


# Modeling Natural Convection in Heterogeneous Porous Media Using Encoder-Decoder Convolutional Neural Network

Mohammad Reza Hajizadeh Javaran<sup>1</sup>, Mohammad Mahdi Rajabi<sup>2\*</sup>

1- MSc student, Civil and Environmental Engineering Faculty, Tarbiat Modares University, Tehran Iran.

2- Assistant Professor, Civil and Environmental Engineering Faculty, Tarbiat Modares University, PO Box 14115-397, Tehran, Iran.

\* [mmrajabi@modares.ac.ir](mailto:mmrajabi@modares.ac.ir)

Received: 30 January 2022, Accepted: 15 August 2022  J. Hydraul. Homepage: [www.jhyd.iha.ir](http://www.jhyd.iha.ir)

## Abstract

**Introduction:** Natural convection is an important phenomenon in porous media problems. It is encountered in a variety of applications, including in enhanced oil recovery systems and geothermal reservoirs. Physics-based numerical models are widely used to simulate natural convection in porous media. Although these models are usually effective, they commonly suffer from high computational costs. This is notably problematic in repetitive runs at large time and space scales, as in uncertainty analysis, data assimilation, and sensitivity analysis. In recent years, at least four different methods have been proposed to overcome this challenge, including optimizing the numerical solution algorithm, parallel computing, cloud computing, and data-driven methods. In most cases, while data-driven models are capable of handling low-dimensional problems, they have not been very successful in dealing with high-dimensional problems, both accurately and time efficient. To overcome these challenges, we propose using the encoder-decoder convolutional neural networks (ED-CNNs) for heterogeneous porous media. We apply the ED-CNN in the context of ‘*image-to-image*’ regression in the following two use cases in the context of natural convection simulations: (1) as a meta-model to estimate the heat map from the Rayleigh number distribution, and (2) as an optimizer to estimate the Rayleigh number distribution from the heat map.

**Methodology:** The proposed ED-CNN is employed to model the hypothetical example of a square porous enclosure filled with a saturated porous medium. The boundaries are impermeable, and temperatures at two opposite side walls are different, resulting in the formation of natural convection. Heterogeneity in the Rayleigh number across the problem domain is applied through zonation.

A numerical modeling tool is used to generate steady-state heat maps based on a number of randomly selected Rayleigh numbers. The numerical model input-outputs are transformed into square-shaped jpg images of  $64 \times 64$  resolution. Two ED-CNNs are trained, one as a meta-model and the other as an optimizer. Different numbers of training input-output images (including 1000, 2000, 4000, and 5000) generated from the numerical model are employed to evaluate the performance of proposed networks. Two evaluation criteria are used to assess the performance of the developed ED-CNN models: (1) the root mean squared error (RMSE), and (2) the coefficient of determination ( $R^2$ -score). The ED-CNNs have been

developed using Keras and Tensorflow python libraries.

**Results and discussion:** Results show that the ED-CNN accuracy, both as a meta-model and as an optimizer, is satisfactory. For the meta-model case (i.e. prediction of the temperature distribution from the Rayleigh map), the RMSE is mostly smaller than 0.15, and the  $R^2$ -score is around 0.92. In the case of ED-CNN as optimizer (i.e. estimation of the Rayleigh distribution from the heat map), RMSE is mostly in the interval [0.017-0.034], while the  $R^2$ -score is around 0.89. Acceptable results can be obtained using 2000 input-output image pairs and 150 epochs for the meta-model case, and 4000 image pairs and 200 epochs for the optimizer case. Analysis of the spatial distribution of errors shows that maximum errors occur in the middle of the problem domain where the heat map is least sensitive to the Rayleigh number. The ED-CNN model is also evaluated as an uncertainty analysis tool by comparing maps of mean and standard deviation based on the numerical model and ED-CNN predictions, showing a significant agreement with estimation error between them.

**Conclusion:** In this paper, we examine the performance of ED-CNNs, as a specialized architecture of deep neural networks, to solve the forward and inverse problems of natural convection in porous media. For this purpose, we frame the problem as one of image-to-image regression and show that the developed model is able to provide high accuracy approximations with limited training samples, effectively solving the curse of dimensionality problem associated with heterogeneous domains. In practice, the proposed methodology can be applied to image datasets obtained from not only numerical modeling, but also high-resolution imaging and non-destructive scanning techniques, to either estimate the temperature distribution due to natural convection, or to characterize the porous media based on the temperature distribution.

**Keywords:** Natural Convection, Encoder-Decoder Convolutional Neural Network, Porous Media, Image-to-Image Regression.



© 2022 Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.  
This is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license)

(<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

# مدلسازی جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل ناهمگن با استفاده از شبکه عصبی کانولوشنی خود رمز نگار

محمد رضا حاجی زاده جواران<sup>۱</sup>، محمد مهدی رجبی<sup>۲\*</sup>

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی محیط زیست، گروه مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

۲- استادیار مهندسی محیط زیست، گروه مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

\* mmrajabi@modares.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۰، پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۲۴، وب‌گاه نشریه هیدرولیک: [www.jhyd.iha.ir](http://www.jhyd.iha.ir)

**چکیده:** جریان همرفت طبیعی، یک پدیده فیزیکی مهم در محیط متخلخل است. این نوع جریان در پدیده‌های مختلف مانند مخازن زمین گرمایی و سیستم‌های ازدیاد برداشت نفت قابل مشاهده است. یک چالش مهم در مدلسازی عددی جریان همرفت طبیعی زمان زیاد محاسبات است که منجر به طولانی شدن فرایند مدلسازی برای ساعت‌ها و روزهای زیادی می‌گردد. این مشکل خصوصاً در مواردی مانند تحلیل عدم قطعیت و تحلیل حساسیت که نیازمند تکرار چند باره فرایند مدلسازی است و همچنین مسائل ناهمگن و با ابعاد بالا، محسوس‌تر می‌باشد. در این مقاله، سعی شده که از ظرفیت‌های ابزار جدید شبکه عصبی کانولوشنی خود رمزنگار برای غلبه بر چالش زمان محاسبات همراه با تولید جواب‌هایی با دقت بالا در مدلسازی جریان همرفت طبیعی استفاده شود. دو هدف کلی از این پژوهش مورد انتظار است: (۱) توسعه مدل شبکه عصبی کانولوشنی خود رمزنگار به عنوان ابزار مدلسازی مستقیم و تحلیل عدم قطعیت (۲) بررسی عملکرد شبکه عصبی کانولوشنی خود رمزنگار برای مدلسازی معکوس و تخمین پارامترهای موثر در جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل. برای دستیابی به این اهداف، ۵۰۰۰ زوج داده آموزش با کمک مدلسازی عددی تولید شده است. داده‌های ورودی شامل تصاویر نقشه‌های ناهمگن عدد رایلی به عنوان ورودی مدل، و تصاویر خروجی نقشه‌های توزیع دما در محیط متخلخل می‌باشند. نتایج ارزیابی شبکه عصبی نشان می‌دهد شاخص ضریب تعیین برای مدلسازی مستقیم با استفاده از ۲۰۰۰ داده آموزش و برای مدلسازی معکوس با استفاده از ۵۰۰۰ داده بالای ۰.۸۹ می‌باشد.

**کلیدواژگان:** همرفت طبیعی، شبکه عصبی کانولوشنی خود رمزنگار، محیط متخلخل، رگرسیون تصویر به تصویر.

## ۱- مقدمه

جریان در پدیده‌های مختلف طبیعی مانند مخزن‌های زمین گرمایی<sup>۱</sup>، ترسیب دی اکسید کربن<sup>۲</sup> و پدیده‌های انسان ساخت مانند پیل‌های سوختی<sup>۳</sup> و سامانه‌های ازدیاد برداشت نفت<sup>۴</sup> قابل مشاهده است (Nield et al., 2017). در بسیاری از پدیده‌ها، یکی از علت‌های انتقال ماده محلول، گرادیان دما و جریان همرفت طبیعی است (Soboleva, 2018). همچنین در پدیده‌ای مانند

جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل<sup>۱</sup>، نوعی از جریان در محیط متخلخل است که به دلیل اختلاف چگالی در سیال بوجود می‌آید (Balaji et al., 2020). این اختلاف چگالی ممکن است در اثر وجود گرادیان دما یا غلظت بین ناحیه‌های دارای دما یا غلظت بیشتر و ناحیه‌های دارای دما و غلظت کمتر پدید آید. در هنگام همرفت طبیعی به‌طور کلی انتقال حرارت و جریان سیال با یکدیگر همراه می‌شوند (Soboleva, 2018). این نوع

2 Geothermal reservoir

3 Co2 sequestration

4 Fuel cells

5 Enhanced oil recovery system

1 Natural convection in porous media

محدودیت‌های مدل‌های رایج داده‌محور، تاکنون کمتر مورد توجه قرار گرفته است (Wei et al., 2018). یکی از ابزارهای پرکاربرد برای غلبه بر چالش ابعاد مسئله، استفاده از یادگیری عمیق<sup>۴</sup> در قالب شبکه‌های عصبی عمیق<sup>۵</sup> می‌باشد. شبکه عصبی عمیق نوعی از شبکه‌های عصبی با تعداد لایه‌های زیاد است. در این نوع شبکه‌ها، ویژگی‌های داده‌های آموزش در لایه‌های متمادی به صورت "سلسله مراتبی" استخراج می‌شوند که منجر به کاهش نسبی زمان آموزش در مسئله‌های دارای ابعاد بالا، و نیز افزایش دقت پاسخ‌ها می‌شود. موضوعی که بیانگر تفاوت اصلی بین شبکه‌های عصبی عمیق با شبکه عصبی متداول است. داشتن ابعاد بالا موضوعی است که در مورد جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل به علت ماهیت ناهمگن صدق می‌کند و مدلسازی فرایندهای دخیل در جریان همرفت طبیعی را با چالش روبه‌رو کرده است (Shen et al., 2018). یکی از علت‌های کاربردی بودن شبکه عصبی عمیق به عنوان ابزاری برای حل مسئله‌های با ابعاد بالا، توانایی بالای آن‌ها در تخمین تابع متناظر با داده‌های ورودی و خروجی است که امکان مدلسازی مسئله‌هایی را می‌دهد که کمتر با روش‌های دیگر قابل انجام است (Zhu et al., 2018).

شبکه‌های عصبی عمیق در برخی مطالعات پیشین در مبحث‌هایی مرتبط با مدلسازی مسئله‌های آب زیرزمینی و محیط متخلخل مانند مدلسازی جریان (Zhu et al., 2018)، انتقال ماده محلول (He et al., 2020)، جریان با چگالی متغیر (Kreyenberg et al., 2019)، جریان در محیط غیراشباع، جریان چندفازی و ... استفاده شده‌اند. عمده این موارد در حالت پایا<sup>۷</sup> مدلسازی شده‌اند، هر چند امکان مدلسازی جریان وابسته به زمان نیز وجود دارد. در همه‌ی این مطالعات شبکه عصبی با استفاده از داده‌های به دست آمده از مدل عددی آموزش داده شده و سپس در الگوریتم‌هایی مانند تحلیل عدم قطعیت جایگزین مدل عددی شده‌اند (Kreyenberg et al., 2019). در مطالعات

مخزن‌های زمین گرمایی تزریق و برداشت آب می‌تواند بر میزان انتقال حرارت اثرگذار باشد (Nield et al., 2017). برای مدلسازی فرایندهای جریان همرفت طبیعی، مدل‌های عددی متعددی توسعه داده شده و قابلیت شبیه‌سازی آن در نرم‌افزارهای مدلسازی مختلفی مانند SOLIDWORKS (Al-Farhany et al., 2018) و COMSOL (Arefin, 2018) وجود دارد. اغلب مطالعات پیشین به وسیله مثال فرضی با دامنه مربعی شکل و به صورت دوبعدی جریان همرفت طبیعی را مدلسازی کرده‌اند (Al-Farhany et al., 2018; Ataei-Dadavi et al., 2019). یک چالش مهم در مدلسازی عددی جریان همرفت طبیعی در مقیاس بزرگی مانند مخزن‌های زمین گرمایی، زمان زیاد محاسبه‌ها است. این مسئله به‌ویژه در مواردی مانند تحلیل عدم قطعیت<sup>۱</sup> و تحلیل حساسیت<sup>۲</sup> که نیازمند تکرار چند باره فرایند مدلسازی است، محسوس‌تر می‌باشد. در مطالعات پیشین برای رویارویی با این چالش دست‌کم چهار دسته راهکار ارائه شده که عبارتند از توسعه روش‌های حل عددی بهینه، پردازش موازی، پردازش ابری<sup>۳</sup> (Hayley, 2018) و روش‌های مدلسازی داده‌محور. مورد آخر، یعنی مدلسازی داده‌محور عبارت است از یادگیری رابطه میان پارامترهای ورودی و متغیرهای خروجی با استفاده از مجموعه‌ای از زوج‌داده‌های ورودی و خروجی، بدون اینکه به‌ناچار معادله‌های دیفرانسیل حاکم بر فیزیک مسئله در محاسبه‌ها وارد شود (Varol et al., 2018). اگرچه از مدل‌های داده‌محور تاکنون در مطالعات بسیاری برای شبیه‌سازی جریان همرفت طبیعی استفاده شده، اما دو چالش مهم همچنان در این زمینه باقی است. نخست اینکه مدل‌های داده‌محور به‌طور کلی در مسئله‌های با ابعاد بالا، به دلیل افزایش تصاعدی حجم داده‌های آموزش مورد نیاز و در پی آن افزایش زمان محاسبه‌ها مربوط به آموزش مدل، به مشکل برخورد می‌کنند (Rajabi et al., 2020). دومین چالش، استفاده مستقیم از شبه‌مدل‌ها برای مدلسازی معکوس یا تخمین پارامتر است که به دلیل

4 Deep learning  
5 Deep neural network  
6 Feature  
7 Steady state

1 Uncertainty analysis  
2 Sensitivity analysis  
3 Cloud computing

در نظر گرفته شده است که رویکردی رایج در مسئله‌های مختلف محیط متخلخل می‌باشد (Vu and Jardani, 2022). مثال فرضی دارای پاسخ‌های مشخص بوده که امکان برآورد خطا را ایجاد می‌کند. دو هدف کلی از این پژوهش مورد انتظار است، (۱) توسعه مدل شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار به عنوان ابزار مدل‌سازی مستقیم و تحلیل عدم قطعیت (۲) بررسی عملکرد شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار برای مدل‌سازی معکوس و تخمین پارامترهای موثر در جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل.

در بخش بعد، در آغاز به بیان مبانی نظری اعم از معادله‌های حاکم بر جریان همرفت طبیعی، فرضیه و معماری شبکه عصبی کانولوشنی و آموزش شبکه عصبی و صحت سنجی آن پرداخته می‌شود. در بخش سوم، عملکرد شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار با توجه به نتایج سنجیده شده، و در پایان به جمع بندی و نتیجه‌گیری یافته‌ها پرداخته خواهد شد.

## ۲- مبانی نظری و روش‌ها

### ۲-۱- تشریح مثال فرضی

در این پژوهش، عملکرد شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار برای مدل‌سازی جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل بررسی شده است. برای این هدف، از یک مثال فرضی که در بررسی جریان همرفت طبیعی کاربرد زیادی دارد، استفاده شده است. این نمونه یک دامنه مربعی شکل از محیط متخلخل به کلی اشباع، با طول ضلع  $L$  می‌باشد، که بعد سوم آن به اندازه کافی بزرگ است که در واقع می‌توان انتقال جریان و حرارت را در این دامنه دو بعدی فرض کرد. همه اضلاع مربع نفوذ ناپذیر، و اضلاع بالا و پایین در شرایط بی‌دررو<sup>۳</sup> با شرایط مرزی نیومن تعریف شده اند. همچنین دیواره‌های کناری تحت تاثیر دمای ثابت  $T_L$  و  $T_R$  در دو سمت، هستند که  $(T_R < T_L)$  و شرایط مرزی دریکله بر آن حاکم است. وجود اختلاف دما میان این دو مرز، جریان همرفت طبیعی را ایجاد می‌کند

مذکور، این مدل‌ها افزون بر دقت بالای پیش‌بینی‌ها، زمان محاسبه‌ها را نسبت به مدل عددی به میزان زیادی کاهش داده اند.

در مدل‌سازی مسئله‌هایی که داده‌های ورودی و خروجی هر دو دارای ابعاد بالا هستند، می‌توان از روش رگرسیون تصویر به تصویر<sup>۱</sup> استفاده کرد. یکی از ابزارهای مناسب برای انجام رگرسیون تصویر به تصویر، استفاده از شبکه عصبی کانولوشنی<sup>۲</sup> (CNN) است. این نوع شبکه از متداول‌ترین ابزارهایی است که در مطالعات گذشته برای مدل‌سازی مستقیم و معکوس جریان در محیط متخلخل استفاده شده است (Kreyenberg et al., 2019). Zhu et al. (2018) و Mo et al. (2019) با استفاده از شبکه عصبی کانولوشنی مسئله‌هایی را با ابعاد بسیار بالا به صورت مستقیم مدل‌سازی کردند. همچنین در بحث مدل‌سازی معکوس و تخمین پارامتر نیز با کمک این نوع شبکه، پارامترهایی مانند هدایت هیدرولیکی (Tartakovsky et al., 2020)، هدایت گرمایی (wei et al., 2018)، نفوذپذیری (Kamrava et al., 2020) تخمین زده شده اند. با توجه به اینکه مدل‌سازی جریان همرفت طبیعی با استفاده از شبکه‌های عصبی عمیق به طور عام، و شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار به طور خاص، در مطالعات پیشین کمتر مورد توجه قرار گرفته، در این پژوهش سعی شده است مدل‌سازی مستقیم و معکوس جریان همرفت طبیعی با استفاده از این ابزار بتوان انجام شود، و مواردی چون میزان بیشینه خطا، محل بیشینه خطا و ... ارزیابی شود. برای این هدف، یک مثال فرضی متداول انتخاب و مدل‌سازی شده است و با استخراج داده‌های آموزش، به آموزش شبکه عصبی و بررسی نتایج پرداخته شده است. دلیل استفاده از مثال فرضی این است که در این مطالعه هدف توسعه روشی جدید برای مدل‌سازی مستقیم و معکوس جریان همرفت طبیعی با کمک شبکه‌های عصبی کانولوشنی خودرمنگار است که در آن با کمک داده‌های آموزش تولید شده در مثال فرضی، حالت‌های ممکن مختلف این جریان بر مبنای پارامترهای ورودی مختلف

1 Image to image regression

2 Convolutional neural network

3 Adiabatic

$$u = -\frac{\partial p}{\partial x} \quad (2)$$

$$v = -\frac{\partial p}{\partial y} + Ra \cdot T \quad (3)$$

$$Ra = \frac{k \cdot \rho_c \cdot \beta \cdot g \cdot \Delta T \cdot H}{\mu \cdot \alpha} \quad (4)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (5)$$

که در آن  $u$  و  $v$  به ترتیب سرعت در برای  $x$  و  $y$ ، فشار  $p$  و دما  $T$  می‌باشند. عدد رایلی توسط رابطه ۴ معرفی می‌شود. پارامترهای این معادله شامل  $k$  ( $m^2$ ) هدایت هیدرولیکی،  $\rho_c$  ( $kg/m^3$ ) چگالی سیال،  $\beta$  ( $1/K$ ) انبساط حرارتی سیال،  $g$  ( $m/s^2$ ) شتاب گرانش،  $\Delta T$  ( $K$ ) گرادیان دما بین مرز چپ و راست،  $H$  ( $m$ ) طول ضلع دامنه،  $\mu$  ( $kg/m \cdot s$ ) لزجت سیال و  $\alpha$  ( $m^2/s$ ) ضریب نفوذپذیری گرمایی محیط متخلخل می‌باشند.

با ساخت یک مدل اجزا محدود در محیط نرم‌افزار کامسول<sup>۴</sup> که در آن حل معادله‌های بالا با کمک ماژول‌های قانون داری و انتقال حرارت و با گسسته‌سازی مکانی و زمانی انجام می‌شود، دو دسته داده شامل تصویرهای نقشه انتقال حرارت در محیط متخلخل و نقشه ناهمگن عدد رایلی برای آموزش شبکه عصبی استخراج شدند. این مدل کامسول همچنین به وسیله مقایسه با حل سری فوریه<sup>۵</sup> بررسی و امتحان شد.

### ۳-۲- شبکه عصبی کانولوشنی

شبکه عصبی کانولوشنی نوعی شبکه عصبی عمیق است که با الهام از عملکرد بینایی مغز انسان طرح‌ریزی شده، و به‌طور کلی برای حل مسئله‌هایی با داده‌های تصویری به کار می‌رود (Gu et al., 2018). این شبکه در کلی‌ترین حالت دارای لایه‌های کانولوشن<sup>۶</sup>، لایه‌های ادغام<sup>۷</sup> و لایه‌های تماماً متصل<sup>۸</sup> است. هر لایه کانولوشن شامل

(Al-Farhany et al., 2018). سیال نیتونی و تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود.

محیط متخلخل مورد نظر، ناهمگن بوده و این ناهمگنی با تکیه بر روش ناحیه‌بندی<sup>۱</sup> (Braester and Vadasz, 1993)، توسط مربع‌های کوچک  $5 \times 5$  درون دامنه اصلی در نظر گرفته شده است. هر کدام از این مربع‌ها دارای ویژگی دمایی و هیدرولیکی منحصر به فرد هستند که با عدد رایلی<sup>۲</sup> معرفی می‌شوند. اعداد رایلی متناظر با هر ناحیه مربعی شکل به کمک توزیع احتمال یکنواخت به صورت تصادفی و در بازه بین ۱۰ تا ۱۰۰۰ انتخاب شده است (شکل ۱).

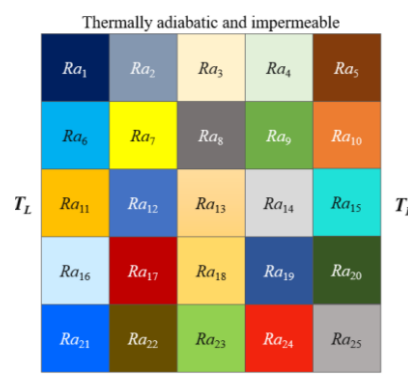


Fig 1. Schematic of test case  
شکل ۱ نمای کلی دامنه مسئله

### ۲-۲- فرضیه و معادله‌های حاکم بر مدل عددی

جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل بر مبنای معادله انتقال حرارت که بیانگر بقای انرژی است، قانون داری که نشان دهنده پایداری مومنوم خطی است، و همچنین معادله پیوستگی برای بیان بقای جرم تعریف می‌شود. همه‌ی این معادله‌ها در شرایط تخمین بوسینسک<sup>۳</sup> و فرضیه‌های یاد شده، با یکدیگر ادغام شده می‌شوند تا معادله‌های حاکم بر جریان همرفت طبیعی در سیال با چگالی متغیر و تابع دما، به صورت رابطه‌های زیر به دست آیند (Fajraoui et al., 2017).

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

4 Comsol

5 Fourier series solution

6 Convolution layer

7 Pooling layer

8 Fully connected layer

1 Zonation

2. Rayleigh Number

3 Boussinesq approximation

همرفت طبیعی از تابع فعال‌ساز واحد یکسو ساز خطی<sup>۶</sup> یا Relu استفاده شده، اما در شبکه عصبی مورد استفاده در مدلسازی معکوس در سه لایه انتهایی شبکه از تابع فعال‌ساز سیگموئید<sup>۷</sup> استفاده شده است. تابع فعال‌ساز با افزودن عامل غیرخطی به مسئله قابلیت حل مسئله‌های غیرخطی را به شبکه عصبی کانولوشنی اضافه می‌کند (Tahmasebi et al, 2020). همچنین الگوریتم بهینه‌سازی RMSprop و Adam به ترتیب برای آموزش شبکه عصبی برای مدلسازی مستقیم و مدلسازی معکوس به کار گرفته شدند (Rabbani et al., 2020). میزان نرخ آموزش ۰.۰۰۰۰۱ برای ۳۰۰ دور<sup>۸</sup> آموزش شبکه عصبی با اندازه بچ<sup>۹</sup> ۲۴ در نظر گرفته شد (شکل ۲).

## ۲-۴- آموزش و صحت‌سنجی شبکه عصبی

برای آموزش شبکه عصبی از روش رگرسیون تصویر به تصویر استفاده شده است. در این روش هر دو داده ورودی و خروجی شبکه عصبی تصویر هستند و رگرسیون تصویری به صورت پیکسل به پیکسل بین داده‌ها انجام می‌شود. بر همین مبنا داده‌های آموزش شبکه عصبی، به شکل سیاه و سفید و با فرمت PNG تولید و ذخیره شده‌اند. لازم به یادآوری است که در این پژوهش، تصویرها برای نمایش بهتر به صورت رنگی به تصویر کشیده شده‌اند. تعداد ۵۰۰۰ زوج تصویر متناظر با عددی رایلی- توزیع دما با رزولوشن ۶۴ × ۶۴ برای آموزش شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار استفاده شده است. این رزولوشن یک مقدار بهینه از برای قابلیت نمایش و همچنین زمان اجرای شبکه عصبی می‌باشد که با سعی و خطا به دست آمده است.

از بین زوج تصویرهای یادشده، ۲۰ درصد به عنوان داده تست<sup>۱۰</sup> و ۳۰ درصد برای صحت‌سنجی<sup>۱۱</sup> شبکه، و ۵۰ درصد باقی مانده برای آموزش استفاده شده‌اند. مدل

مجموعه‌ای از فیلترها (به فرم یک ماتریس  $N \times N$ ) با وزن  $W_i$  است، که خروجی هر فیلتر از حاصل ضرب میزان پیکسل‌های ورودی هر ناحیه که ماتریس فیلتر روی آن حرکت می‌کند در وزن فیلتر به دست می‌آید (Jiang et al., 2021). یکی از برتری‌های این نوع شبکه عصبی نسبت به شبکه‌های عصبی متداول دیگر، قابلیت بالای این شبکه در کار با داده‌های با ابعاد بالا<sup>۱</sup> است، به این دلیل که شبکه عصبی کانولوشنی محاسبه‌ها را به طور کامل برای تک تک اعضای ماتریس ورودی انجام نمی‌دهد، بلکه به کمک فیلترها که ابعادی کمتر از ماتریس اصلی دارند به صورت پراکنده محاسبه‌ها را انجام می‌دهند، به این صورت که فیلترها با حرکت بر روی ماتریس اصلی و انجام محاسبه‌ها بر روی بخش کوچکی از ماتریس اصلی، یک ماتریس با ابعاد کمتر به عنوان خروجی تولید می‌کنند که این عمل کمتر شدن زمان محاسبه‌ها را نیز به همراه دارد (Hur et al., 2019).

از جمله متداول‌ترین و پرکاربردترین انواع شبکه‌های عصبی کانولوشنی، شبکه عصبی خود رمزنگار<sup>۲</sup> است (Ronneberger et al., 2015). این شبکه از دو زیر شبکه تشکیل شده است، زیر شبکه کدگذار<sup>۳</sup> و زیر شبکه کدگشا<sup>۴</sup>. در زیر شبکه کدگذار، شبکه عصبی با کوچک کردن ابعاد تصویر ورودی (از لحاظ عمقی و رزولوشن)، ویژگی‌های آن را استخراج می‌کند. سپس در زیر شبکه کدگشا که به طور کلی معماری همانند زیر شبکه کدگذار اما در برای عکس را دارد، تصویر با کمک ویژگی‌های استخراج شده بازسازی می‌شود تا ابعاد و رزولوشن همانند تصویر اولیه مجدداً ایجاد شود (Ji et al., 2021). شکل ۲ شبکه عصبی مورد نظر را نشان می‌دهد (Rajabi et al., 2022). این شبکه از ۱۵ لایه کانولوشن تشکیل شده و با هدف تسریع در اجرای شبکه و بهبود دقت آن، هر لایه با یک لایه بچ‌نرمالیزیشن<sup>۵</sup> همراه می‌شود. در همه لایه‌های شبکه عصبی مورد استفاده در مدلسازی مستقیم جریان

6 Rectified linear unit  
7 Sigmoid  
8 Epoch  
9 Batch size  
10 Test data  
11 Validation

1 High dimensional  
2 Auto encoder  
3 encoder  
4 decoder  
5 Batch normalization layer

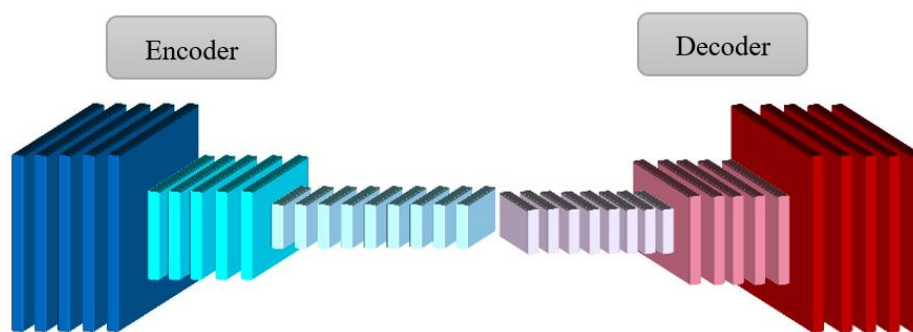


Fig. 2 Schematic of the proposed ED-CNN

شکل ۲ نمای کلی معماری شبکه عصبی کانولوشنی خود رمز نگار

است (شکل ۳). همانطور که از نمودار شکل ۳a پیداست، میزان خطا با افزایش تعداد داده از ۱۰۰۰ به ۲۰۰۰ کاهش یافته، در حالیکه افزایش تعداد نمونه‌ها به ۴۰۰۰ و در نهایت ۵۰۰۰ باعث افزایش قابل توجه در دقت شبکه نمی‌شود. این موضوع در نمودار شکل ۳b نیز نشان داده شده است. با آموزش شبکه عصبی به کمک ۲۰۰۰ داده آموزش به دقت بالای ۰/۹ برای شاخص RMSE می‌رسیم و این تعداد داده برای مدلسازی مستقیم شبکه عصبی کافی است. همچنین از نمودار شکل ۳a استنباط می‌شود که تا حدودی روند کاهشی میزان خطا پس از حدود ۱۵۰ دور آموزش شبکه متوقف می‌شود و نیازی به آموزش به میزان بالاتر نیست.

همچنین، عملکرد کلی شبکه در پیش بینی همه ۱۰۰۰ داده تست نیز مورد بررسی قرار گرفته است. برای این منظور میزان RMSE در تمام داده‌های تست محاسبه و بر مبنای آن نمودار شکل ۴a ترسیم شد. این نمودار نشان می‌دهد بیش از ۸۵ درصد خطاهای آموزش کمتر از ۰/۱۵ هستند. همچنین میزان خطای مکانی در دامنه در شکل ۴b به نمایش در آمده که نشان دهنده میزان کم خطای کل در دامنه است. همچنین این تصویر نشان می‌دهد، بیشینه خطا در مرکز دامنه رخ می‌دهد که گرادینان دمایی در بالاترین حد خود قرار دارد. برای بررسی ملموس‌تر عملکرد شبکه عصبی به عنوان ابزار مدلسازی مستقیم، یک نمونه از پیش‌بینی‌های شبکه عصبی به طور تصادفی انتخاب و بررسی شده است. در شکل ۵ مقایسه بین نقشه توزیع دمایی ناشی از جریان همرفت طبیعی به دست آمده از شبیه‌سازی عددی و تخمین شبکه عصبی کانولوشنی

شبکه عصبی در بستر کراس<sup>۱</sup> و تنسورفلو<sup>۲</sup> تحت زبان برنامه نویسی پایتون اجرا شده است. برای ارزیابی عملکرد این شبکه از دو شاخص متداول یعنی روش خطای جذر میانگین مربعات<sup>۳</sup> یا (RMSE) و ضریب تعیین<sup>۴</sup> یا (R<sup>2</sup>- SCORE) استفاده شده است (Kumar et al., 2020).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_{pred} - y_{true})^2} \quad (6)$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (y_{pred} - y_{true})^2}{\sum_{i=1}^N (y_{pred} - y_{mean \ true \ values})^2} \quad (7)$$

### ۳- نتایج و بحث

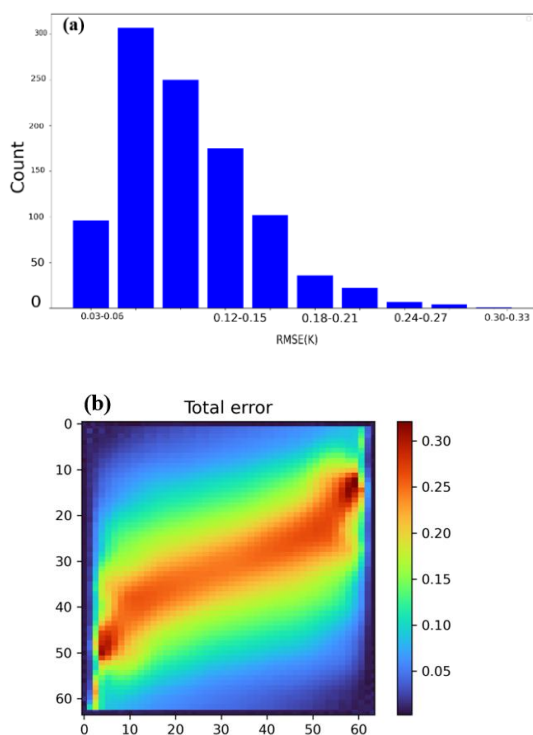
#### ۳-۱- مدلسازی مستقیم

در مدلسازی مستقیم، هدف تخمین توزیع دمایی متناظر با جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل بر مبنای تصویر نقشه عدد رایلی به عنوان ورودی است. برای ارزیابی دقت پیش‌بینی شبکه عصبی میزان RMSE و R<sup>2</sup>- SCORE محاسبه و نمودار آن رسم شده است. برای رسیدن به تعداد مناسب داده آموزش، در آغاز شبکه عصبی با ۱۰۰۰ تصویر آموزش داده شده و پس از بررسی دقت پیش‌بینی‌ها، این تعداد به ۲۰۰۰، ۴۰۰۰ و ۵۰۰۰ داده افزایش داده شده است و در هر مرحله نمودار مربوط به آن، بر مبنای هر دو شاخص خطای یاد شده ارزیابی شده

- 1 Keras
- 2 Tensorflow
- 3 Root mean squared error
- 4 Coefficient of determination



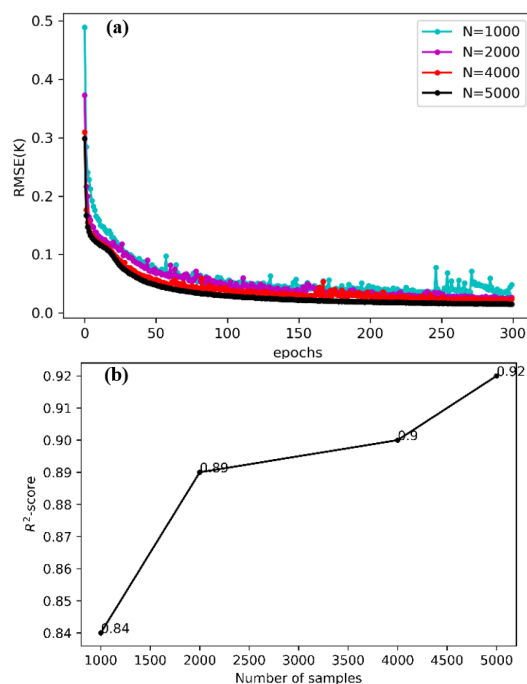
بر مبنای میزان خطای نسبی تک تک پیکسل‌های تصویر به دست آمده، نشان دهنده میزان دقت بالای پیش بینی شبکه عصبی در این مثال می‌باشد.



**Fig. 4** (a) RMSE histogram for ED-CNN as meta-model (b) Total error distribution map for ED-CNN as meta-model

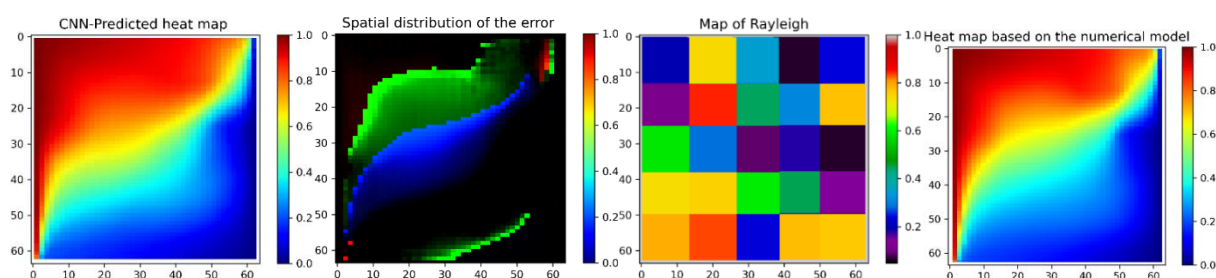
شکل ۴ (a) نمودار هیستوگرام میزان خطای آموزش مدل‌سازی مستقیم (b) نقشه توزیع خطای کل برای مدل‌سازی مستقیم

بر مبنای یک نقشه واحد عدد راییلی به تصویر کشیده شده است. در این تصویر نقشه حاصل از تخمین شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار و نقشه حاصل از مدل عددی تا حد زیادی مشابهت دارند. همچنین نقشه خطای نسبی که



**Fig. 3** (a) RMSE plot for ED-CNN as meta-model (b)  $R^2$ -SCORE for ED-CNN as meta-model

شکل ۳ نمودار خطای (a) و  $R^2$ -SCORE شبکه مدل‌سازی مستقیم



**Fig. 5** Comparison of numerical model and ED-CNN predictions for ED-CNN as meta-model

شکل ۵ نمونه پیش بینی شبکه عصبی به عنوان ابزار مدل‌سازی مستقیم

و بر مبنای تخمین شبکه عصبی کانولوشنی در شکل ۶ به نمایش در آمده اند. میزان خطای کم بین نقشه میانگین و انحراف معیار حاصل از مدل عددی و شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار، نشانگر عملکرد مناسب این شبکه در بحث تحلیل عدم قطعیت می‌باشد. در هر دو مورد میانگین و انحراف معیار، بیشینه خطا در مرکز دامنه و در

### ۳-۲- تحلیل عدم قطعیت

در این قسمت عملکرد شبکه عصبی برای مدل‌سازی مستقیم را به عنوان ابزار تحلیل عدم قطعیت، بر مبنای شبیه سازی مدل عددی به روش مونت کارلو با محاسبه میانگین و انحراف معیار پیش بینی‌ها مورد بررسی قرار دادیم. نقشه میانگین و انحراف معیار بر مبنای مدل عددی

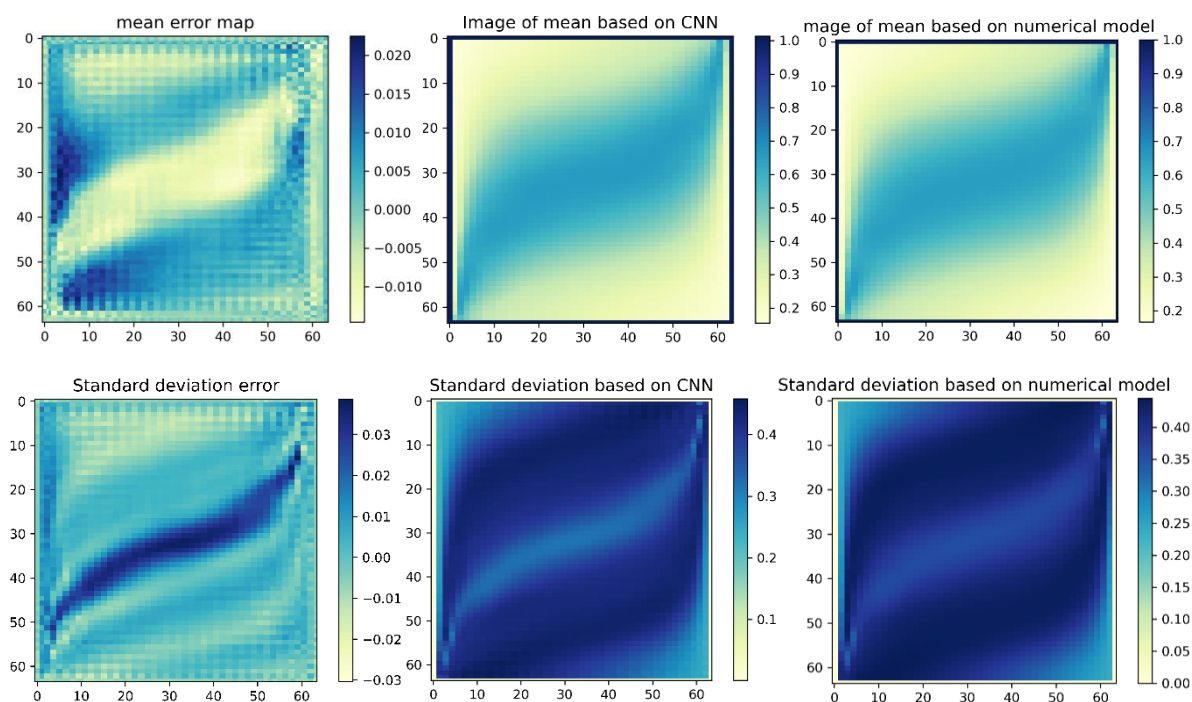


Fig. 6 Mean and standard deviation distribution map and their estimation errors

شکل ۶ نقشه توزیع میانگین و انحراف معیار بر مبنای مدل عددی و پیش‌بینی شبکه عصبی کانولوشنی

خطای RMSE با افزایش تعداد داده‌های آموزش از ۱۰۰۰ به ۲۰۰۰ با کاهش محسوسی همراه نمی‌شود، در حالی که میزان خطا هنگام آموزش شبکه عصبی با ۴۰۰۰ داده، به طور قابل توجهی کاهش می‌یابد. نمودار شکل ۷b نیز موید افزایش دقت شبکه هنگام استفاده از ۴۰۰۰ داده آموزش می‌باشد. میزان  $R^2$ -SCORE در این حالت حدود ۰/۸۸ می‌باشد.

برای بررسی عملکرد کلی شبکه عصبی کانولوشنی در تخمین پارامتر، نقشه خطای کل بر مبنای میزان خطا در تمام پیکسل‌های تصویر نقشه رایلی رسم شده است (شکل ۸b). این نقشه نشان می‌دهد عمده خطای مربوط به پیش‌بینی نقشه رایلی، در مرکز دامنه رخ می‌دهد، جایی که تغییر پذیری نقشه حرارت کمترین حساسیت را به تغییر پذیری عدد رایلی دارد. همچنین میزان RMSE برای هر تخمین محاسبه شد و در تصویر شکل ۸a نمودار ستونی آن ترسیم شد. این نمودار نشان می‌دهد بیشتر خطای پیش‌بینی در بازه (۰/۱۷ - ۰/۳۴) قرار دارد.

همچنین شکل ۹ نمونه‌ای از تخمین عدد رایلی توسط شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار، بر مبنای نقشه توزیع حرارت به عنوان ورودی را نشان می‌دهد. اختلاف کم بین نقشه واقعی عدد رایلی و تخمین شبکه عصبی و همچنین

محل بیشینه گرادیان حرارتی رخ داده است و هر چه به سمت کناره دامنه نزدیک‌تر می‌شویم، از میزان خطاها کاسته می‌شود. همچنین میزان صرفه‌جویی در زمان محاسبه‌ها حاصل از جایگزین نمودن مدل عددی با شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار در محاسبه‌ها مونت کارلو، با استفاده از شاخص نسبت صرفه‌جویی در زمان<sup>۱</sup> (TSR) برابر رابطه زیر محاسبه شده است (Rajabi et al., 2017):

$$TSR = \frac{t_s - t_m}{t_s} \quad (8)$$

محاسبه‌ها نشان می‌دهد که این شاخص بالای ۰/۹۹ می‌باشد. در این رابطه،  $t_s$  زمان مورد نیاز برای اجرای مدل عددی و  $t_m$  زمان مورد نیاز برای اجرای شبکه عصبی کانولوشنی می‌باشد.

### ۳-۳- مدلسازی معکوس و تخمین پارامتر

در این قسمت به تحلیل و بررسی نتایج عملکرد شبکه عصبی کانولوشنی به عنوان ابزار تخمین پارامتر در فرایند مدلسازی معکوس پرداخته می‌شود. نمودار شکل ۷a نشان می‌دهد،

1 Time saving ratio

به عنوان ابزاری برای تخمین پارامترهای موثر در جریان همرفت طبیعی می‌باشد.

نقشه خطای مطلق که از تفاضل پیکسل به پیکسل تصویرهای تخمین شبکه عصبی و نقشه واقعی رایلی به دست آمده، نشان دهنده دقت مناسب شبکه عصبی مذکور

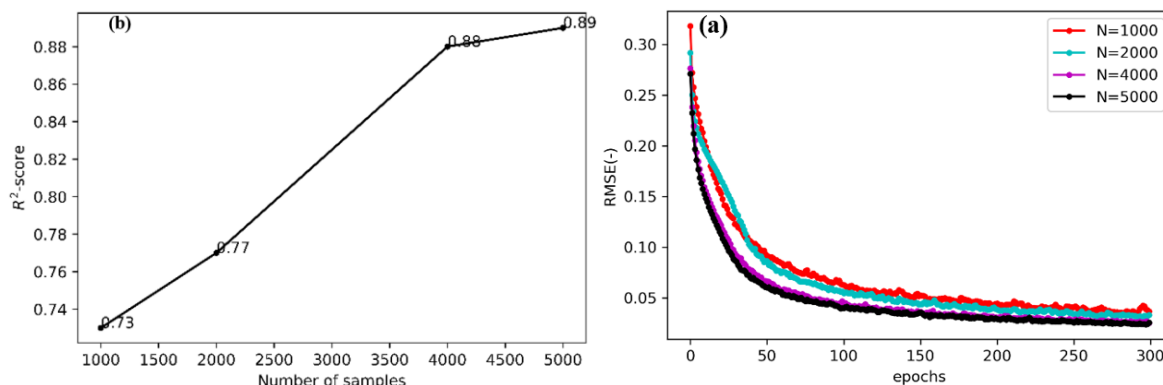


Fig. 7 (a) RMSE plot for ED-CNN as optimizer (b) R<sup>2</sup>-SCORE for ED-CNN as optimizer  
شکل ۷ (a) نمودار خطای RMSE (b) و R<sup>2</sup>-SCORE شبکه مدلسازی معکوس

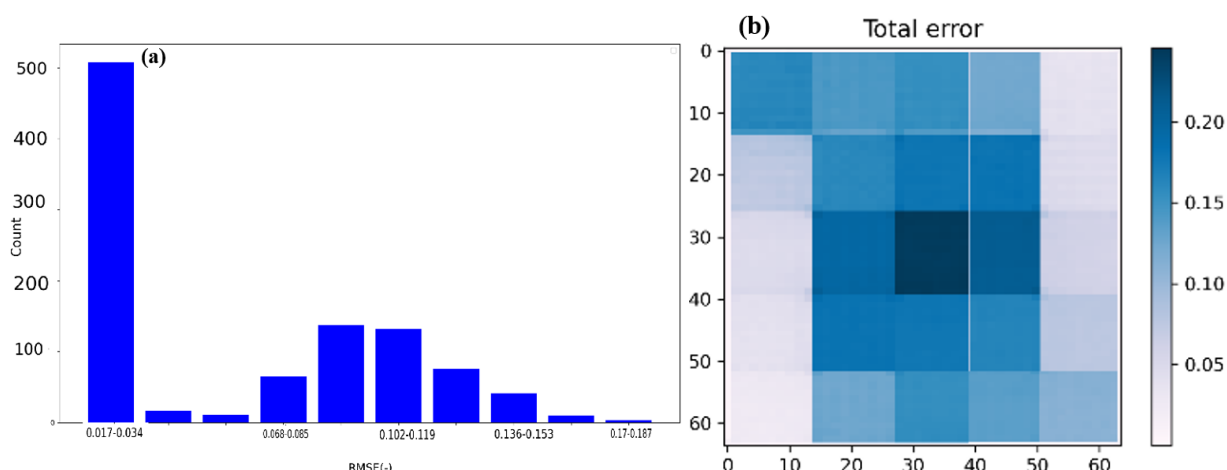


Fig. 8 (a) RMSE histogram for ED-CNN as optimizer (b) Total error distribution map for ED-CNN as optimizer  
شکل ۸ (a) نمودار ستونی میزان خطای آموزش مدلسازی معکوس (b) نقشه توزیع خطای کل برای مدلسازی معکوس

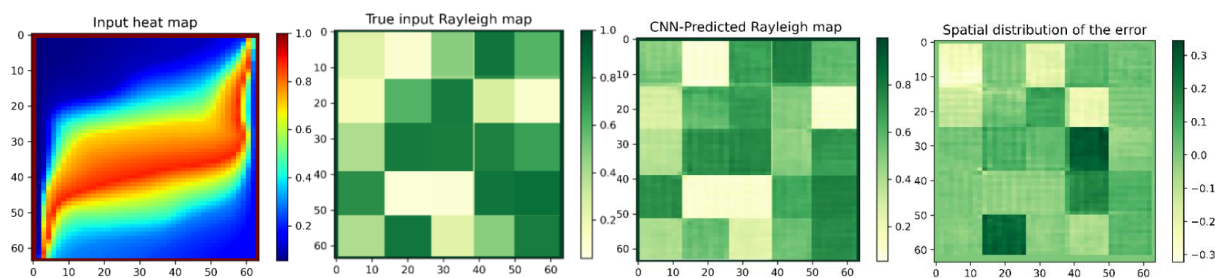


Fig. 9 Comparison of numerical model and ED-CNN predictions for ED-CNN as optimizer  
شکل ۹ نمونه پیش‌بینی شبکه عصبی به عنوان ابزار مدلسازی معکوس

برای غلبه بر چالش زمان محاسبه‌ها در مدلسازی مستقیم و معکوس مسئله یاد شده، در کنار حفظ دقت مدلسازی، می‌باشد. برای این هدف، یک مثال فرضی از یک محیط متخلخل ناهمگن طراحی شد و با کمک نرم‌افزار مدلسازی

#### ۴- خلاصه و جمع‌بندی

در این پژوهش عملکرد شبکه عصبی کانولوشنی خودرمنگار برای حل مسئله جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل بررسی شد. هدف توسعه روشی جدید

$g$	شتاب گرانش، $(m/s^2)$
$\Delta T$	گرادیان دما، $(K)$
$H$	طول ضلع دامنه، $(m)$
$\mu$	لزجت سیال، $(kg/m \cdot s)$
$\alpha$	ضریب نفوذپذیری گرمایی محیط متخلخل، $(m^2/s)$
$t_s$	زمان مورد نیاز برای اجرای مدل عددی
$t_m$	زمان مورد نیاز برای اجرای شبکه عصبی کانولوشنی

### ۶- منابعها

Arefin, A.M.E. (2016). Thermal analysis of modified pin fin heat sink for natural convection. In 2016 5th International Conference on Informatics, Electronics and Vision (ICIEV), pp. 1-5). IEEE.

Ataei-Dadavi, I., Chakkingal, M., Kenjeres, S., Kleijn, C.R. and Tummers, M.J. (2019). Flow and heat transfer measurements in natural convection in coarse-grained porous media. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 130, 575-584.

Balaji, C., Srinivasan, B. and Gedupudi, S. (2020). *Heat transfer engineering: fundamentals and techniques*. Academic Press.

Braester, C. and Vadasz, P. (1993). The effect of a weak heterogeneity of a porous medium on natural convection. *Journal of Fluid Mechanics*, 254, 345-362.

Fajraoui, N., Fahs, M., Younes, A. and Sudret, B. (2017). Analyzing natural convection in porous enclosure with polynomial chaos expansions: Effect of thermal dispersion, anisotropic permeability and heterogeneity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 115, 205-224.

Gu, J., Liu, T., Wang, X., Wang, G., Cai, J. and Chen, T. (2018). Recent advances in convolutional neural networks. *Pattern Recognit.* 77, 354-377.

He, Q., Barajas-Solano, D., Tartakovsky, G. and Tartakovsky, A.M. (2020). Physics-informed neural networks for multiphysics data assimilation with application to subsurface transport. *Advances in Water Resources*, 141, 103610.

Hur, C. and Kang, S. (2019). Entropy-based pruning method for convolutional neural networks. *The Journal of Supercomputing*, 75(6), 2950-2963.

عددی کامسول داده‌های آموزش شبکه عصبی تولید شد. همچنین از معماری شبکه عصبی کانولوشنی خود رمز نگار به عنوان یک شبکه عصبی متداول برای آموزش داده مبتنی بر تصویرهای، برای مدلسازی مستقیم و معکوس جریان همرفت طبیعی استفاده شد. برای شبکه عصبی به عنوان ابزار مدلسازی مستقیم، نتایج نشان‌دهنده میزان خطای پیش‌بینی پایین با استفاده از ۲۰۰۰ داده آموزش و حدود ۱۵۰ دور آموزش است. همچنین نقشه خطای کل نشان‌دهنده بیشینه خطا در مرکز دامنه، در محل بیشینه گرادیان حرارت می‌باشد. همچنین نتایج تحلیل عدم قطعیت، موید قدرت مناسب این شبکه به عنوان ابزار تحلیل عدم قطعیت است. نتایج آموزش شبکه عصبی برای تخمین پارامتر نیز بیانگر نیاز این شبکه به تعداد داده بیشتر نسبت به حالت مستقیم (۴۰۰۰ داده آموزش) و زمان درازمدت‌تر آموزش (۲۵۰ دور) می‌باشد، هر چند بعد از آموزش شبکه با تعداد داده و زمان مناسب، این شبکه نیز به دقت مناسبی می‌رسد. شاخص نسبت صرفه جویی در زمان، نشان‌دهنده کاهش حدود ۹۹ درصدی زمان محاسبه‌ها نسبت به مدل عددی، در محاسبه‌ها مربوط به تحلیل عدم قطعیت با روش مونت کارلو می‌باشد. مجموع نتایج نشان می‌دهد، این شبکه عصبی کانولوشنی خودرمزنگار می‌تواند ابزار مناسبی برای مدلسازی مستقیم و معکوس و تحلیل عدم قطعیت در مسئله‌های جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل ناهمگن باشد. همچنین در بررسی‌های آتی می‌توان از این روش برای مدلسازی مستقیم و معکوس جریان همرفت طبیعی در محیط متخلخل با ناهمگنی قوی‌تر استفاده کرد.

### ۵- فهرست نشانه‌ها

$u$	سرعت در راستای $x$ ، $(\frac{m}{s})$
$v$	سرعت در راستای $y$ ، $(\frac{m}{s})$
$T$	دما
$p$	فشار
$k$	هدایت هیدرولیکی، $(m^2)$
$\rho_c$	چگالی سیال، $(kg/m^3)$
$\beta$	انبساط حرارتی سیال، $(1/K)$

- International Journal of Heat and Mass Transfer, 183, 122131.
- Ronneberger, O., Fischer, P. and Brox, T. (2015). U-net: Convolutional networks for biomedical image segmentation. In International Conference on Medical image computing and computer-assisted intervention, Springer, Cham, 234-241.
- Shen C. (2018). A transdisciplinary review of deep learning research and its relevance for water resources scientists, *Water Resour. Res.* 54(11), 8558–8593.
- Soboleva, E.B. (2018). Density-driven convection in an inhomogeneous geothermal reservoir. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 127, 784-798.
- Tahmasebi, P., Kamrava, S., Bai, T., Sahimi, M. (2020). Machine learning in geo-and environmental sciences: from small to large scale, *Adv. Water Resour.*, 142, 103619. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2020.103619>
- Tartakovsky, A.M., Marrero, C.O., Perdikaris, P., Tartakovsky, G.D. and Barajas-Solano, D. (2020). Physics-informed deep neural networks for learning parameters and constitutive relationships in subsurface flow problems. *Water Resources Research*, 56(5), e2019WR026731.
- Varol, Y., Oztop, H.F., and Avci, E. (2008). Estimation of thermal and flow fields due to natural convection using support vector machines (SVM) in a porous cavity with discrete heat sources, *Int. Commun. Heat Mass Transf.* 35(8), 928–936.
- Vu, M.T. and Jardani, A. (2022). Mapping discrete fracture networks using inversion of hydraulic tomography data with convolutional neural network: SegNet-Fracture. *Journal of Hydrology*, 609, 127752, <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2022.127752>
- Wei, H., Zhao, S., Rong, Q. and Bao, H. (2018). Predicting the effective thermal conductivities of composite materials and porous media by machine learning methods. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 127, 908-916.
- Zhu, Y. and Zabarar, N. (2018). Bayesian deep convolutional encoder–decoder networks for surrogate modeling and uncertainty quantification. *Journal of Computational Physics*, 366, 415-447.
- Ji, X., Yan, Q., Huang, D., Wu, B., Xu, X., Zhang, A., ... and Wu, M. (2021). Filtered selective search and evenly distributed convolutional neural networks for casting defects recognition. *Journal of Materials Processing Technology*, 292, 117064.
- Jiang, Z., Tahmasebi, P. and Mao, Z. (2021). Deep residual U-net convolution neural networks with autoregressive strategy for fluid flow predictions in large-scale geosystems. *Advances in Water Resources*, 150, 103878.
- Kamrava, S., Tahmasebi, P. and Sahimi, M. (2020). Linking morphology of porous media to their macroscopic permeability by deep learning. *Transport in Porous Media*, 131(2), 427-448.
- Kreyenberg, P.J., Bauser, H.H. and Roth, K. (2019). Velocity Field Estimation on Density-Driven Solute Transport With a Convolutional Neural Network. *Water Resources Research*, 55(8), 7275-7293.
- Kumar, D., Roshni, T., Singh, A., Jha, M.K. and Samui, P. (2020). Predicting groundwater depth fluctuations using deep learning, extreme learning machine and Gaussian process: a comparative study. *Earth Science Informatics*, 13(4), 1237-1250.
- Mo, S., Zhu, Y., Zabarar, N., Shi, X. and Wu, J. (2019). Deep convolutional encoder-decoder networks for uncertainty quantification of dynamic multiphase flow in heterogeneous media. *Water Resources Research*, 55(1), 703-728.
- Nield, D.A. and Bejan, A. (2017). *Convection in Porous Media*, Springer International Publishing, Cham.
- Rajabi, M.M., Ataie-Ashtiani, B. and Simmons, C.T. (2015). Polynomial chaos expansions for uncertainty propagation and moment independent sensitivity analysis of seawater intrusion simulations. *Journal of Hydrology*, 520, 101-122.
- Rajabi, M.M., Fahs, M., Panjehfouladgaran, A., Ataie-Ashtiani, B., Simmons, C.T. and Belfort, B. (2020). Uncertainty quantification and global sensitivity analysis of double-diffusive natural convection in a porous enclosure. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 162, 120291.
- Rajabi, M.M., Javaran, M.R.H., Bah, A.O., Frey, G., Le Ber, F., Lehmann, F. and Fahs, M. (2022). Analyzing the efficiency and robustness of deep convolutional neural networks for modeling natural convection in heterogeneous porous media.

