان می‌دهد.

کانادا می‌باشد. این رودخانه در زون ۱۱ شمالی و در مختصات جهانی WGS 84 قرار دارد. بر مبنای نتایج بررسی‌های میدانی Putz and Smith در سال ۲۰۰۰ این رودخانه دارای دبی بیش از ۳۶۵ مترمکعب در ثانیه در فصل تابستان می‌باشد. محدوده رودخانه مورد بررسی در منطقه شهر هینتون<sup>۱</sup> کانادا نزدیک شهر ادمونتون<sup>۲</sup> بوده که حدود ۲۶ کیلومتر آن بررسی شود. میانگین عرض این

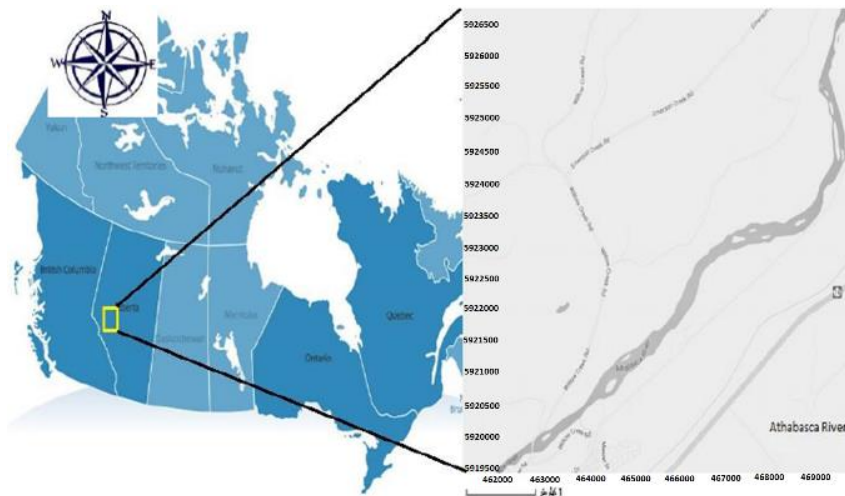


Fig. 5 Location of Athabasca River Reach under study (Putz and Smith, 2000)

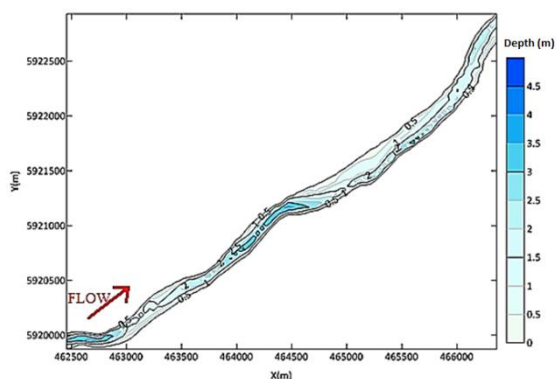
شکل ۵ محدوده مورد بررسی رودخانه آتاباسکا (Putz and Smith, 2000)

جدول ۱ مشخصات مقاطع عرضی برداشت‌شده از رودخانه آتاباسکا (Putz and W.Smith, 2000)

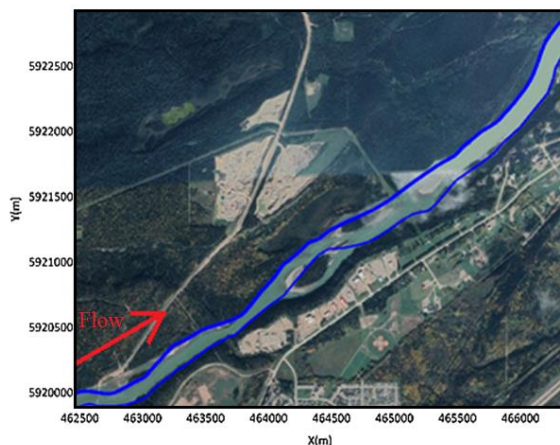
Table 1 Cross section characteristics of Athabasca River (Putz and W.Smith, 2000)

Cross section Distance (m)	Area (m <sup>2</sup> )	River Width (m)	River Depth (m)	Ground Elve. (m)	Water Elve. (m)	Aveg.Velocity (m/s)	Ridus Hydraulic (m)
0	240.07	106.30	2.26	960.20	964.92	1.51	2.29
100	294.73	102.47	2.88	960.18	964.68	1.23	2.29
300	260.36	100.07	2.60	960.58	964.72	1.40	2.58
500	255.02	161.77	1.58	960.46	964.39	1.43	1.57
925	226.50	201.50	1.12	962.17	964.02	1.61	1.13
1875	343.11	147.36	2.33	959.71	963.27	1.06	2.32
2425	353.24	137.09	2.58	959.16	963.01	1.03	2.55
3000	196.63	185.13	1.06	959.94	962.07	1.85	1.05
3725	309.25	192.13	1.61	957.84	961.41	1.18	1.60
4725	264.60	158.00	1.67	957.74	960.52	1.37	1.67
5725	309.77	169.50	1.83	956.34	959.84	1.17	1.83

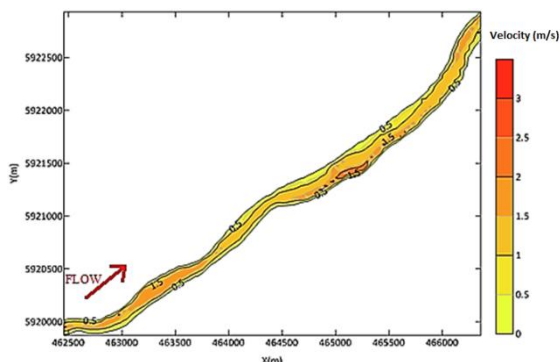
داده شده است.



**Fig. 7** Contour of flow depth in the Athabasca River  
شکل ۷ خطوط هم‌عمق جریان در رودخانه آتاباسکا

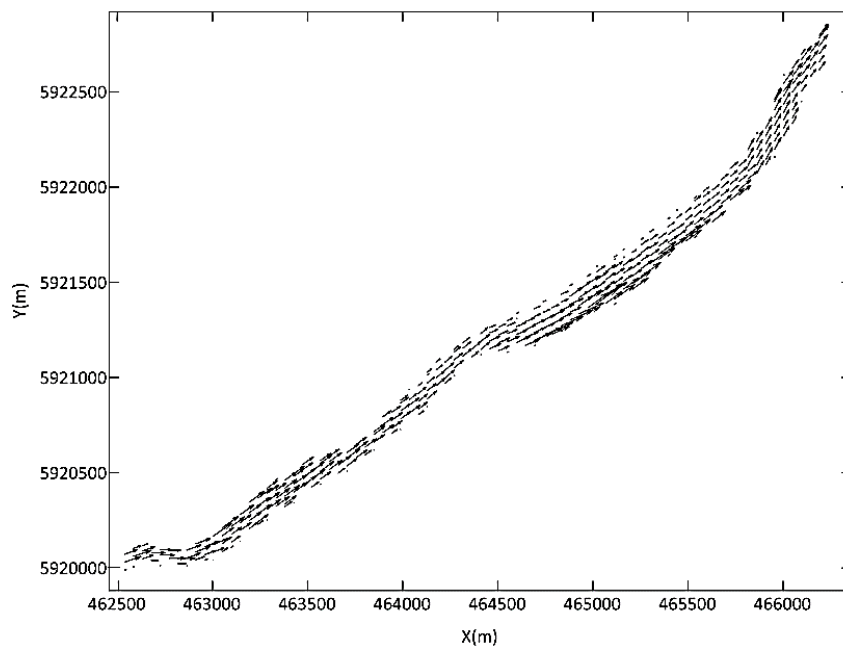


**Fig. 6** View of the studied river  
شکل ۶ نمایی از بازه‌ی رودخانه مورد بررسی



**Fig. 8** Contour of flow velocity in the Athabasca River  
شکل ۸ خطوط هم سرعت جریان در رودخانه آتاباسکا

شکل ۷ عمق جریان را در بازه مورد بررسی را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود عمیق‌ترین قسمت رودخانه تا حدودی در اوایل مسیر رودخانه و در ناحیه‌های مرکزی آن قرار دارد. همچنین شکل ۸ و شکل ۹ به ترتیب تراز (کانتور) سرعت جریان و بردارهای سرعت در رودخانه آتاباسکا را نشان می‌دهد. در شکل‌های ارائه‌شده ضمن مشخص کردن مکان‌های هندسی با سرعت بیشینه و کمینه، بردارهای سرعت در بازه رودخانه به‌درستی نمایش



**Fig. 9** Velocity vectors in the Athabasca River

شکل ۹ بردارهای سرعت در رودخانه آتاباسکا

## ۲-۷- شرح آزمایش

در نتایج ارائه شده در گزارش اسمیت و پاتز، موقعیت نمونه‌ها در هر مقطع عرضی توسط رابطه بی بعد  $q/Q$  نشان داده شده است، که  $q$  دبی تجمعی عبوری از بخشی از مقطع رودخانه می باشد و  $Q$  دبی کل رودخانه می باشد. منبع آلاینده فرض شده از نوع نقطه‌ای بوده که در بالادست و در نزدیکی ساحل سمت راست رودخانه قرار گرفته است. ماده رنگی توسط یک پخش کننده به صورت پیوسته و با دبی ثابت به مدت زمان  $5/25$  ساعت به درون رودخانه تزریق شده است. ماده ردیاب به کار رفته در این آزمایش ردآمین بوده که میزان زوال این ماده صفر در نظر گرفته شده است. داده‌های مربوط به غلظت و دبی ماده ردیاب در رودخانه در جدول ۲ آمده است.

جدول ۲ داده‌های مربوط به غلظت و دبی ردیاب در رودخانه آتاباسکا (پاتز و اسمیت در سال ۲۰۰۰)

Table 2 Tracer concentration and discharge data in the Athabasca River (Putz and W.Smith, 2000)

$q_{in}$ (m <sup>3</sup> /s)	$C_0$ (µg/l)	Duration (hr)	$Q$ (m <sup>3</sup> /s)	$C_b$ (µg/l)	$C_\infty$ (µg/l)
$1.3 \times 10^{-6}$	$2.3 \times 10^8$	5.25	363.6	0.05	0.82

در اینجا  $C_0$  غلظت در زمان تزریق،  $C_b$  غلظت ماده ردیاب در رودخانه پیش از تزریق،  $C_\infty$  غلظت نهایی به دست آمده در رودخانه پس از تزریق،  $Q$  دبی کل رودخانه و  $q_{in}$  دبی منبع آلاینده می باشد. میزان  $C_\infty$  از رابطه زیر به دست آمده است:

$$C_\infty = \frac{q_{in} C_0}{Q + q_{in}} \approx \frac{q_{in} C_0}{Q}, \quad \text{به ازای } q_{in} \ll Q \quad (32)$$

## ۲-۸- شرایط مرزی و اولیه

برای اعمال شرایط اولیه و مرزی باید به شرایط محیطی رودخانه توجه کرد. لازم به یادآوری است که پیش از تزریق ماده ردیاب به رودخانه غلظت آن در رودخانه اندازه گیری شده است که میزان آن برابر با  $5 \times 10^{-8}$  گرم بر لیتر می باشد. بنابراین با توجه به موجود بودن غلظت ماده ردیاب در رودخانه، شرط اولیه و نیز شرط مرزی بالادست، غلظت ماده ردیاب اندازه گیری شده فرض می شود. برای پایین دست و ساحل‌های رودخانه، شرط گرادیان صفر

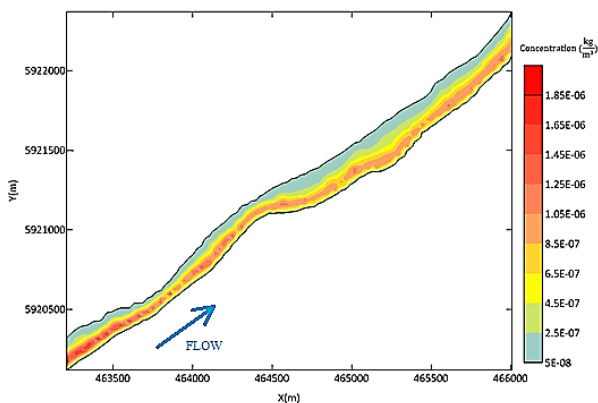
اعمال شده است. شکل ریاضی شرایط اولیه و مرزی در رابطه (۳۵) ارائه شده است.

$$\left\{ \begin{array}{l} C(x, y, 0) = 5 \times 10^{-8} \frac{gr}{Lit}, \quad (x, y) \in \Omega \\ C(0, y, t) = \begin{cases} 2.3 \times 10^8 \frac{gr}{Lit}, & y \in \Omega, 0 \leq t \leq 5.25hr \\ 0, & y \in \Omega, t > 5.25hr \end{cases} \\ \frac{\partial C}{\partial x}(x, y, t) = 0; \quad y \in \Omega, t \geq 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y}(x, 0, t) = 0; \quad x \in \Omega, t \geq 0 \\ \frac{\partial C}{\partial y}(x, \infty, t) = 0; \quad x \in \Omega, t \geq 0 \end{array} \right. \quad (33)$$

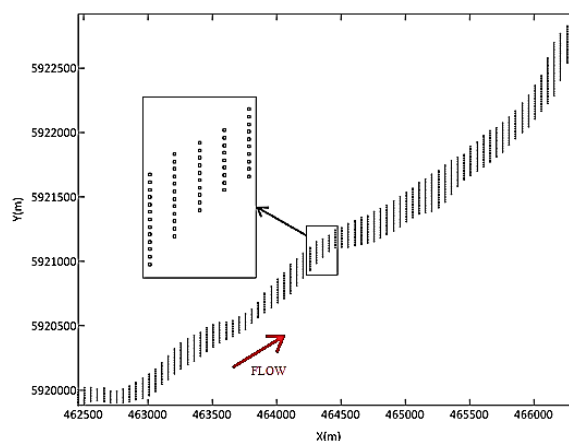
## ۳- نتایج و بحث

توزیع گره‌های مورد استفاده در رودخانه بر مبنای فاصله زمانی انتخاب شد، تا شرط پایداری عدد کورانت برقرار باشد. از آنجایی که محدوده مورد بررسی رودخانه دارای طول ۵ کیلومتر و بیشینه عرض ۲۰۰ متر است، فاصله گره‌ها در راستای عرضی کمتر انتخاب شد تا مدل بتواند پراکندگی عرضی را به درستی مدل کند. توجه به این نکته هم ضروری است که تعداد گام‌های زمانی باید به اندازه‌ای باشد که مدل به پایداری لازم برای این منظور است که شمار گام‌های زمانی ارزیابی شود. این عمل باید مورد توجه قرار گیرد چرا که شمار گام‌های زمانی زیاد اگرچه اطمینان پایداری را بالا می برد، ولی ممکن است که زمان اجرای مدل را طولانی کند و این در حالی است که مدل به پایداری رسیده باشد. همچنین شمار گام‌های زمانی کوچک ممکن است که مدل را به پایداری نرساند. برای این منظور می توان با تکرارهای مختلف، شمار گام‌های مدل سازی بهینه را به دست آورد.

در این پژوهش با انجام تکرارهای مختلف، مناسب ترین میزان  $\Delta x$  و  $\Delta y$  به ترتیب برابر ۵۰ و ۱۵ متر در نظر گرفته شد که در کل شمار ۱۱۰۰ گره ایجاد شد (شکل ۱۰). همچنین هر گام زمانی برابر ۳۰ ثانیه انتخاب شد که عدد کورانت کمتر از یک، بیانگر پایداری مدل می باشد.



**Fig. 11** Tracer movement in the range of 1-4 km  
 شکل ۱۱ نحوه حرکت ماده ردیاب در بازه ۱-۴ کیلومتر



**Fig. 10** Nodes defined in the problem domain  
 شکل ۱۰ گره‌های تعریف شده در دامنه مسئله

برای نمایش خروجی‌های مربوط به پخش ماده ردیاب، غلظت‌های مربوط به هر نقطه از مقطع موردنظر، به غلظت نهایی (غلظت اشباع) به دست آمده در رودخانه تقسیم می‌شود ( $C=C'/C_{\infty}$ ). این امر باعث به وجود آمدن غلظت نرمال شده بی بعد می‌شود. در اینجا  $c$  غلظت به دست آمده از شبیه‌سازی،  $C_{\infty}$  غلظت اشباع به دست آمده در رودخانه که میزان آن برابر  $0/82$  میکروگرم در لیتر بوده و  $C'$  غلظت نرمال بی بعد شده می‌باشد. همچنین دبی جمع‌ی هر نقطه از مقطع را (دبی جمع‌ی از ساحل سمت چپ) بر دبی کل عبوری از رودخانه تقسیم کرده تا بدین ترتیب فراسنجه بی بعد دبی ( $q/Q$ ) به دست آید.  $Q$  دبی کل رودخانه و  $q$  دبی جمع‌ی از ساحل سمت چپ می‌باشد. چنانچه برای هر کدام از مقطع‌ها، غلظت نرمال شده بی بعد در مقابل  $q/Q$  رسم شود، غلظت عبوری از هر مقطع نمایان می‌شود. نتایج به دست آمده از شبیه‌سازی آلودگی با استفاده از مدل ارائه شده و خروجی تحقیقات ارائه شده توسط ملکی (Maleki, 2016) با استفاده از مدل تجاری مایک ۲۱ به همراه داده‌های میدانی اندازه‌گیری شده، برای مقطع عرضی در کیلومتر ۲/۴۲۵، ۳/۷۲۵ و ۴/۷۲۵ در شکل‌های زیر ارائه شده است. همان‌طور که مشخص می‌باشد مدل ارائه شده به دلیل وجود مشتقات مرتبه کسری و ضریب‌های چولگی انعطاف‌پذیری بالایی در پیش‌بینی غلظت ماده ردیاب دارد. وجود خطا میان داده‌های شبیه‌سازی شده و داده‌های میدانی، می‌تواند به دلیل کم بودن شمار مقطع‌های برداشت شده باشد. نکته

در این مسئله فراسنجه‌های ضریب‌های پراکندگی، مشتقات مرتبه کسری و ضریب‌های چولگی با افزایش ضریب تبیین ( $R^2$ )، کاهش میزان میانگین مربعات خطا<sup>۱</sup> (MSE) و میانگین خطای مطلق<sup>۲</sup> (MAE) بین داده‌های مشاهده شده و محاسبه شده بهینه شدند که مقادیر بهینه شده در جدول ۳ ارائه شده است. لازم به یادآوری است به دلیل تغییرپذیری‌های رودخانه در طول مسیر (مانند بازشدگی، تنگ‌شدگی، پهنه ماندابی، تغییرپذیری‌های زبری بستر، وجود مانع‌ها و ...) مدت زمان ماند در ناحیه نگهداشت و ناحیه اشباع زیربستر افزایش یافته و آزادسازی جرم با کمی تأخیر همراه خواهد بود، در نتیجه حرکت آلاینده آهسته‌تر صورت می‌گیرد.

جدول ۳ فراسنجه‌های بهینه شده در رودخانه آتاباسکا

**Table 3** Optimized parameters in the Athabasca River

$D_x$	$D_y$	$\alpha$	$\beta$	$\theta_x$	$\theta_y$
68	2.5	0.94	0.985	0.53	0.51

در شکل ۱۱ چگونگی حرکت ماده ردیاب در بازه ۱-۴ کیلومتری ابتدای رودخانه نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، با توجه به قرارگیری منبع آلاینده در ساحل سمت راست، حرکت ماده آلاینده بیشتر در ناحیه‌های سمت راست رودخانه بوده که به تدریج به سمت چپ تحت اثر پراکندگی عرضی حرکت می‌کند که این مسئله به خوبی توسط مدل شبیه‌سازی شده است.

1 Mean Square Error  
 2 Mean Absolute Error

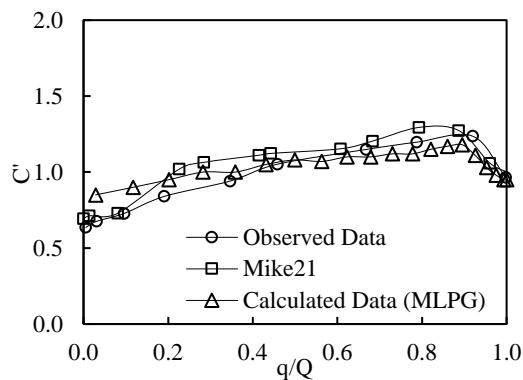


Fig. 14 Normalized dimensionless tracer concentration versus  $q/Q$  (4.725 km)

شکل ۱۴ غلظت نرمال بی بعد شده ردیاب در مقابل  $q/Q$  (کیلومتر ۴/۷۲۵)

در جدول ۴، نتایج روش عددی ارائه شده در این تحقیق با خروجی نرم افزار مایک ۲۱ به کمک شاخص های خطا مقایسه شده است. همان طور که مشخص است میزان  $R^2$  در روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین نسبت به مدل مایک برای مقطع های عرضی ۲/۴۲۵، ۳/۷۲۵ و ۴/۷۲۵ کیلومتر به طور میانگین ۱۱ درصد افزایش داشته است. بالا بودن میزان  $R^2$  و پایین بودن میزان های MSE و MAE می تواند گویای این مهم باشد که حل عددی معادله جابه جایی-پراکندگی کسری به روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین نسبت به مایک ۲۱ به علت در نظر گرفتن مشتقات مرتبه کسری و ضریب های چولگی دارای پاسخ دقیق تری است.

از آنجایی که مدل های دوبعدی به خوبی تأثیر نگهداشت موقت و ناحیه های اشباع زیربستر را در حل عددی در نظر می گیرند، می تواند به عنوان ابزاری ارزشمند به منظور اعتبارسنجی مدل ارائه شده استفاده شود.

قابل توجه دیگر، وجود برخی از مانع ها مانند پل در مسیر جریان می باشد که ممکن است الگوی جریان را تحت شعاع قرار دهد و باعث ایجاد خطا در نتایج شود.

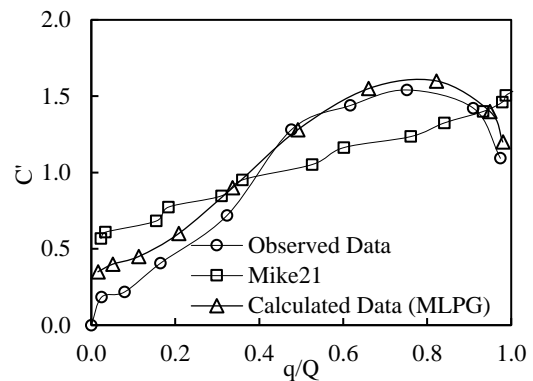


Fig. 12 Normalized dimensionless tracer concentration versus  $q/Q$  (2.425 km)

شکل ۱۲ غلظت نرمال بی بعد شده ردیاب در مقابل  $q/Q$  (کیلومتر ۲/۴۲۵)

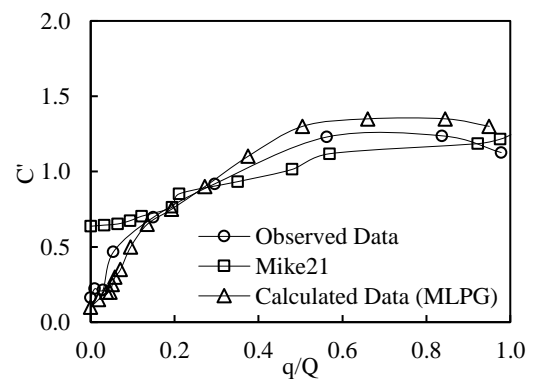


Fig. 13 Normalized dimensionless tracer concentration versus  $q/Q$  (3.725 km)

شکل ۱۳ غلظت نرمال بی بعد شده ردیاب در مقابل  $q/Q$  (کیلومتر ۳/۷۲۵)

جدول ۴ شاخص های خطا در سه مقطع مورد بررسی

Table 4 Error indices in the three sections studied

Index	Cross sections	2.425 km		3.725 km		4.725 km	
		Mike21	Petrov-Galerkin	Mike21	Petrov-Galerkin	Mike21	Petrov-Galerkin
$R^2$ (%)		85	97.35	87	97.46	89	94.92
MSE		0.100	0.016	0.021	0.011	0.008	0.009
MAE		0.281	0.104	0.099	0.095	0.073	0.078



#### ۴- نتیجه گیری

در این تحقیق به منظور حل عددی معادله جابه جایی-پراکندگی کسری از روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین، و برای حل جمله‌ی مربوط به مشتق کسری مکانی از روش کاپوتو استفاده شد. مدل ارائه شده با داده‌های رودخانه آتاباسکا (جریان غیریکنواخت و پایدار) در بازه ۵-۰ کیلومتری اعتبارسنجی شد. تزریق ماده ردیاب به صورت پیوسته و با دبی ثابت به مدت زمان ۵/۲۵ ساعت در بالادست و در نزدیکی ساحل سمت راست رودخانه انجام شد. شرط مرزی در پایین دست و ساحل‌های رودخانه، شرط گرادیان صفر در نظر گرفته شد. فراسنجه‌های ضریب‌های پراکندگی، مشتقات مرتبه کسری و ضریب چولگی با افزایش ضریب تبیین، کاهش میزان میانگین مربعات خطا و میانگین خطای مطلق بین داده‌های مشاهده شده و محاسبه شده بهینه شدند. غلظت نرمال شده بی بعد برای مقطع‌های عرضی ۲/۴۲۵، ۳/۷۲۵ و ۴/۷۲۵ کیلومتر در مقابل  $q/Q$  رسم شد و خروجی مدل با داده‌های مشاهده شده و نتایج تحقیقات ارائه شده توسط ملکی (خروجی مدل تجاری مایک ۲۱) برای هر کدام از مقاطع مقایسه شد. نتایج نشان داد میزان  $R^2$  در روش بدون شبکه محلی پتروو-گالرکین نسبت به مدل مایک به طور میانگین ۱۱ درصد افزایش داشته است. بالا بودن مقدار  $R^2$  و پایین بودن مقادیر MSE و MAE بیانگر کارکرد و دقت قابل قبول روش عددی ارائه شده در حل معادله جابه جایی-پراکندگی کسری می باشد. اعمال مشتق مرتبه کسری سبب شد مدت زمان ماند در ناحیه ماندابی و ناحیه‌های اشباع زیربستر افزایش، و در نتیجه خطای میان داده‌های شبیه سازی شده و داده‌های میدانی کاهش یابد. مدل دوعده‌ی معادله جابه جایی-پراکندگی کسری به دلیل وجود مشتقات مرتبه کسری و ضریب‌های چولگی، انعطاف پذیری بالایی به منظور پیش بینی غلظت ماده ردیاب نسبت به مدل تجاری مایک ۲۱ در آبراهه‌های طبیعی دارد.

#### ۵- فهرست نشانه‌ها

A(X)	ماتریس لنگر وزنی
b	انتهای بازه موردنظر در راستای طولی رودخانه
b'	انتهای بازه موردنظر در راستای عرضی رودخانه
c	غلظت به دست آمده از شبیه سازی ( $\mu\text{gl}^{-1}$ )
C	ماتریس مجهول
C(x,y,t)	غلظت آلاینده در مجرای رودخانه ( $\mu\text{gl}^{-1}$ )
C'	غلظت نرمال بی بعد شده
C <sub>0</sub>	غلظت اولیه در زمان تزریق ( $\mu\text{gl}^{-1}$ )
C <sub>b</sub>	غلظت ماده ردیاب در رودخانه پیش از تزریق ( $\mu\text{gl}^{-1}$ )
C <sub>∞</sub>	غلظت اشباع به دست آمده در رودخانه پس از تزریق ( $\mu\text{gl}^{-1}$ )
C <sup>m</sup>	میزان معلوم غلظت آلاینده در سطح زمانی m
C <sup>m+1</sup>	میزان مجهول غلظت در سطح زمانی m+1
d <sub>i</sub>	فاصله نقطه x <sub>i</sub> از نقطه x (m)
D <sub>x</sub>	ضریب پراکندگی طولی ( $\text{m}^2\text{s}$ )
D <sub>y</sub>	ضریب پراکندگی عرضی ( $\text{m}^2\text{s}$ )
$\frac{dD}{dt}$	مشتق مرتبه کسری به روش کسری کاپوتو
F	ماتریس نیرو
h	عمق جریان (m)
K	ماتریس سختی
n	شمار گره‌های موجود در دامنه مسئله
P(X)	یک بردار از توابع پایه
q	دبی تجمعی عبوری از بخشی از مقطع رودخانه ( $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ )
q <sub>in</sub>	دبی منبع آلاینده ( $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ )
Q	دبی کل رودخانه ( $\text{m}^3\text{s}^{-1}$ )
r <sub>w</sub>	اندازه ناحیه تأثیر تابع وزن (m)
r <sub>sd-X</sub>	شعاع‌های دامنه انتگرال گیری در راستای طول (m)
r <sub>sd-Y</sub>	شعاع‌های دامنه انتگرال گیری در راستای عرض (m)
S	منبع چاه یا چشمه
t	مدت زمان سپری شده بعد از تخلیه ماده آلاینده (hr)
u	سرعت طولی جریان ( $\text{ms}^{-1}$ )
U <sup>h</sup> (X)	تقریب تابع
U <sub>I</sub>	فراسنجه گرهی
v	سرعت عرضی جریان ( $\text{ms}^{-1}$ )
x	فاصله طولی از نقطه تخلیه (m)

a	ابتدای بازه موردنظر در راستای طولی رودخانه
a'	ابتدای بازه موردنظر در راستای عرضی رودخانه

Deymevar, S. (2018). Numerical solution of shallow water equations using mesh-free Petrov-Galerkin method. M.Sc. thesis, University of Birjand, Birjand. (In Persian)

Fischer, H.B., List, J.E., Koh, C.R., Imberger, J. and Brooks, N.H. (1979). Mixing in inland and coastal waters. Academic press.

Gholami, Z., Yasi, M., Nazi Ghameshlou, A. and Mazaheri, M. (2021). Numerical solution of advection-dispersion equation using mesh-free Petrov-Galerkin method (case study: Murray Burn river). Water and Wastewater Science and Engineering (JWWSE), 6(3), 47-57. (In Persian)

Huang, Q., Huang, G. and Zhan, H. (2008). A finite element solution for the fractional advection-dispersion equation. Advances in Water Resources, 31(12), 1578-1589.

Li, J., Chen, Y. and Pepper, D. (2003). Radial basis function method for 1-D and 2-D groundwater contaminant transport modeling. Computational Mechanics, 32(1), 10-15.

Li, X. and Xu, C. (2010). Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation. Communications in Computational Physics, 8(5), 1016.

Lian, Y., Wagner, G.J., and Liu, W.K. (2017). A meshfree method for the fractional advection-diffusion equation. In Meshfree methods for partial differential equations VIII, pp. 53-66, Springer, Cham.

Lin, H. and Atluri, S.N. (2000). Meshless local Petrov-Galerkin(MLPG) method for convection diffusion problems. CMES (Computer Modelling in Engineering & Sciences), 1(2), 45-60.

Lin, Z., Wang, D., Qi, D., and Deng, L. (2020). A Petrov-Galerkin finite element-meshfree formulation for multi-dimensional fractional diffusion equations. Computational Mechanics, 66(2), 323-350.

Liu, G.-R. (2002), Mesh free methods: moving beyond the finite element method, CRC press. New York Washington, D.C.

Liu, G.R. and Gu, Y.T. (2005). An introduction to meshfree methods and their programming. Springer Science & Business Media.

$x_A$	طول گره مجهول (m)
$X_Q$	نقطه گوسی
$y$	فاصله عرضی از نقطه تخلیه (m)
$y_B$	عرض گره مجهول (m)
$\alpha$	مرتبۀ مشتق کسری مکانی در راستای طولی
$\alpha_p$	ضریب پنالته
$\beta$	مرتبۀ مشتق کسری مکانی در راستای عرضی
$\Gamma_{qi}$	مرز داخلی دامنه انتگرال گیری
$\Gamma_{qu}$	قسمتی از مرز ضروری
$\Gamma_{qt}$	قسمتی از مرز طبیعی
$\theta_x$	ضریب چولگی طولی
$\theta_y$	ضریب چولگی عرضی
$\Omega$	دامنه مسئله
$\Omega_q$	دامنه انتگرال گیری
$\Omega_s$	دامنه پایه
$\Omega_w$	دامنه تابع وزن
$\Phi$	تابع شکل

## ۶- منبع ها

Abdeljawad, T., Atangana, A., Gómez-Aguilar, J. F. and Jarad, F. (2019). On a more general fractional integration by parts formulae and applications. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 536, 122494.

Atluri, S.N. and Zhu, T. (1998). A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. Computational Mechanics, 22(2), 117-127.

Belytschko, T., Gu, L. and Lu, Y.Y. (1994). Fracture and crack growth by element free Galerkin methods. Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering, 2(3A), 519.

Blank, L. (1996). Numerical treatment of differential equations of fractional order. Numerical Analysis Report, University of Manchester, Department of Mathematics.

Chapra, S.C. (1997). Surface water-quality modeling (Vol. 1): McGraw-Hill, New York.

Deng, Z.Q., Singh, V.P., and Bengtsson, L. (2004). Numerical solution of fractional advection-dispersion equation. Journal of Hydraulic Engineering, 130(5), 422-431.

Putz, G. and Smith, D.W. (2000). Two-dimensional modelling of effluent mixing in the Athabasca River downstream of Weldwood of Canada Ltd., Hinton, Alberta.

Riahi-Madvar, H., Ayyoubzadeh, S.A., Khadangi, E., and Ebadzadeh, M.M. (2009). An expert system for predicting longitudinal dispersion coefficient in natural streams by using ANFIS. *Expert Systems with Applications*, 36(4), 8589-8596.

Tayebi, A., Shekari, Y., and Heydari, M.H. (2017). A meshless method for solving two-dimensional variable-order time fractional advection–diffusion equation. *Journal of computational physics*, 340, 655-669.

Mahmoodian Shoostari, M. (2009). Principles of open channel flow. Shahid Chamran University Press, Ahvaz. (In Persian)

Maleki, F. (2016). Pollutant mixing investigation in River using 2D modelling and proposing practical relationships, M.Sc. thesis, Tarbiat Modares University, Tehran. (In Persian)

Mohtashami, A. (2017). Using Mesh-free method for groundwater flow modeling in unconfined aquifer. M.Sc. thesis, University of Birjand, Birjand. (In Persian)

Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations. *Mathematics in science and engineering*, 198, 41-119.

