Iranian Hydraulic Association
Journal of Hydraulics

Research Article
https://doi.org/10.30482/jhyd.2022.344351.1605

Analysis of Unsteady Flow in Open Channel Using Fourier Series

Amin Mazareaibehbahani[1], Mohammad Reza Jaefarzadeh[2*]

1-Ph.D. Candidate, Civil Engineering Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad.
2- Professor, Civil Engineering Department, Water and Environment Research Institute, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad.

[*] **jafarzad@um.ac.ir**

Received: 28 May 2022, Accepted: 13 August 2022 J. Hydraul. Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: The shallow-water equations in unidirectional form namely as Saint Venant equations (SVE) are a set of quasi-linear hyperbolic partial differential equations, having a wide range of applications in open channel and river flow analysis. Because of intrinsic non-linearity, there are no analytical solutions for these equations in most practical applications except for simplified versions. On the other hand, numerical solutions by finite difference or finite element methods are time-marching and for forecasting and timely management of floods are relatively lengthy and time-consuming. Recently, new solutions of SVE in frequency domain, using Laplace Transform (LT) or Fourier Series (FS) have been proposed to overcome these difficulties. In the LT method, input wave is converted into a unit hydrograph, a unit step, or a unit pulse. Despite of unconditional stability, the accuracy of this method depends on time step of decomposition of input information. In this research, however, the FT method is proposed to reduce the execution of real-time flood forecasting. Unlike finite difference models, this is not a marching method and the results may be generated at a given time, directly. Moreover, there is not any restriction in the decomposition of input data due to their independence from time.

Methodology: The complete form of SVE, namely as full dynamic equations are used in the present work. Initial conditions are non-uniform and the up-and downstream boundary conditions are inflow hydrograph and stage-discharge rating curve. SVE are linearized around a steady-state situation using the Taylor expansion. Assuming that the changes in water depth and discharge follow a sine pattern, the linear equations of continuity and momentum are transferred from time domain to frequency domain using the FS and sine functions. The input wave to the model, not necessarily harmonic and periodic, is converted to a set of periodic waves using Fast Fourier Transform (FFT). Considering the initial condition of non-uniform flow in the model, the channel is divided into some intervals that may have equal or non-equal lengths with uniform flow at each part. All channel characteristics such as mean flow depth are computed at each interval separately. Then, transition matrices are constructed to interconnect the channel intervals at the boundaries. Finally, the frequency response of flow discharge and water level are obtained at each part of the channel.

Results and discussion: This method could be used for all kinds of prismatic and non-prismatic channels, natural rivers with various types of flow (critical, sub-critical, and super-critical), different boundary conditions at the up- or downstream ends, and point or distributed lateral inflow. Rashid and Chaudhry (1995) performed their experiments in a rectangular flume. The flow was unsteady and non-uniform. FFT was used to decompose the input hydrograph into a complex sum of periodic waves. In this research, 256 waves with a frequency of 0.002 to 0.5 were used for accurate matching between the input hydrograph of the laboratory model and the hydrograph of the total waves analyzed by the fast Fourier transform. The result of the proposed method was compared with laboratory results of Rashid and Chaudhry, analytical model of Cimorelli, and numerical method of Preissman in time domain. The Nash–Sutcliffe efficiency coefficient (NSE) in the present study is more accurate than other models and in stations (2) and (5) are equal to 0.9893 and 0.9872, respectively. The peak of hydrograph in our model is more than the Cimorelli analytical model. The lag time of mean peak of hydrograph in the model is equal to the experimental results of Rashid and Chaudhry (1995). Execution time of the model is 11.84 seconds in comparison with Preissmann implicit method that is 54.48 seconds with the same computer. This run time is important in forecasting and warning models of floods. Visual comparison of theoretical and experimental hydrograph curves is satisfactory.

Conclusions: The proposed method is unconditionally stable. Full dynamic unsteady flow equations of Saint Venant are solved using FFT and Transition Matrix. The upstream boundary condition is stage-hydrograph and the downstream boundary condition is a stage-discharge relationship. The effects of lateral inflows and non-uniform initial conditions are considered in the model. To evaluate the accuracy of the model, the results compared with experimental data of Rashid and Chaudhry, analytical model of Cimorelli and numerical model of priessmann in time domain, were satisfactory both quantitatively and qualitatively. Regarding the unconditional stability and the appropriate run time of computer, the code is suitable for flood forecasting, warning and optimization models. This method can be used to analyze the flow in natural rivers and irrigation canals with any type of flow regime

Keywords: Fast Fourier transform, Frequency domain, Saint Venant equations, Transfer matrix method, Unsteady flow

انجمن هیدرولیک ایران
نشریه هیدرولیک

مقاله پژوهشی
https://doi.org/10.30482/jhyd.2022.344351.1605

تحلیل جریان غیرماندگار در مجاری باز با استفاده از سری فوریه

امین مزارعی بهبهانی[1]، محمدرضا جعفرزاده[2*]

۱- دانشجوی دکترای عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.
۲- استاد گروه عمران، دانشکده مهندسی، پژوهشکده آب و محیطزیست، دانشگاه فردوسی مشهد.

* jafarzad@um.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۱/۰۳/۰۷، پذیرش: ۱۴۰۱/۰۵/۲۲ وب‌گاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: معادلات دیفرانسیل جزئی سنت ونانت[1]، شبه خطی و هذلولی هستند و در تحلیل و توصیف جریان در مجاری باز کاربردهای گسترده‌ای دارند. در این پژوهش، برای مدل‌سازی کانال‌ها و رودخانه‌های طبیعی روش تحلیلی جدیدی در حوزه فرکانس ارائه شده است که در آن معادلات هذلولی سنت ونانت خطی شده، با استفاده از سری فوریه و روش ماتریس انتقال حل می‌شوند. در این مدل، جریان غیرماندگار و غیریکنواخت با شرط مرزی آب‌نگار (هیدروگراف) اشل در بالادست، منحنی دبی-اشل در پایین‌دست و جریان جانبی متمرکز بررسی می‌شود و نتایج آن با مدل‌های آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی موجود مقایسه می‌شود. در نتیجه ملاحظه می‌شود که مدل ارائه شده با شاخص ناش ساتکلیف (Nash-Sutcliffe) برابر با ۰/۹۹، دقت بیشتری نسبت به مدل‌های تحلیلی پیشین با شاخص ۰/۹۸ دارد. افزون بر این، زمان اجرای آن بسیار کمتر از مدل عددی پریسمن در همین شرایط است. این مدل بدون قید و شرط پایدار است و برای پیش‌بینی و هشدار به هنگام سیل و بهینه‌سازی مناسب می‌باشد.

کلیدواژگان: حوزه فرکانس، تبدیل فوریه سریع، موج دینامیک، روش ماتریس انتقال، جریان ناپایدار.

۱- مقدمه

معادلات دیفرانسیل جزئی سنت ونانت، شبه خطی و هذلولی هستند و در تحلیل و توصیف جریان در مجاری باز کاربردهای گسترده‌ای دارند. ماهیت غیرخطی این معادلات، حل تحلیلی آن‌ها را در بیشتر شرایط عملی غیرممکن کرده است. برای حل این معادلات، از روش‌های عددی و یا شکل ساده شده آن‌ها استفاده می‌شود. به‌منظور دستیابی به نتایج قابل‌قبول، روش‌های عددی باید سازگار، همگرا و پایدار باشند. استفاده از روش‌های عددی، پیش‌بینی و مدیریت به‌هنگام سیل را بسیار زمان‌بر می‌کند. همچنین برای واسنجی (کالیبراسیون) فراسنجه‌های مدل، حجم سنگین محاسبات می‌تواند مشکلاتی را ایجاد کند (Cimorelli et al., 2013).

در برخی بررسی‌ها، به‌منظور چیرگی بر نارسایی‌های یاد شده در محاسبات و پایداری بدون قید و شرط مدل، روش تحلیل معادلات خطی شده سنت ونانت در حوزه فرکانس[1] پیشنهاد شده است. در این روش، معادلات سنت ونانت با استفاده از بسط تیلور[2]، حول یک حالت پایدار خطی می‌شوند. این مدل‌ها، به دلیل کاهش حجم محاسبات، سادگی و وابستگی فراسنجه‌های آن به مشخصات کانال و شرایط هیدرولیکی جریان، جذابیت بیشتری دارند (Cimorelli et al., 2015). از حل تحلیلی مدل‌های خطی شده معادلات سنت ونانت، به‌عنوان یک واحد مدلسازی[3] در حل مسئله‌های مختلف مانند روندیابی جریان غیرخطی با مدل ساده شده پس‌زدگی آب[4] (Cimorelli et al., 2013; Todini and Bossi, 1986)، روندیابی جریان در مدل بارش-رواناب نیمه توزیعی[5] (Moussa and Bocquillon 2009; Todini 1996)، روندیابی جریان در

1 Frequency Domain
2 Taylor series
3 Building block
4 Non-linear flow routing with simplified backwater modelling
5 Flow routing modeling in semi-distributed rainfall runoff model

کانال‌های غیریکنواخت با مدل خطی پخشی[1] (Cimorelli et al., 2015)، انتشار عدم قطعیت‌ها[2] (Chang and Yeh, 2016a,b)، مدل‌سازی جریان رودخانه در ناحیه‌های کارستی[3] (Charlier et al. 2015a,b)، مدیریت بهینه حوضه‌های کوچک کشاورزی[4] (Colin et al., 2011) و تأثیرتنوع مکانی بارندگی بر مدل‌سازی بارش رواناب[5] (Zoccatelli et al., 2010) استفاده می‌شود (Cimorelli et al., 2018).

حل معادلات خطی شده سنت ونانت در حوزه فرکانس، با دو روش تبدیل لاپلاس[6] و سری فوریه[7] انجام می‌شود. نخستین بار، از روش تبدیل لاپلاس برای تحلیل موج پخشی در کانال‌های نیمه محدود[8] و با شرط مرزی آب‌نگار (هیدروگراف) واحد دبی در بالادست استفاده شد (Hayami, 1951). کارهای همانند دیگری نیز در حوزه فرکانس و در کانال‌های یادشده انجام شده است که در آن تنها شرط مرزی بالادست یا تنها شرط مرزی پایین‌دست به‌صورت آب‌نگار دبی لحاظ شده است (Fan and Li, 2006; Todini and Bossi, 1986). در هنگامی که جریان در کانال‌های مصنوعی و رودخانه‌های طبیعی زیربحرانی است، شرط مرزی پایین‌دست مانند بندها، دریچه‌ها و پایه‌های پل در دینامیک جریان تأثیرگذار است. لذا در این شرایط، مدل کانال نیمه محدود ممکن است نامناسب به نظر برسد. بسیاری از محققان با لحاظ کردن انواع مختلف شرایط مرزی، راه‌حل‌های تحلیلی در کانال‌های با طول محدود ارائه داده‌اند (Cimorelli et al., 2013). در آغاز Tingsanchali and Manandhar (1985)، عمق آب را در طول کانال به‌صورت تحلیلی و با فرض آب‌نگار عمق آب در هر دو شرط مرزی بالا و پایین دست و جریان جانبی متمرکز به‌دست آوردند. سپس Dooge and Napiorkowski (1987)، آب‌نگار دبی را در کانال‌های با طول محدود و با دو شرط مرزی آب‌نگار دبی در بالادست و پایین دست و به‌صورت تحلیلی بدست آوردند. Chung et al. (1993) موج پخشی معادلات سنت ونانت را با فرض شرط مرزی پایین دست مستقل از زمان (عمق آب ثابت و منحنی دبی-اشل) در حوزه فرکانس و با استفاده از تبدیل لاپلاس تحلیل کردند. در بیشتر تحقیقات انجام شده برای حل معادلات خطی شده سنت ونانت در حوزه فرکانس، از تحلیل موج کینماتیک و پخشی استفاده می‌شود (Cimorelli et al., 2013; Cimorelli et al., 2018; Cimorelli et al., 2015; Cimorelli et al., 2013; Fan and Li, 2006; Litrico and Fromion, 2006; Munier et al., 2008)، اما به دلیل محدودیت‌های ناشی از ساده‌سازی معادلات در برخی کارهای عملی، تنها موج دینامیک می‌تواند پدیده‌های فیزیکی را به‌دقت شبیه‌سازی نماید (Ponce et al., 1978).

مجموعه جدیدی از حل تحلیلی برای تقریب پارابولیک خطی شده معادلات سنت ونانت توسط Cimorelli et al. (2018) استخراج شد که در آن از آب‌نگار اشل به‌عنوان شرط مرزی بالادست و رابطه دبی-اشل در مرز پایین‌دست استفاده شد. همچنین Cimorelli et al. (2015) یک مدل جدید روندیابی سیل توزیع شده برمبنای تقریب پارابولیک خطی شده معادلات سنت ونانت ارائه دادندکه درآن تغییرپذیری مکانی فراسنجه‌های مدل وشرایط مرزی پایین‌دست را درنظر می‌گیرد. این مدل بر مبنای حل تحلیلی کانال پخشی پله‌ای در حوزه انتقالی لاپلاس است. در تحقیقات سیمورلی و همکاران، موج پخشی سنت ونانت در حوزه فرکانس با استفاده از تبدیل لاپلاس حل‌شده است. در روش تبدیل لاپلاس، موج ورودی به شکل هیدروگراف واحد[9]، گام واحد[10] یا پالس واحد[11] تبدیل می‌شود. به‌رغم پایداری بدون قید و شرط این روش، دقت نتایج آن به گام زمانی تجزیه اطلاعات ورودی بستگی دارد. بنابراین هر چه گام زمانی کوچک‌تری انتخاب شود، دقت نتایج بهتر می‌شود، اما بارمحاسبه‌ای افزایش می‌یابد (Cimorelli et al., 2015). در این تحقیق،

1 Flow routing in non-uniform channels by means of a cascade of diffusive linear models
2 Propagation of the uncertainty
3 River flow modelling in karstic areas
4 Optimal management of small agricultural catchments
5 Influence of rainfall spatial variability on rainfall–runoff modelling
6 Laplace transform
7 Fourier Series
8 Semi-infinite
9 Unit hydrograph
10 Unit Step
11 Unit Pulse

برای کاهش زمان اجرای مدل در حوزه فرکانس، از روش تبدیل فوریه استفاده شده است. این روش که نخستین بار توسط چادری در تحلیل جریان انتقالی در مجاری بسته مانند ضربه قوچ به کار برده شد (Chaudhry, 1979)، برخلاف مدل‌های تفاضل محدود، گام به گام نیست و می‌توان در یک زمان معین، بدون استفاده از اطلاعات گام‌های پیش، خروجی را به دست آورد. همچنین محدودیتی در تجزیه اطلاعات ورودی به مدل به‌دلیل نبود وابستگی آن‌ها به زمان وجود ندارد. تحقیقات دیگری برای تحلیل پدیده ضربه قوچ در شبکه خطوط لوله با استفاده از روش پاسخ فرکانس و تبدیل فوریه سریع انجام شده است و در آن معادلات سنت ونانت خطی شده در حوزه فرکانس تحلیل می‌شود (Ranginkaman et al. 2017,2019). در این پژوهش، موج ورودی به مدل که به‌طور معمول هماهنگ (هارمونیک) و متناوب (پریودیک) نیست و با استفاده از تبدیل فوریه به مجموعه‌ای از موج‌های متناوب تبدیل می‌شود. سیگنال‌های متناوب ورودی، با استفاده از موج دینامیک معادلات سنت ونانت خطی شده، تجزیه و تحلیل می‌شوند. با توجه به خطی بودن معادلات، خروجی سیگنال‌ها از قانون جمع جبری پیروی می‌کنند. شرایط اولیه جریان در کانال به‌صورت غیریکنواخت است. شرط مرزی در بالادست، آب‌نگار اشل و در پایین‌دست، آب‌نگار دبی اشل (سرریز یا دریچه) است. اثرگذاری جریان جانبی متمرکز در روندیابی جریان نیز لحاظ می‌شود. در نهایت، به‌منظور کنترل دقت نتایج و زمان اجرای مدل، نتایج با مدل‌های آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی موجود مقایسه می‌شود.

۲- حل معادلات سنت ونانت

دراین تحقیق، از شکل خطی شده معادلات سنت ونانت معروف به موج دینامیک، استفاده می¬شود.

۲-۱- خطی‌سازی موج دینامیک معادلات سنت ونانت

معادلات سنت ونانت، برای جریان غیر ماندگار یک‌بعدی در مجاری باز با فرض نبود جریان جانبی نوشته می‌شود.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial t}+\dfrac{\partial Q}{\partial x}=0 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial t}+\dfrac{\partial\left(\frac{Q^2}{A}\right)}{\partial x}+gA\left(\dfrac{\partial Y}{\partial x}+S_f-S_0\right)=0 \end{cases} \tag{1}$$

که در آن $Q(x,t)$ دبی جریان (مترمکعب بر ثانیه)، $A(x,t)$ سطح مقطع جریان (مترمربع)، $Y(x,t)$ عمق آب (متر)، t متغیر مستقل زمان (ثانیه)، x متغیر مستقل مکان (متر)، g شتاب گرانش (متر بر مجذور ثانیه)، S_f شیب هیدرولیکی جریان و S_0 شیب طولی بستر کانال است.

برای خطی‌سازی سیستم معادلات (۱)، فرض می‌شود آب‌نگارهای بالا و پایین‌دست کانال، یک موج هماهنگ و متناوب است. امواج ورودی می‌تواند آب‌نگار دبی یا عمق آب باشد و به دو بخش تقسیم می‌شوند (Chaudhry, 1979):

$$Q(x,t)=Q_0(x)+q^*(x,t) \tag{2}$$

$$Y(x,t)=Y_0(x)+y^*(x,t) \tag{3}$$

که در آن $Q(x,t)$ دبی لحظه‌ای، $Q_0(x)$ دبی میانگین، $q^*(x,t)$ دبی نوسانی حول یک حالت پایدار ثابت، $Y(x,t)$ عمق آب لحظه‌ای، $Y_0(x)$ عمق آب میانگین و $y^*(x,t)$ عمق آب نوسانی حول یک حالت پایدار ثابت است. هر دو متغیر q^* و y^* تابعی از متغیرهای مکان (x) و زمان (t) هستند. متغیرهای q^* و y^* را می‌توان به‌صورت تابعی سینوسی برحسب زمان در نظر گرفت و از تابع‌های مختلط سری فوریه استفاده کرد.

$$q^*(x,t)=Re\left(q(x)e^{(i\omega t+\varphi)}\right) \tag{4}$$

$$y^*(x,t)=Re\left(y(x)e^{(i\omega t+\varphi)}\right) \tag{5}$$

که در آن ω فرکانس موج سینوسی برحسب رادیان بر ثانیه، φ تغییر فاز موج سینوسی برحسب رادیان و $i=\sqrt{-1}$ است. متغیرهای مختلط q و y دامنه موج سینوسی برحسب x، و Re برای نمایش بخش واقعی متغیر مختلط می‌باشد.

سیستم معادلات (۱) حول حالت‌های پایدار Q_0 و Y_0 با این فرض بسط داده می‌شوند که، میزان‌های دبی $q^*(x,t)$ و عمق آب $y^*(x,t)$ نوسانی حول یک

حالت پایدار ثابت به ترتیب نسبت به میزان‌های دبی میانگین $Q_0(x)$ و عمق آب میانگین $Y_0(x)$ ناچیز باشد. با استفاده از معادلات (۲) و (۳) و حذف جمله‌های مرتبه دوم به شکل خطی نوشته می‌شود (Chaudhry, 1979; Litrico and Fromion, 2009).

$$\begin{cases} T_0 \dfrac{\partial y^*}{\partial t} + \dfrac{\partial q^*}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial q^*(x,t)}{\partial t} + a\dfrac{\partial q^*(x,t)}{\partial x} + b\,q^*(x,t) + c\dfrac{\partial y^*(x,t)}{\partial x} + d\,y^*(x,t) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

فراسنجه‌های *a*، *b*، *c* و *d* ضریب‌های ثابت هستند و به ویژگی‌های جریان و مقطع هیدرولیکی کانال در شرایط اولیه و پایدار بستگی دارند و $\boldsymbol{T_0}$ عرض سطح آب در حالت پایدار اولیه است.

$$a = 2V_0 \tag{7}$$

$$b = \frac{2gA_0S_f\left(Q_0,y_0\right)}{Q_0} - 2\frac{V_0T_0}{A_0}\frac{dy_0}{dx} \tag{8}$$

$$c = \left(gA_0 - V_0^2T_0\right) \tag{9}$$

$$d = 2\frac{V_0^2T_0^2}{A_0}\frac{dy_0}{dx} - V_0^2\frac{dT_0}{dx} + gT_0\frac{dy_0}{dx} + \frac{4}{3}\frac{gA_0S_f\left(Q_0,y_0\right)}{P_0}\frac{\partial P_0}{\partial y} - \frac{7}{3}gS_f\left(Q_0,y_0\right)T_0 - gS_0T_0 \tag{10}$$

V_0 سرعت میانگین جریان در حالت پایدار اولیه (متر بر ثانیه) و نمایه صفر در دیگر فراسنجه‌ها نشان‌دهنده شرایط جریان در حالت پایدار اولیه می‌باشد.

۲-۲- حل معادلات سنت ونانت خطـی شـده در حوزه فرکانس با استفاده از سری فوریه

با فرض اینکه تغییرات عمق آب و دبی از الگوی سینوسی پیروی می‌کنند، سیستم معادلات خطی پیوستگی و اندازه حرکت (معادلات ۶)، با استفاده از سری فوریه و تابع‌های سینوسی (۴) و (۵)، از حوزه زمان به حوزه فرکانس انتقال می‌یابند.

$$\begin{cases} T_0 i\omega y(x) + \dfrac{dq(x)}{dx} = 0 \\ i\omega q(x) + a\dfrac{dq(x)}{dx} + b\,q(x) + c\dfrac{dy(x)}{dx} + d\,y(x) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

این معادلات شامل دو معادله دیفرانسیل مرتبه اول می‌باشند و با حذف یکی از مجهولات، می‌توان یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دست آورد. حذف $y(x)$ از معادلات (۱۱) منجر می‌شود به:

$$-\frac{c}{T_0}\frac{d^2q(x)}{dx^2} + \left(ai\omega - \frac{d}{T_0}\right)\frac{dq(x)}{dx} + \left(bi\omega + (i\omega)^2\right)q(x) = 0 \tag{12}$$

این معادله که همگن، خطی و مرتبه دوم با ضریب‌های ثابت است، یک پاسخ عمومی و یک پاسخ خصوصی دارد. برای حل آن و تعیین جواب عمومی، در آغاز معادله مفسر Δ تشکیل می‌شود.

$$\Delta = \left(ai\omega - \frac{d}{T_0}\right)^2 + 4\frac{c}{T_0}\left(bi\omega + (i\omega)^2\right) \tag{13}$$

$$q(x) = C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} \tag{14}$$

m_1 و m_2 میزان‌های ثابتی هستند و به شرایط اولیه جریان در حالت پایدار وابسته می‌باشد. ضریب‌های ثابت C_1 و C_2 در پاسخ خصوصی معادله (۱۲) تعیین می‌شوند و به موج ورودی به مدل و شرایط مرزی در بالا و پایین‌دست بستگی دارد. مقادیر m_1 و m_2 به دست می‌آید:

$$m_{1,2} = \frac{-\left(ai\omega - \dfrac{d}{T_0}\right) \pm \sqrt{\Delta}}{-2\dfrac{c}{T_0}} \tag{15}$$

از جایگذاری معادلـه (۱۴) در معادلـه اول (۱۱) مـی‌تـوان میزان‌ها عمق جریان را در حوزه فرکانس به دست آورد.

$$y(x) = -\frac{1}{T_0i\omega}\left[C_1m_1e^{m_1x} + C_2m_2e^{m_2x}\right] \tag{16}$$

۳-۲- اعمال شـرایط مـرزی آب‌نگـار اشـل در بالادست و تابع دبی-اشل در پایین‌دست

برابر شکل (*a-1*)، آب‌نگار ورودی به مدل از منحنی خاصی پیروی نمی‌کند. این آب‌نگار با استفاده از سری‌های فوریه به شماری موج سینوسی هماهنگ و متناوب تبدیل می‌شود (شکل *b-1*).

از آنجایی‌که اطلاعات ورودی به مدل به طور معمول گسسته هستند، برای تبدیل آن به تابع‌های ریاضی، از تبدیل گسسته سری فوریه استفاده می‌شود (Cooley and Tukey, 1965).

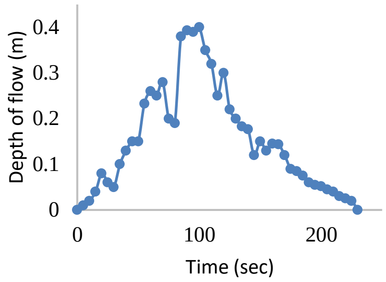

Fig. 1-a Input Hydrograph

شکل ۱ -a آبنگار ورودی

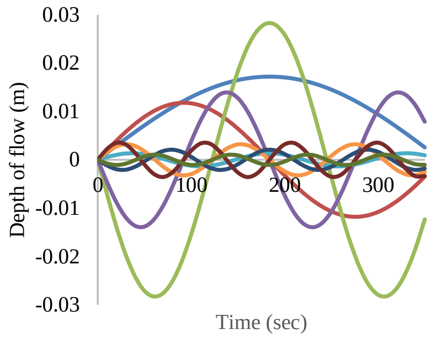

Fig. 1-b Waves decomposed by FFT algorithm

شکل ۱ -b امواج تجزیه شده بوسیله الگوریتم FFT

$$G\left(\frac{n}{NT}\right)=\sum_{k=0}^{N-1} g_G\left(kT\right)e^{-i2\pi nk/N} \quad n=0,1,\ldots,N-1 \tag{17}$$

که در آن $g_G(kT)$ مقادیر نمونه‌ها در حوزه زمان، k عدد صحیح، T فاصله زمانی نمونه‌برداری، $G\left(\frac{n}{NT}\right)$ تابع تبدیل فوریه گسسته، $\frac{n}{NT}$ فرکانس، N تعداد نمونه‌ها و $i=\sqrt{-1}$ است. استفاده از رابطه (۱۷) هنگامی‌که تعداد نمونه‌ها زیاد باشند، با توجه به عملیات جمع و ضرب‌ها بسیار وقت‌گیر است. Cooley and Tukey (1965) الگوریتم تبدیل فوریه سریع[1]را برای محاسبه این رابطه ارائه دادند. موجهای به دست آمده از تبدیل فوریه سریع از روابط (۴) و (۵) پیروی می‌کنند و فرکانس و دامنه متفاوتی دارند.

در روش تبدیل فوریه سریع در حوزه فرکانس، محدوده‌ای از فرکانس‌ها از مرتبه 2^n توسط کاربر برای سامانه معرفی می‌شود. در محدوده معرفی شده، هر چه میزان فرکانس‌ها بزرگتر باشد، دامنه آن‌ها کمتر و در نتیجه تاثیر آن در نتایج کمتر می‌باشد. انتخاب این محدوده در مدل بر مبنای همخوانی مناسب بین مجموع موج‌های تجزیه شده ناشی از تبدیل فوریه سریع با آبنگار ورودی در حوزه زمان می‌باشد. در این پژوهش، اختلاف بین مجموع موج‌های تجزیه شده و آبنگار ورودی با شاخص ناش ساتکلیف (*Nash-Sutcliffe*) بررسی می‌شود و این شاخص باید به سمت عدد یک میل کند. بر همین مبنا همه فرکانس‌های به‌دست آمده از این روش فرکانس‌های غالب هستند.

در ایستگاه‌های آب‌سنجی (هیدرومتری) اطلاعات تراز آب برداشت می‌شود و برای تبدیل این اطلاعات به آب‌نگار دبی، رابطه دبی-اشل نیاز است. متأسفانه در اغلب ایستگاه‌ها، امکان اندازه‌گیری دبی-اشل با دقت کافی وجود ندارد (Spada et al., 2017). به همین دلیل، در این مدل استفاده از آب‌نگار اشل به‌عنوان شرط مرزی بالادست توصیه شده است. برای پیش‌بینی دقیق دینامیک جریان در جریان‌های زیربحرانی، در پایین‌دست نیاز به یک شرط مرزی مستقل دیگر هست. لذا در شرط مرزی پایین‌دست منحنی دبی-اشل پیشنهاد شده است. برای استفاده از آب‌نگار اشل در بالادست ($\boldsymbol{x=0}$)، برابر شکل (۱) در آغاز موج ورودی از طریق تبدیل فوریه سریع (*FFT*) به شماری موج سینوسی با دامنه مشخص تبدیل می‌شوند و بر رابطه (۱۶) اعمال می‌شود. با اعمال شرط مرزی بالادست و جایگذاری مقادیر $\boldsymbol{x=0}$ و $\boldsymbol{y=y_i^L}$ در رابطه (۱۶) داریم:

$$y_i^L=-\frac{1}{T_0 i\,\omega}\left[C_1m_1+C_2m_2\right] \tag{18}$$

$\boldsymbol{y_i^L}$ دامنه نوسان موج $\boldsymbol{i}$ام است که از تجزیه آبنگار ورودی با استفاده از *FFT* به دست می‌آید و $\boldsymbol{L}$ نشان‌دهنده مقطع بالادست کانال است.

تابع دبی-اشل در مرز پایین‌دست می‌تواند به شکل یکی از رابطه‌های مانینگ، شزی، روزنه و یا سرریز فرض شود. برای استفاده از این رابطه در معادلات، برابر بخش (۲-۱) بسط تیلور آن حول یک محور پایدار به صورت خطی نوشته می‌شود. سپس با استفاده از سری فوریه، معادله از حوزه زمان به حوزه فرکانس منتقل می‌شود (Cimorelli et al., 2018).

$$Q\left(x,t\right)=f_B.y\left(x,t\right) \tag{19}$$

[1] Fast Fourier Transform

$$q_i^R(x) = Z.y_i^R(x) \tag{20}$$

$$Z = \frac{\left[\frac{\partial f_{B0}}{\partial Y} y_0 + f_{B0}\right]}{\left[1 - \frac{\partial f_{B0}}{\partial Q} y_0\right]} \tag{21}$$

در معادله (۱۹) تابع $\boldsymbol{f_B}$ دبی را به عمق جریان مرتبط می‌کند. معادله (۲۰)، رابطه دبی–اشل در حوزه فرکانس است و $\boldsymbol{y_i^R}$ و $\boldsymbol{q_i^R}$ به ترتیب دامنه نوسان موج $\boldsymbol{i}$ام دبی و عمق آب در مقطع R می‌باشد. در رابطه (۲۱)، $\boldsymbol{f_{B0}}$ تابع رابط بین عمق جریان و دبی در شرایط پایدار جریان یکنواخت است. با جایگذاری معادلات (۱۴) و (۱۶) در معادله (۲۰) داریم:

$$T_0 i\,\omega\left(C_1 e^{m_1 X} + C_2 e^{m_2 X}\right) + Z.\left(C_1.m_1 e^{m_1 X} + C_2.m_2 e^{m_2 X}\right) = 0 \tag{22}$$

که در آن $\boldsymbol{X}$ طول کانال است. از حل معادلات (۱۸) و (۲۲) ضریب‌های ثابت $\boldsymbol{C_1}$ و $\boldsymbol{C_2}$ به دست می‌آید.

$$C_1 = u_1 y_i^L \tag{23}$$

$$C_2 = u_2 y_i^L \tag{24}$$

$$u_1 = \frac{\left[Z + \frac{T_0 i\,\omega}{m_2}\right] e^{m_2 X}}{\left[1 + \frac{Z m_1}{T_0 i\,\omega}\right] e^{m_1 L} - \left[\frac{m_1}{m_2} + \frac{Z m_1}{T_0 i\,\omega}\right] e^{m_2 L}} \tag{25}$$

$$u_2 = \frac{-\left[T_0 i\,\omega + Z m_1\right] e^{m_1 L}}{m_2\left[\left(1 + \frac{Z m_1}{T_0 i\,\omega}\right) e^{m_1 L} - \left(1 + \frac{Z m_2}{T_0 i\,\omega}\right) e^{m_2 L}\right]} \tag{26}$$

بر اساس مقدار ضرایب ثابت (معادلات (۲۳) و (۲۴))، رابطه‌ای برای دامنه نوسانات عمق آب برحسب متغیر $\boldsymbol{x}$ در طول کانال و برای هر موج هارمونیک $\boldsymbol{i}$ام به دست می‌آید.

$$y(x) = -\frac{1}{T_0 i\,\omega}\left[u_1 m_1 e^{m_1 x} + u_2 m_2 e^{m_2 x}\right].y_i^L \tag{27}$$

به‌طور مشابه، رابطه‌ای برای نوسانات دبی در حوزه فرکانس برحسب متغیر $\boldsymbol{x}$ در هر نقطه از کانال نوشته می‌شود.

$$q(x) = \left[u_1 e^{m_1 x} + u_2 e^{m_2 x}\right].y_i^L \tag{28}$$

رابطه‌های (۲۷) و (۲۸) پاسخ فرکانسی موج ورودی به مدل در طول کانال هستند و به ترتیب نشان دهنده موج هماهنگ $\boldsymbol{i}$ام عمق آب و دبی است. به دلیل خطی بودن این روابط، می‌توان از قانون جمع جبری برای همه موج‌های هماهنگ ورودی برای تعیین پاسخ نهایی آب‌نگارهای ورودی استفاده کرد.

۲-۴-تشکیل بردارهای حالت و ماتریس انتقال

ماتریس انتقال ماتریسی است که متغیرهای خروجی را به‌وسیله n معادله به متغیرهای ورودی مرتبط می‌سازد. نمایش ماتریسی این سیستم را می‌توان به‌صورت $\boldsymbol{y = Ux}$ نوشت که $\boldsymbol{U}$ ماتریس انتقال و $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ بردار حالت نامیده می‌شوند. به طور معمول سامانه‌های فیزیکی از چند جزء تشکیل می‌شوند و هر جزء به‌وسیله یک ماتریس انتقال بیان می‌گردد. ماتریس انتقال کل سیستم، برابر توالی خاصی از ضرب ماتریس انتقال اجزاء محاسبه می‌شود. در سامانه‌های هیدرولیکی، ماتریس‌های انتقال به سه ماتریس انتقال میدان، انتقال نقطه و انتقال کل طبقه‌بندی می‌شوند(Chaudhry, 1979) .

- ماتریس انتقال میدان (F):

ماتریس انتقال میدان، مقادیر بردارهای حالت در بالا و پایین‌دست یک کانال با طول و ویژگی‌های ثابت را به هم مرتبط می‌کند.

$$Z_g^R = F_g Z_g^L \tag{29}$$

که در آن $\boldsymbol{F_g}$ ماتریس میدان کانال $\boldsymbol{g}$ ام و بردار $\boldsymbol{Z_g}$ بردار حالت همین کانال است. برای نشان دادن بردار حالت در بالا و پایین‌دست یک کانال به ترتیب از حرف‌های L و R استفاده می‌شود. به‌طور مثال $\boldsymbol{Z_g^L}$، نشان دهنده بردار حالت در بالادست کانال $\boldsymbol{g}$ام است.

- ماتریس انتقال نقطه (P):

ماتریس انتقال نقطه، ماتریسی است که بردارهای حالت در چپ و راست یک نقطه یا مرز را به هم مرتبط می‌کند. برای هر اتصال یا مرز در سامانه مانند اتصال‌های سری کانال‌ها، دبی جانبی ورودی یا خروجی، دریچه، سازه‌های کنترلی و غیره از ماتریس انتقال نقطه استفاده می‌شود.

$$Z^{L}_{(g+1)} = P_g Z^{R}_{g} \qquad (30)$$

که در آن P_g، ماتریس انتقال نقطه برای مرز مشترک بین کانال‌های g و $g+1$ است و شرط مرزی بالادست کانال $g+1$ را به شرط مرزی پایین‌دست کانال g مرتبط می‌کند.

- ماتریس انتقال کل (U):

ماتریس انتقال کل، ماتریسی است که بردار حالت دو انتهای یک سامانه را به همدیگر مرتبط می‌کند. برای سامانه‌ای که نخستین مقطع آن 1 و آخرین آن $n+1$ باشد، می‌توان نوشت:

$$Z^{R}_{n+1} = U\, Z^{L}_{1} \qquad (31)$$

که در آن U ماتریس کل است. ماتریس کل از حاصل‌ضرب ماتریس‌های میدان و ماتریس‌های نقطه به ترتیب از پایین‌دست سیستم به بالادست محاسبه می‌شود.

$$U = F_n P_n \dots F_g P_g \dots F_3 P_3 F_2 P_2 F_1 P_1 \qquad (32)$$

بر این مبنا با تعیین نوسانات دبی و عمق آب می‌توان معادلات (۲۷) و (۲۸) را به فرم ماتریسی نوشت.

$$\begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}^{R}_{g} = \begin{bmatrix} 0 & \left(u_1 e^{m_1 x} + u_2 e^{m_2 x}\right) \\ 0 & -\dfrac{1}{T_0 i\,\omega}\left(u_1 m_1 e^{m_1 x} + u_2 m_2 e^{m_2 x}\right) \end{bmatrix}_{g} \begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}^{L}_{g} \qquad (33)$$

که در آن ماتریس‌های $\begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}^{R}_{g}$ و $\begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}^{L}_{g}$ به ترتیب بردارهای حالت مجهول و معلوم هستند و ماتریس انتقال $\begin{bmatrix} 0 & \left(u_1 e^{m_1 x} + u_2 e^{m_2 x}\right) \\ 0 & -\dfrac{1}{T_0 i\,\omega}\left(u_1 m_1 e^{m_1 x} + u_2 m_2 e^{m_2 x}\right) \end{bmatrix}_{g}$ میدان کانال g است و مقادیر معلوم و مجهول را برای یک موج به هم مرتبط می‌سازد. همچنین می‌توان معادله (۳۳) رو به فرم دیگری هم نوشت:

$$\begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}^{R}_{g} = \begin{bmatrix} \dfrac{m_2 e^{m_1 x} - m_1 e^{m_2 x}}{m_2 - m_1} & \dfrac{T_0 i\,\omega\left(e^{m_1 x} - e^{m_2 x}\right)}{m_2 - m_1} \\ \dfrac{-m_1 m_2 e^{m_1 x} + m_1 m_2 e^{m_2 x}}{T_0 i\,\omega\left(m_2 - m_1\right)} & \dfrac{m_2 e^{m_2 x} - m_1 e^{m_1 x}}{m_2 - m_1} \end{bmatrix}_{g} \begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}^{L}_{g} \qquad (34)$$

معادله (۳۴) پاسخ فرکانسی دبی و تراز آب در هر نقطه از کانال از نتایج این تحقیق است. هانند این معادله در حوزه فرکانس و با استفاده از سری فوریه، توسط Chaudhry (1979) برای مجاری بسته استفاده شده است.

۲-۵- تاثیر جریان غیریکنواخت

برای اینکه شرایط اولیه جریان غیریکنواخت در مدل لحاظ شود، مطابق شکل شماره (۲) کانال به n قطعه با طول‌های مساوی یا نامساوی با جریان یکنواخت تقسیم می‌شود. در معادلات خطی شده، تراز میانگین آب در هر قطعه و دیگر ویژگی‌های کانال مانند شیب کف، دبی میانگین و ضریب زبری مانینگ به نمایندگی از آن قطعه کانال استفاده می‌شود. مقادیر ثابت a، b، c و d برای هر قطعه کانال به‌طور جداگانه از معادله (۶) به دست می‌آید. رابطه‌ها در این قطعه‌ها از طریق ماتریس میدان به هم مرتبط می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}^{R}_{n} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_{n} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_{n-1} \dots \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_{2} \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_{1} \begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}^{L}_{1} \qquad (35)$$

که در آن ماتریس‌های $\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}$ ماتریس میدان هر قطعه از کانال و همانند ماتریس میدان معادله (۳۳) یا (۳۴) است و نمایه ۱ مربوط به نخستین قطعه کانال و نمایه n مربوط به آخرین قطعه کانال از بالادست می‌باشد.

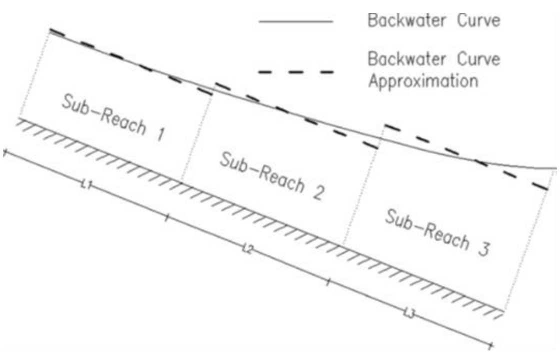

Fig. 2 Nonuniform channel approximation

شکل ۲ تقریب کانال غیریکنواخت

همچنین می‌توان معادله (۳۵) را به شکل دیگری نوشت:

$$\begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}^{R}_{n} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \end{bmatrix}^{L}_{1} \qquad (36)$$

که در آن:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_{n-1} \cdots \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_2 \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix}_1 \tag{37}$$

از این ویژگی و ماتریس انتقال میدان نیز می‌توان برای کانال‌های غیر منشوری و رودخانه‌های طبیعی استفاده کرد. کانال‌ها به قطعه‌های با طول‌های مساوی یا نامساوی با ویژگی‌های تاحدودی ثابت تقسیم می‌شوند. میانگین سطح مقطع در بالادست و پایین دست هر قطعه و دیگر ویژگی‌ها (مانند شیب کف، دبی میانگین و ضریب زبری مانینگ)، به نمایندگی از کل قطعه در معادله‌های خطی شده سنت ونانت در حوزه فرکانس استفاده خواهند شد. در نهایت، پاسخ فرکانسی موج‌های مختلف در هر قطعه با معادله (۳۵) یا (۳۶) به هم مرتبط می‌شوند.

۲-۶- اثر جریان جانبی متمرکز بر معادلات

جریان‌های جانبی از طریق حوضه‌های میانی و شاخه‌های فرعی، رودخانه اصلی را تغذیه می‌کنند و در کانال‌های آبیاری هم از طریق کانال‌های فرعی برداشت آب از کانال‌های اصلی صورت می‌گیرد. لذا در معادلات بایستی تاثیر این دبی ورودی و خروجی دیده شود. در بخش ۲-۱، معادلات سنت ونانت با فرض نبود جریان جانبی خطی سازی و تحلیل شد. در این روش، تاثیر جریان جانبی در ماتریس نقطه و در حوزه فرکانس دیده می‌شود و در آن برای دبی شرایط پیوستگی برقرار بوده و تراز آب هم در بالادست و پایین‌دست نقطه ثابت هستند (Chaudhry, 1979).

$$\begin{bmatrix} q \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_n^L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm q_{lateral} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_{n-1}^R \tag{38}$$

که در آن $q_{lateral}$ دبی جانبی ورودی و خروجی به سیستم است و ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm q_{lateral} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ دو قطعه $\boldsymbol{n-1}$ و $\boldsymbol{n}$ را به هم مرتبط می‌کند. دبی جانبی ورودی یا خروجی به مدل می‌تواند به‌صورت ماندگار یا غیر ماندگار باشد. در صورت غیر ماندگار بودن جریان، با فرض پریودیک و با استفاده از FFT موج ورودی یا خروجی از حوزه زمان به حوزه فرکانس انتقال می‌یابد. برای سازگاری بین ماتریس نقطه و ماتریس میدان، ماتریس میدان هم از ماتریس ۲*۲ به ۳*۳ تغییر می‌کند.

$$\begin{bmatrix} q \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} q \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_n^L \tag{39}$$

از ترکیب ماتریس‌های (۳۶) و (۳۹) می‌توان ماتریس کلی را به دست آورد.

$$\begin{bmatrix} q \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_n^R = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 & \pm q_{lateral} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_{n-1}^R \tag{40}$$

۲-۷- انتقال از حوزه فرکانس به حوزه زمان

برای تحلیل نتایج مدل در حوزه زمان، می‌توان بر مبنای فرضیه‌های اولیه در معادلات (۲) و (۳) و با استفاده از معادله دبی و عمق آب (۳۷) و تبدیل معکوس سری فوریه، پاسخ فرکانسی دبی و عمق آب در مسیر رودخانه را از حوزه فرکانس به حوزه زمان انتقال داد. نتایج مدل در حوزه زمان عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} Q(x,t) \\ y(x,t) \\ 1 \end{bmatrix}_n^R = \sum_{j=1}^{j=s}\sum_{t=0}^{t=t_n} \left\{ \begin{bmatrix} Q_0(x) \\ y_0(x) \\ 1 \end{bmatrix} + \left[Re\left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ y \\ 1 \end{bmatrix}_1^L e^{(i\omega t+\varphi)} \right) \right] \right\} \tag{41}$$

که در آن $\boldsymbol{t_n}$ انتهای زمان مدل‌سازی، s تعداد موج‌های پریودیک و هارمونیک حاصل از تجزیه آب‌نگار ورودی با استفاده از روشFFT و $\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & 0 \\ u_{21} & u_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ماتریس کلی است و از حاصل‌ضرب ماتریس‌های انتقال میدان و ماتریس انتقال نقطه در مسیر کانال به دست می‌آید.

۳- نتایج مدل‌سازی

این روش می‌تواند برای انواع کانال‌ها منشوری و غیر منشوری، رودخانه‌های طبیعی با انواع رژیم جریان (بحرانی، زیربحرانی و فوق بحرانی)، هر نوع شرط مرزی در

بالا و پایین‌دست و همچنین با جریان جانبی متمرکز یا گسترده استفاده شود. برای بررسی دقت روش پیشنهادی، نتایج آن با نتایج مدل‌های آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی با مقطع منشوری مقایسه شده است.

۳-۱- داده‌های آزمایشگاهی

در این بخش یک مدل روندیابی جریان سیل بر مبنای نتایج آزمایش (Rashid and Chaudhry (1995 بررسی می‌شود. این آزمایش دریک فلوم با مقطع مستطیلی به عرض کف ۳۱ سانتی‌متر، طول ۲۱ متر، شیب کف یکنواخت ۰/۰۰۲۱ و ضریب مانینگ متناسب با عمق کانال انجام شده است. جریان در فلوم به‌صورت غیرماندگار و غیریکنواخت است. در انتهای فلوم نیز یک سرریز قرار دارد و بین دبی و تراز آب رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$Q = C\left(h - a\right)^{m} \tag{42}$$

که در آن a ارتفاع سرریز نسبت به کف کانال، Q دبی عبوری از سرریز، h ارتفاع آب از کف کانال، C و m ضریب‌های ثابت به ترتیب برابر با مقادیر ۹/۳۵ و ۱/۱۴ هستند و در آزمایش رشید و چادری به‌صورت تجربی به دست آمده است. ارتفاع سرریز از رابطه (۴۲) و شرایط اولیه جریان محاسبه شده است. نه ایستگاه اندازه‌گیری تراز آب با فاصله‌های مختلف در این فلوم وجود دارند، ایستگاه‌های اول و نهم به ترتیب مرز بالا و پایین‌دست مدل می‌باشند و فاصله بین آن‌ها حدود ۱۸/۶۰ متر است. شرط مرزی بالادست آب‌نگار ترازآب در ایستگاه اول است و اطلاعات آن در مقاله مرجع موجود است (Rashid and Chaudhry, 1995). در این کانال جریان اولیه غیریکنواخت بوده و پروفیل سطح آب به صورت $M1$ است. برای لحاظ کردن تاثیر جریان غیریکنواخت در مدل جدید، از الگوریتم تقسیم کانال به چند قطعه با طول نامساوی و شرایط جریان یکنواخت استفاده شده است. عمق آب در هر قطعه از پروفیل برابر مقاله مرجع بوده و به‌عنوان شرط اولیه تعیین می‌شود، دیگر ویژگی‌های ثابت مورد نیاز هم برابر معادلات (۷) الی (۱۰) به دست می‌آید. برای تجزیه و تبدیل آب‌نگار ورودی در مرز بالادست کانال به چندین موج پریویک و هارمونیک، از روش FFT استفاده شده است. در این تحقیق، برای همخوانی دقیق بین آب‌نگار ورودی مدل آزمایشگاهی و آب‌نگار مجموع موج‌های تجزیه شده ناشی از تبدیل فوریه سریع، از ۲۵۶ موج با فرکانس ۰/۰۰۲ الی ۰/۵ استفاده شده است. مبنای انتخاب تعداد فرکانس‌ها، شاخص ناش-ساتکلیف (Nash-Sutcliffe) است که در آن باید اختلاف بین مجموع موج‌های تجزیه شده و هیدروگراف ورودی به عدد یک میل کند.

۳-۲- دقت مدل

آزمایش رشید و چادری توسط محققان دیگر هم با استفاده از روش‌های عددی و تحلیلی مدل شده است. Cimorelli et al. (2018) و Cimorelli et al. (2015) مجموعه جدیدی از حل تحلیلی برای موج پخشی معادلات خطی شده سنت ونانت استخراج کردند که در آن از رابطه دبی-اشل در مرز پایین‌دست و آب‌نگارهای دبی و اشل به‌عنوان شرط مرزی بالادست استفاده شد. نتایج این مدل با مدل آزمایشگاهی (Rashid and Chaudhry (1995، روش تحلیلی (Cimorelli et al. (2015,2018 و روش عددی پریزمن (Preissman) با ضریب تاثیر یک در دو ایستگاه ۲ و۵ با فاصله‌های ۲/۱۳ و ۱۰/۰۵ متر از ایستگاه اول در حوزه زمان مقایسه شده است. شاخص‌های مختلفی برای مقایسه آب‌نگارهای محاسبه شده و مشاهده شده وجود دارد. در مدل‌های روندیابی سیل، بررسی روند شاخه‌های صعودی، نزولی و اوج آب‌نگار، زمان رسیدن اوج آب‌نگار به پایین‌دست وزمان اجرای مدل اهمیت دارد. در بررسی نتایج، آب‌نگار خروجی همه مدل‌های آزمایشگاهی، تحلیلی و عددی پیشین در ایستگاه‌های ۲ و ۵، با نتایج این مدل مقایسه شده است.

برای بررسی و ارزیابی روند آب‌نگار، از مدل تحلیل حساسیت ناش- ساتلیکف که برتری‌ها و ویژگی‌های هر دو مدل ضریب دترمینان و میانگین مربع خطا یا جذر میانگین مربع خطا را دارد، استفاده شده است (Nash and Sutcliffe, 1970).

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{i=N}\left(O_i - P_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{i=N}\left(O_i - \bar{O}\right)^2} \qquad (43)$$

که در آن NSE شاخص ناش- ساتلیکف، N تعداد نمونه‌ها، O_i نمونه مشاهده شده در زمان i، P_i نمونه محاسبه شده در زمان i و $\bar{O}$ مقدار میانگین نمونه‌های مشاهده شده است. در جدول (۱)، نتایج شاخص یادشده برای مدل تحلیلی این پژوهش، روش‌های تحلیلی Cimorelli et al. (2015,2018) و روش عددی پریزمن با نتایج مدل آزمایشگاهی رشید و چادری در دو ایستگاه ۲ و ۵ مقایسه شده است.

شاخص NSE در محدوده [$-\infty$,1] قرار می‌گیرد. هر چه به عدد یک نزدیک‌تر باشد، دقت مدل بالاتر و همخوانی بین نتایج واقعی و شبیه‌سازی به هم نزدیک‌تر می‌باشند. در شاخص NSE برابر با صفر، مقدار پیشگویی شده از مدل تقریبی، دقتی برابر با مقدار میانگین دارد. در هر دو ایستگاه ۲ و ۵، شاخص NSE در این پژوهش نسبت به مدل‌های عددی پریزمن و تحلیلی سیمورلی و همکاران دقیق‌تر و به ترتیب برابر با ۰/۹۸۹۳ و ۰/۹۸۷۲ است. هر چند که، بنا بر یافته‌های پیشین، شاخص $NSE>0.7$ به‌عنوان یک انطباق رضایت بخشی بین نتایج مشاهده شده و محاسبه شده به شمار می‌آید(Moriasi et al., 2007) .

جدول ۱ شاخص ناش- ساتکلیف برای مدل‌های مختلف

Table 1 Nash–Sutcliffe index for different models

Model	Station 2	Station 5
Analytical model of the present study	0.9893	0.9872
Analytical model of Cimorelli et al. (2015)	0.9800	0.9716
Analytical model of Cimorelli et al. (2018)	0.9816	0.9867
Model of Priessmann	0.9669	0.9065

در مدل‌های روندیابی سیل، اوج آب‌نگار معمولاً مهم‌ترین خروجی مدل است. مقایسه اوج‌ها را می‌توان به شکل نسبت دبی اوج محاسبه شده به اوج مشاهده شده یا به‌صورت درصد خطا در اوج شبیه‌سازی بیان کرد. آب‌نگار مورد بحث در اینجا اوج واحدی برای مقایسه ندارد. لذا میانگین اوج آب‌نگار مبنای مقایسه قرار گرفته است (Green and Stephenson, 1986). در جدول (۲) درصد خطای اوج شبیه‌سازی نسبت به اوج مشاهده شده مدل Rashid and Chaudhry (1995) ارائه شده است. با توجه به اینکه شرط‌های مرزی بالا و پایین‌دست در این پژوهش و مدل Cimorelli et al. (2018) یکسان می‌باشد، اوج آب‌نگار آن‌ها نسبت به نتایج مدل آزمایشگاهی Rashid and Chaudhry (1995) قابل مقایسه است. اوج آب‌نگار مدل اخیر در ایستگاه‌های (۲) و (۵)، با اختلاف اندکی بهتر از مدل Cimorelli et al. (2018) می‌باشد.

جدول ۲ میانگین اوج آب‌نگار در مدل‌های مختلف و درصد اختلاف آن‌ها نسبت به مدل آزمایشگاهی رشید و چادری

Table 2 Mean hydrograph peak in different models compared to Rashid and Chaudhry laboratory model

Model	Station 2 (cm)		Station 5 (cm)	
	Value	Percentage difference	Value	Percentage difference
Experimental results of Rashid and Chaudhry (1995)	19.87		19.71	
Analytical model of the present study	19.53	1.71%	19.55	0.81%
Analytical model of Cimorelli et al. (2015)	19.73	0.70%	19.70	0.05%
Analytical model of Cimorelli et al. (2018)	19.46	2.06%	19.53	0.91%
Model of priessmann	19.84	0.15%	18.82	4.52%

شاخص مهم دیگر در بررسی آب‌نگار خروجی از مدل، زمان رسیدن اوج آب‌نگار به پایین‌دست است. متوسط این زمان برای همه‌ی مدل‌ها در جدول (۳) ارائه شده است. زمان میانگین اوج آب‌نگار در مدل اخیر با نتایج آزمایشگاهی رشید و چادری برابر است. مقایسه زمان اوج آب‌نگار در ایستگاه‌های ۲ و ۵ مدل اخیر با مدل‌های تحلیلی Cimorelli et al. (2015,2018) دقت بهتری را نشان می‌دهد.

شاخص دقت مدل‌سازی در روش‌های عددی صریح به انتخاب گام زمانی با رعایت شرط کورانت بستگی دارد. به طور معمول هر چه گام زمانی کوچک‌تر باشد، نتایج بهتر

جدول ۳ زمان رسیدن میانگین اوج آب‌نگار در مدل‌های مختلف به پایین‌دست

Table 3 The log time of hydrograph

Model	Station 2 (sec)	Station 5 (sec)
Experimental results of Rashid (1995) and Chaudhry	155	160
Analytical model of the present study	155	160
Analytical model of Cimorelli et al. (2015)	160	165
Analytical model of Cimorelli et al. (2018)	159	163
Model of priessmann	160	167

است اما بـه نسـبت بـار محاسـباتی افـزایش مـی‌یابـد. در روش‌های عددی ضمنی غیرخطی برای اینکه سیسـتم بـه پاسخ مناسب برسد، فرایند حل تکرار می‌شود و ایـن بـرای کانال‌های طولانی و مدل‌های بهینه‌سازی زمان‌بر اسـت. در این تحقیق اخیر، مدل تحلیلی توسط برنامـه متلـب اجـرا شد و زمان اجرای برنامه با روش عـددی پریـزمن در یـک رایانه (پردازنـده چهـار هسـته‌ای سـری چهـار و رم چهـار گیگابایت) در شرایط یکسان در جدول (۴) مقایسـه شـده است. زمان انجام مدل‌سازی این پژوهش ۱۱/۸۴ ثانیه و در روش عددی ضمنی پریزمن ۵۴/۴۸ ثانیه بود. این اخـتلاف بسیار زیاد در زمان اجرای برنامه، در مدل‌های پیش‌بینـی، هشدار سیل و بهینه‌سازی بسیار با اهمیت هستند.

مقایسه گرافیکی آب‌نگارهای شبیه‌سازی و مشـاهده شـده، اغلب ابزاری سریع و جامع برای ارزیابی دقت خروجی مدل است، زیرا برخی از اختلاف‌ها در نرخ‌های اوج جریان یا در مجموع حجم جریان، بی درنـگ آشـکار می‌شـوند. اگرچـه استفاده از برخی روش‌های فنی آماری برازش ممکن است ضـروری باشـد، ارزش مقایسـه گرافیکـی آب‌نگارهـای شبیه‌سازی شده و مشاهده‌شده را نباید نادیـده گرفـت. در شکل (۳) آب‌نگار روندیابی شـده از مـدل اخیـر بـا نتـایج آزمایشگاهی رشید و چادری در ایسـتگاه ۲ مقایسـه شـده است. مقایسه چشمی همخوانی خوب نتایج محاسبه شـده و مشاهده شده را در شاخه‌هـای بالارونـده، پـایین‌رونـده و اوج آب‌نگار نشان می‌دهـد. در شـکل (۴)، مـدل تحلیلـی اخیـر بـا نتـایج آزمایشـگاهی Rashid and Chaudhry (1995) در ایسـتگاه ۵ مقایسـه شـده اسـت. شـاخه‌های بالارونده، پایین‌رونده و اوج آب‌نگار همخوانی بسیار خـوبی دارند.

جدول ۴ زمان مدل‌سازی رایانه‌ای

Table 4 Time of computer modeling

Model	Time (sec)
Analytical model of the present study	11.84
Model of Priessmann	54.48

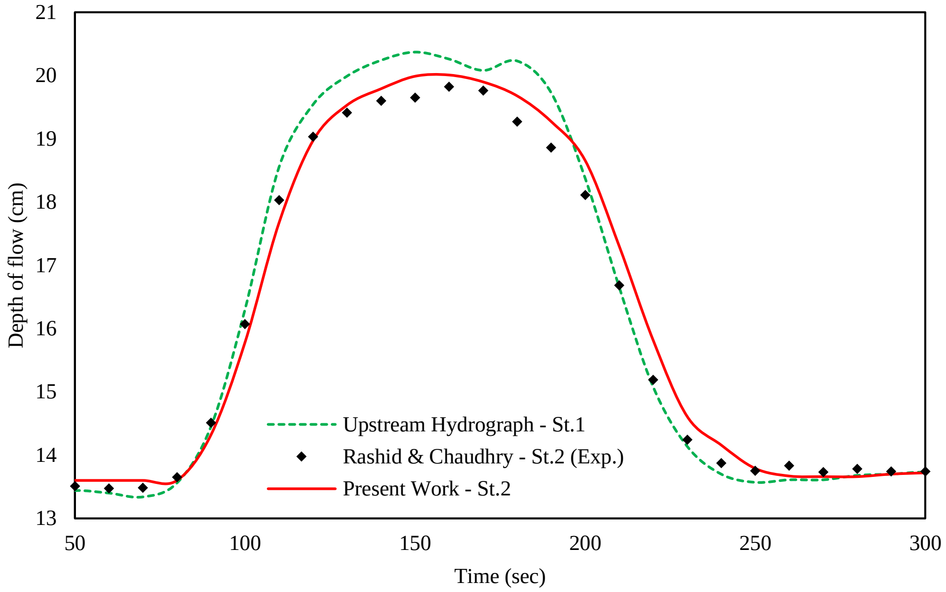

Fig. 3 Results of the present analytical model in comparison with the laboratory model of Rashid and Chaudhry at station 2

شکل ۳ مقایسه نتایج مدل تحلیلی اخیر با مدل آزمایشگاهی رشید و چادری در ایستگاه ۲

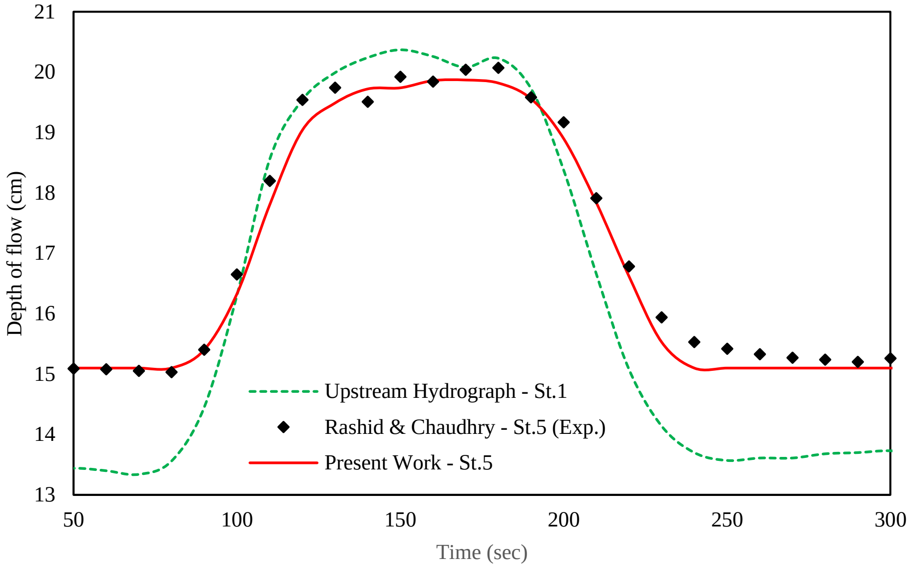

Fig. 4 Results of the present analytical model in comparison with the laboratory model of Rashid and Chaudhry at station 5

شکل ۴ مقایسه نتایج مدل تحلیلی اخیر با مدل آزمایشگاهی رشید و چادری در ایستگاه ۵

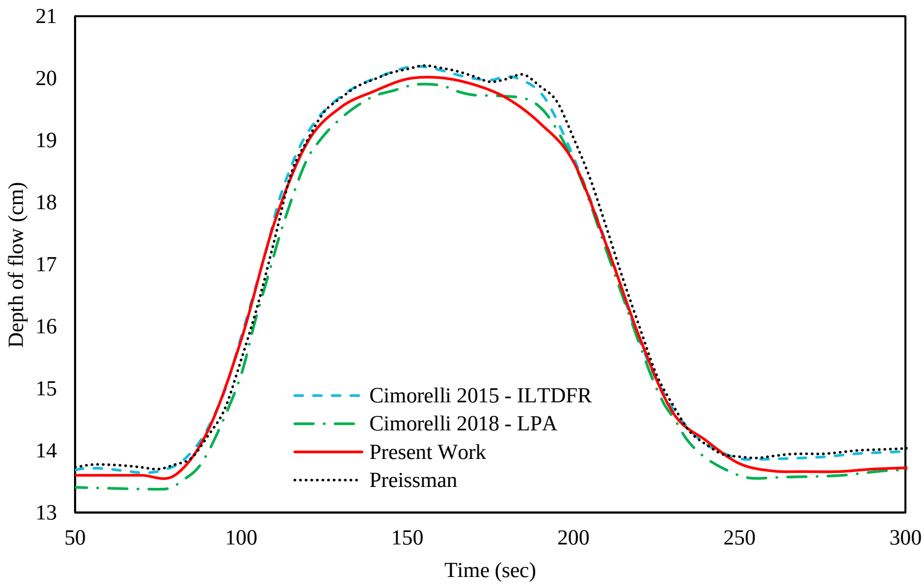

Fig. 5 Results of the present analytical model in comparison with the models of Cimorelli et al. (2015,2018) and Preissman numerical model at station 2

شکل ۵ مقایسه نتایج مدل تحلیلی اخیر با مدل‌های تحلیلی (Cimorelli et al. (2015,2018 و مدل عددی پریزمن در ایستگاه ۲

در شکل‌های (۵) و (۶)، نتایج مدل تحلیلی اخیر با مدل‌های تحلیلی (Cimorelli et al. (2015,2018 و مدل عددی پریزمن در ایستگاه‌های ۲ و ۵ مقایسه شده است. روند آب‌نگار در شاخه‌های مختلف همخوانی خوبی دارند. در شکل (۵)، اوج هیدروگراف مدل تحلیلی Cimorelli et al. (2015) بر مدل تحلیلی اخیر منطبق است. اختلاف ابتدا و انتهای مدل تحلیلی اخیر و مدل .Cimorelli et al (2018) با مدل (Cimorelli et al. (2015 به این دلیل است که، در مدل ۲۰۱۵ هیدروگراف دبی به‌عنوان شرط مرزی بالادست انتخاب شده است.

۴- نتیجه‌گیری

هدف این تحقیق، رفع مشکلات حل تحلیلی معادلات سنت ونانت در حوزه زمان و کاهش زمان اجرای مدلسازی

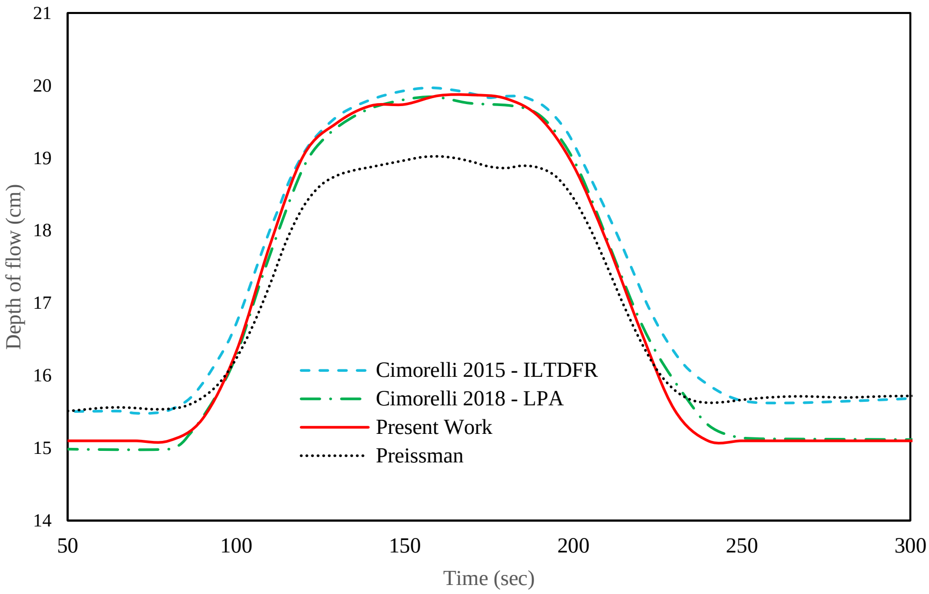

Fig. 6 Results of the present analytical model in comparison with the models of Cimorelli et al. (2018); Cimorelli et al. (2015) and Preissman numerical model at station 5

شکل ۶ مقایسه نتایج مدل تحلیلی اخیر با مدل‌های تحلیلی Cimorelli et al. (2015,2018) و مدل عددی پریزمن در ایستگاه ۵

در حوزه فرکانس بوده است. لذا معادلات کامل سنت ونانت با استفاده از سری فوریه، تبدیل فوریه سریع (*FFT*) و ماتریس‌های انتقال حل می‌شود و این روش بدون قید و شرط پایدار است. شرط مرزی بالادست آب‌نگار اشل و پایین‌دست منحنی دبی–اشل تعریف شده است. برای همخوانی دقیق بین آب‌نگار ورودی مدل آزمایشگاهی و آب‌نگار مجموع موج‌های تجزیه شده ناشی از تبدیل فوریه سریع، از ۲۵۶ موج با فرکانس ۰/۰۰۲ الی ۰/۵ استفاده شده است. مبنای انتخاب شمار فرکانس‌ها، مدل ناش-ساتکلیف (Nash-Sutcliffe) است که باید اختلاف بین مجموع موج‌های تجزیه شده و آب‌نگار ورودی به عدد یک میل کند. اثر جریان جانبی متمرکز و جریان غیریکنواخت در شرایط اولیه در مدل در نظر گرفته شده است. برای بررسی دقت این روش، نتایج آن با مدل آزمایشگاهی، روش‌های عددی و تحلیلی همانند در حوزه زمان مقایسه شد. بر اساس معیارهای کمی و کیفی اندازه‌گیری، نتایج مدل تحلیلی حاضر دقیق‌تر از دیگر مدل‌های همانند است. با توجه به‌دقت نتایج، پایداری بدون قید و شرط و زمان کوتاه محاسبه‌ها، می‌توان از این مدل برای پیش‌بینی و هشدار سیل و همچنین مدل‌های بهینه‌سازی استفاده کرد. از این روش می‌توان در تحلیل جریان رودخانه‌های طبیعی و انواع کانال‌های آبیاری با هر نوع رژیم جریان استفاده کرد.

۵- فهرست نشانه‌ها

دبی جریان (m^3s^{-1})	$Q(x,t)$
سطح مقطع جریان (m^2)	$A(x,t)$
عمق (m)	$Y(x,t)$
متغیر مستقل زمان (s)	t
متغیر مستقل مکان (m)	χ
شتاب گرانش (ms^{-2})	g
شیب هیدرولیکی جریان	S_f
شیب کف کانال	S_0
دبی میانگین (m^3s^{-1})	$Q_0(x)$
دبی نوسانی حول یک حالت ثابت (m^3s^{-1})	$q^*(x,t)$
عمق آب میانگین (m)	$Y_0(x)$
عمق آب نوسانی حول یک حالت ثابت(m)	$y^*(x,t)$
دامنه موج سینوسی (m^3s^{-1})	q
دامنه موج سینوسی (m)	y
عرض سطح آب در حالت پایدار (m)	T_0
سرعت میانگین جریان درحالت پایدار (ms^{-1})	V_0
تابع تبدیل فوریه گسسته	G
مقادیر نمونه‌ها در حوزه زمان	g_G

عدد صحیح	k
فاصله زمانی نمونه‌برداری (s)	T
تعداد نمونه‌ها	N
دامنه نوسان موج عمق آب در مقطع بالادست کانال (m)	y_i^L
دامنه نوسان موج عمق آب در مقطع پایین‌دست کانال (m)	y_i^R
دامنه نوسان موج دبی در مقطع پایین‌دست کانال (m)	q_i^R
ماتریس انتقال میدان کانال j ام	F_j
بردار حالت در بالادست کانال j ام	Z_j^L
بردار حالت در بالادست کانال j ام	Z_j^R
ماتریس انتقال نقطه برای مرز مشترک بین کانال‌های j و $j+1$	P_j
ماتریس انتقال کل	U
دبی جانبی ورودی و خروجی (m^3s^{-1})	$q_{lateral}$
ارتفاع سرریز نسبت به کف کانال (m)	a
ارتفاع آب از کف کانال (m)	h
شاخص ناش ساتلکلیف	NSE
نمونه مشاهده شده j ام	O_i
نمونه محاسبه شده j ام	P_i
مقدار میانگین نمونه‌های مشاهده شده	$\bar{O}$
فرکانس موج سینوسی ($rad.s^{-1}$)	ω
تغیر فاز موج سینوسی (radians)	φ

۶- منبع‌ها

Chang, C.-M. and Yeh, H.-D. (2016a). Probability density functions of the stream flow discharge in linearized diffusion wave models. Journal of Hydrology, 543, 625-629.

Chang, C.-M. and Yeh, H.-D. (2016b). Stochastic modeling of variations in stream flow discharge induced by random spatiotemporal fluctuations in lateral inflow rate. Stochastic Environmental Research and Risk Assessment, 30(6), 1635-1640.

Charlier, J.-B., Moussa, R., Bailly-Comte, V., Danneville, L., Desprats, J.-F., Ladouche, B. and Marchandise, A. (2015b). Use of a flood-routing model to assess lateral flows in a karstic stream: implications to the hydrogeological functioning of the Grands Causses area (Tarn River, Southern France). Environmental Earth Sciences, 74(12), 7605-7616.

Charlier, J.-B., Moussa, R., Bailly-Comte, V., Desprats, J.-F. and Ladouche, B. (2015a). How karst areas amplify or attenuate river flood peaks? A response using a diffusive wave model with lateral flows. In: Hydrogeological and Environmental Investigations in Karst Systems, Bartolomé Andreo, Carrasco, F., Durán, J.J., Jiménez, P., LaMoreaux, J.W. (Eds.), Springer, 293-301.

Chaudhry, M.H. (1979). Applied hydraulic transients, Litton Educational Publishing, Inc.

Chung, W.-H., Aldama, A.A. and Smith, J.A. (1993). On the effects of downstream boundary conditions on diffusive flood routing. Advances in water resources, 16(5), 259-275.

Cimorelli, L., Cozzolino, L., D'Aniello, A. and Pianese, D. (2018). Exact solution of the Linear Parabolic Approximation for flow-depth based diffusive flow routing. Journal of Hydrology, 563, 620-632.

Cimorelli, L., Cozzolino, L., Della Morte, R., Pianese, D. and Singh, V.P. (2015). A new frequency domain analytical solution of a cascade of diffusive channels for flood routing. Water Resources Research, 51(4), 2393-2411.

Cimorelli, L., Cozzolino, L., Morte, R.D. and Pianese, D. (2013). An improved numerical scheme for the approximate solution of the Parabolic Wave model. Journal of Hydroinformatics, 15(3), 913-925.

Colin, F., Guillaume, S. and Tisseyre, B. (2011). Small catchment agricultural management using decision variables defined at catchment scale and a fuzzy rule-based system: a Mediterranean vineyard case study. Water Resources Management, 25(11), 2649-2668.

Cooley, J.W. and Tukey, J.W. (1965). An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series. Mathematics of computation, 19(90), 297-301.

Fan, P. and Li, J. (2006). Diffusive wave solutions for open channel flows with uniform and concentrated lateral inflow. Advances in water resources, 29(7), 1000-1019.

Green, I. and Stephenson, D. (1986). Criteria for comparison of single event models. Hydrological Sciences Journal, 31(3), 395-411.

transient flow with the virtual valves method to reduce linearization errors. Mechanical Systems and Signal Processing, 131, 486-504.

Ranginkaman, M.H., Haghighi, A. and Samani, H. M.V. (2017). Application of the frequency response method for transient flow analysis of looped pipe networks. International Journal of Civil Eng., 15(4), 677-687.

Rashid, R.M. and Chaudhry, M.H. (1995). Flood routing in channels with flood plains. Journal of Hydrology, 171(1-2), 75-91.

Simmons, G.F. (2016). Differential equations with applications and historical notes, CRC Press.

Spada, E., Sinagra, M., Tucciarelli, T., Barbetta, S., Moramarco, T. and Corato, G. (2017). Assessment of river flow with significant lateral inflow through reverse routing modeling. Hydrological Processes, 31(7), 1539-1557.

Todini, E. (1996). The ARNO rainfall—runoff model. Journal of hydrology, 175(1-4), 339-382.

Todini, E. and Bossi, A. (1986). PAB (Parabolic and Backwater) an unconditionally stable flood routing scheme particularly suited for real time forecasting and control. Journal of Hydraulic Research, 24(5), 405-424.

Zoccatelli, D., Borga, M., Zanon, F., Antonescu, B. and Stancalie, G. (2010). Which rainfall spatial information for flash flood response modelling? A numerical investigation based on data from the Carpathian range, Romania. Journal of Hydrology, 394(1-2), 148-161.

Hayami, S. (1951). On the propagation of flood waves. Bulletins-Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, 1, 1-16.

Litrico, X. and Fromion, V. (2009). Modeling and control of hydrosystems, Springer Science & Business Media.

Moriasi, D.N., Arnold, J.G., Van Liew, M.W., Bingner, R.L., Harmel, R.D. and Veith, T.L. (2007). Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulations. Transactions of the ASABE, 50(3), 885-900.

Moussa, R. and Bocquillon, C. (2009). On the use of the diffusive wave for modelling extreme flood events with overbank flow in the floodplain. Journal of hydrology, 374(1-2), 116-135.

Nash, J.E. and Sutcliffe, J.V. (1970). River flow forecasting through conceptual models part I-A discussion of principles. Journal of hydrology, 10(3), 282-290.

Pham, D.T., Ghanbarzadeh, A., Koç, E., Otri, S., Rahim, S. and Zaidi, M. (2006). The Bees Algorithm-A Novel Tool for Complex Optimization Problems. Intelligent production machines and systems, 2nd I*PROMS Virtual International Conference 3–14 July 2006, Elsevier, 454-459.

Ponce, V.M., Simons, D.B. and Li, R.-M. (1978). Applicability of kinematic and diffusion models. Journal of the Hydraulics Division, 104(3), 353-360.

Ranginkaman, M.H., Haghighi, A. and Lee, P.J. (2019). Frequency domain modelling of pipe