

# Using Nonlinear Programming Method and Gray Wolf Algorithm for Estimating Parameters of Nonlinear Muskingum Model

Farshad Haiati <sup>1</sup>, Behrouz Yaghoubi <sup>1\*</sup>, Sara Nazif <sup>2</sup>

1- Department of Water Engineering, Kermanshah Branch, Islamic Azad University, Kermanshah, Iran.

2- School of Civil Engineering, College of Engineering, University of Tehran, Iran.

\* [byaghubi@gmail.com](mailto:byaghubi@gmail.com)

Received: 21 September 2021, Accepted: 21 February 2022  J. Hydraul. Homepage: [www.jhyd.iha.ir](http://www.jhyd.iha.ir)

## Abstract

**Introduction:** Flood routing is an important issue in the river engineering. The flood routing methods are categorized into two groups of hydraulic and hydrologic methods. Hydraulic routing methods require considerable input data and time-consuming calculations. However, hydrological models need less input data and are less complicated in comparison with hydraulic routing methods. The hydrological routing models are based on the continuity equation and a relationship between inflow/outflow values and flood storage. The linear Muskingum is a hydrological routing model commonly used in rivers routing. However, as the relation between channel storage and the inflow/outflow is nonlinear, the nonlinear form of this model is developed which has received special attention in recent years and several types of it have been proposed. Using the Muskingum model, as well as saving time, valuable information about the flood depth and hydrograph could be obtained. However, the performance of these models is highly dependent on the optimal estimation of their parameters considering the study area characteristics.

**Materials and Methods:** Although nonlinear Muskingum models have special advantages over the linear Muskingum model, the hydrologists avoid from the nonlinear Muskingum models, because of the difficulties in the estimation of their parameters. Therefore, researchers have attempted to estimate these parameters using the optimization algorithms. In this research, the nonlinear Muskingum model type 5 (NL5) is considered for flood routing and nonlinear programming (NLP) is used for estimation of the optimal values of model parameters. The results are compared with the metaheuristic optimization algorithms of genetic algorithm (GA), particle swarm optimization algorithm (PSO) and Gray wolf optimizer (GWO). The objective function of the optimization algorithms was set to minimize the sum of squares of the difference between the measured and simulated values of flows (SSR). Wilson flood hydrograph (first case study), Wy River flood hydrograph in England (second case study) and the hydrograph presented by Vatankhah (2014) (third case study) were used as the case studies of this research.

**Results:** The performance of NL5 model was very good in the all considered cases. In the first case study, the maximum absolute error is less than seven percent. Also, in the second and third case studies, the maximum absolute errors are less than 20 percent and 10 percent, respectively. MARE, NSE, CC, DPO and DPOT measures were used to further evaluate the model performance. The closer values of MARE, DPO and DPOT to zero and the closer the

values of the NSE and CC measures to one, show the better the performance of the model (Kult et al., 2014). In the first case study, the MARE values for NLP, GWO, PSO and GA algorithms respectively are 0.011, 0.011, 0.012 and 0.012 m<sup>3</sup>/s. For the second case study, the MARE values respectively are 0.104, 0.105, 0.103 and 0.104 m<sup>3</sup>/s. The values of this measure in the third case study for the mentioned optimization methods are 0.0301, 0.0301, 0.0301 and 0.0303 m<sup>3</sup>/s, respectively. The values of this measure show the perfect performance of NLP, GWO, PSO and GA techniques in estimation of NL5 parameters. DPO, DPOT, NSE and CC indices also show the same finding. SSR values in the first case study for NLP, GWO, PSO and GA optimization methods are 5.44, 5.44, 5.47 and 5.88, respectively. Also, SSR values for the second case study are 30837.6, 30848.2, 30880.1 and 30929.1, respectively. For the third case study, these values are 7356.7, 7432.1, 7391 and 7412.3. The simulation times for NLP, GWO, PSO and GA methods show that the processing time in the NLP method is much less than the other methods. The optimization methods are ranked based on their results accuracy and simulation time. NLP method is ranked first in the regard while is followed by GWO, PSO and GA in the next ranks. The comparison of the obtained SSR values in the current study and the previous studies which used the cases one and two, shows that the NLP optimization method has better performance in estimation of NL5 model parameters. In this study, for the third case study (Vatankhah, 2014), which has not been routed by the NL5 model previously, the results of routing with NL5 are compared with the results obtained with the Runge–Kutta method (Vatankhah, 2014). The SSR value when using NLP as the optimization tool for estimation of NL5 model parameters is 7356.8 m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup>, while in the Runge–Kutta method, that is 14441.3 m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup>. Therefore, in this case study, the NL5 model has performed better than the Runge–Kutta method.

**Conclusion:** In the present study, NLP technique and powerful GWO algorithm were used to estimate the optimal values of NL5 model parameters and the results were compared with GA and PSO algorithms. The performance evaluation results indicate that the NLP method, in addition to being more accurate, also requires less time to estimate the optimal value of the parameters. The values of the objective function for the first case study for NLP, GWO, GA and PSO methods respectively are 5.44, 5.44, 5.88 and 5.47 m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup>, while these values for the second case study respectively are 30837.6, 30848, 30929.1 and 3088.1 m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup> and for the third case study respectively are 7356.7, 7432.1 7412.3 and 7391 m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup>. NLP processing time is at least 10% less than the other considered optimization methods. Therefore, the NLP method is the best choice for estimating the optimal parameters of Muskingum type five by considering two factors of accuracy and speed of simulation even though all of the methods showed a very good performance. Also, in the third case study, which was not routed previously, by the NL5 model, the results were compared with the Runge–Kutta method, and the results showed that the NL5 model calibrated using NLP method performed better. After NLP, GWO, PSO and GA methods had the better performance in estimating the NL5 parameters, respectively.

**Keywords:** Flood routing, Nonlinear Muskingum, NL5 model, Gray wolf optimizer optimization

© 2022 Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.



This is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license)

(<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

# استفاده از روش برنامه‌ریزی غیرخطی و الگوریتم گرگ خاکستری برای تخمین پارامترهای مدل غیرخطی ماسکینگام

فرشاد حیاتی<sup>۱</sup>، بهروز یعقوبی<sup>۱\*</sup> و سارا نظیف<sup>۲</sup>

۱- گروه مهندسی آب، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران

۲- دانشکده مهندسی عمران، دانشکدگان فنی، دانشگاه تهران، تهران، ایران

\* byaghubi@gmail.com

دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۳۰، پذیرش: ۱۴۰۰/۱۲/۰۲، وب‌گاه نشریه هیدرولیک: [www.jhyd.iha.ir](http://www.jhyd.iha.ir)

**چکیده:** از روش‌های متداول روندیابی هیدرولوژیکی جریان در رودخانه، روش ماسکینگام است که با هزینه محاسباتی و زمان اندک، می‌تواند هیدروگراف سیل را در نقطه مدنظر از رودخانه مشخص نماید. در طول سال‌های اخیر تحقیقات بسیاری بر روی بهبود عملکرد این مدل صورت گرفته که منجر به توسعه انواع غیرخطی آن شده است. انتخاب مدل مناسب ماسکینگام و تخمین بهینه پارامترهای آن نقش تعیین کننده‌ای در عملکرد نهایی مدل دارد. در این پژوهش برای برآورد مقدار بهینه پارامترهای مدل تیپ پنج ماسکینگام (NL5) که از انواع توسعه داده شده در سال‌های اخیر است، از روش برنامه‌ریزی غیرخطی (NLP) استفاده شد، و نتایج با الگوریتم‌های فرا ابتکاری گرگ خاکستری (GWO)، ژنتیک (GA) و ازدحام ذرات (PSO) مقایسه شده است. هدف از بهینه‌سازی حداقل نمودن مجموع مربعات اختلاف میان سیل اندازه‌گیری و روندیابی شده (SSR) در نظر گرفته شد. به منظور ارزیابی بهتر عملکرد الگوریتم‌های بهینه‌سازی، از اطلاعات سه مطالعه موردی مطرح در تحقیقات قبلی شامل هیدروگراف سیل ویلسون، سیل رودخانه وای و تحقیق Vatankhah, 2014 استفاده شده است. پس از تعیین پارامترهای بهینه مدل NL5 با استفاده از روش NLP، مقدار SSR برای سه مطالعه موردی مذکور به ترتیب 5.44، 30837.6 و 30837.6 تعیین شد. برای مقایسه الگوریتم‌های مختلف بهینه‌سازی از شاخص‌های مختلفی به منظور ارزیابی عملکرد استفاده شد که همگی عملکرد بسیار مطلوبی را در هر سه مطالعه موردی نشان دادند. به عنوان نمونه شاخص NSE در تمام حالات بیشتر از 0.99 بدست آمد، که نشان می‌دهد نتایج بهینه‌سازی بسیار مناسب است. در نهایت با توجه به نتایج شاخص‌های عملکردی، به ترتیب تکنیک‌های بهینه‌سازی NLP، GWO، PSO و GA بهترین تا ضعیف‌ترین عملکرد را در تعیین پارامترهای بهینه مدل NL5 با توجه به سیلاب‌های مورد بررسی داشتند.

**کلیدواژگان:** روندیابی سیل، ماسکینگام غیرخطی، مدل NL5، الگوریتم گرگ خاکستری، برنامه‌ریزی غیرخطی.

## ۱- مقدمه

می‌شوند (Chow, 1959). روش‌های هیدرولیکی مبتنی بر حل معادله‌های دیفرانسیل پیوستگی و اندازه حرکت و دارای محاسبه‌های پیچیده هستند. این روش‌ها با وجود اینکه دقت بالایی دارند اطلاعات زیادی نیاز دارند که تهیه این اطلاعات نیازمند صرف هزینه و زمان است. روش‌های هیدرولوژیکی مبتنی بر حل معادله پیوستگی و یک معادله دیگر است که اغلب ذخیره را به عنوان تابعی از دبی‌های ورودی و خروجی در بازه مورد ارزیابی در نظر می‌گیرد. یکی از روش‌های هیدرولوژیکی روش ماسکینگام است. این

روندیابی سیل<sup>۱</sup> یک مسئله مهم در مهندسی منابع آب است. در روندیابی سیلاب هیدروگراف جریان پایین‌دست توسط آب‌نگار جریان معلوم بالادست تعیین می‌شود. از آنجا که طراحی سازه‌های هیدرولیکی بر مبنای هیدروگراف خروجی انجام می‌شود، لذا مسئله روندیابی سیل دارای اهمیت فراوانی است. بطور کلی روش‌های روندیابی سیل به دو دسته روش‌های هیدرولیکی و هیدرولوژیکی تقسیم

اصل علت توسعه الگوریتم‌های جدید نیز همین دو عامل است. در تحقیقات انجام شده پیشین، کاربرد انواع مدل‌های غیرخطی ماسکینگام برای روندیابی هیدروگراف خروجی رودخانه گزارش شده است. این مدل‌ها عبارت‌اند از: مدل NL1 با سه متغیر تصمیم توسط (Chow, 1959)، NL2 با سه متغیر تصمیم، NL3 با چهار متغیر تصمیم توسط (Gill, 1987)، NL4 با پنج متغیر تصمیم و NL5 با هفت متغیر تصمیم توسط (Haddad et al., 2015). تحقیقات مختلفی نیز در رابطه با روش‌های برآورد فراسنجه‌های مدل ماسکینگام انجام شده است. (Mohammadi Ghalehi and Ebrahimi, 2013) کارایی الگوریتم جستجوی مستقیم<sup>۲</sup> را در بهینه‌سازی فراسنجه‌های مدل غیرخطی ماسکینگام برای روندیابی سیل ویلسون و یک سیل از رودخانه کارون بررسی کردند. بر مبنای نتایج به دست آمده از روندیابی سیل موردی ویلسون با استفاده از الگوریتم جستجوی مستقیم مجموع مربعات و قدرمطلق خطا بین دبی روندیابی شده و مشاهده‌ای به ترتیب 65.62 و 48.29 مترمکعب بر ثانیه به دست آمد (Mohammadi Ghalehi and Ebrahimi, 2013). (Ouyang et al., 2015) با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی علف هرز<sup>۳</sup> نسبت به بهینه‌سازی فراسنجه‌های روش ماسکینگام و پیش‌بینی دقیق سیلاب اقدام کردند، که نتایج نسبت به روش ازدحام ذرات انطباق بیشتری با سیلاب مشاهده‌ای داشت (Rajabi et al., 2015). (Rajabi et al., 2015) کارایی الگوریتم رقابت استعماری<sup>۴</sup> (ACI) را در برآورد فراسنجه‌های بهینه مدل غیرخطی ماسکینگام ارزیابی کرده و نتایج کار را با الگوریتم ژنتیک (GA) و بهینه‌سازی مجموعه ذرات (PSO) مقایسه کردند. سیلاب روندیابی شده با روش الگوریتم رقابت استعماری انطباق بیشتری نسبت به روش‌های GA و PSO با سیلاب مشاهده‌ای داشت. (Rajabi et al., 2015). (Ehteram et al., 2017) از الگوریتم خفاش<sup>۵</sup> برای بهینه‌سازی فراسنجه‌های مدل غیرخطی ماسکینگام در روندیابی سیلاب استفاده

روش بسیار ساده بوده و تنها به یک یا چند سری هیدروگراف ورودی و خروجی مشاهده‌ای همزمان نیازمند است که این اطلاعات از طریق ایستگاه‌های آب‌سنجی در دسترس قرار می‌گیرد. بر مبنای داده‌های هیدروگراف ورودی - خروجی تاریخی ثبت شده فراسنجه‌های مدل برآورد می‌شوند و پس از آن برای تعیین هیدروگراف خروجی متناظر با یک هیدروگراف ورودی، معادله‌های روندیابی ماسکینگام به کار برده می‌شود (Das, 2004). روش ماسکینگام به دو صورت خطی و غیرخطی در روندیابی رودخانه به کار برده می‌شود. در مدل خطی، بین ذخیره و دبی یک رابطه خطی در نظر گرفته و دیگر محاسبه‌ها با فرض وجود همین رابطه انجام می‌شود. مدل خطی ماسکینگام توسط محققان مختلفی استفاده شده است (Chow et al., 1988; Khalifeh et al., 2020b; Norouzi and Bazargan, 2019; Gill, 1978; O'donnell, 1985). در مدل غیرخطی فرض منطقی‌تر وجود رابطه غیرخطی، بین ذخیره و دبی در نظر گرفته می‌شود و محاسبه‌ها با وجود این شرط ادامه می‌یابد. وجود رابطه غیرخطی بین ذخیره و دبی در سامانه رودخانه‌های طبیعی به واقعیت نزدیک‌تر بوده و بسیار منطقی‌تر جلوه می‌کند. لذا، در سال‌های اخیر روش ماسکینگام غیرخطی بیشتر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است (khalifeh et al., 2021b; Mohammad Rezapour Tabari and Emami Dehcheshmeh, 2018; Mohammadi Ghalehi et al., 2010; Mohammadi et al., 2010; Mohan, 1997; Norouzi and Bazargan, 2019; O'donnell, 1985; Rajabi et al., 2015; Zeinali and Pourreza-Bilondi, 2018). کارایی مدل ماسکینگام در روندیابی سیلاب تحت تأثیر فراسنجه‌های به کار رفته در آن است، لذا برآورد بهینه فراسنجه‌ها در دقت مدل ماسکینگام اهمیت بسزایی دارد. در یک دهه گذشته استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری برای برآورد فراسنجه‌های مدل ماسکینگام بیشتر شده است (Akbari et al., 2020; Akbarifard et al., 2018; Bozorg-Haddad et al., 2019; Bozorg-Haddad et al., 2021; Farahani et al., 2019; Khalifeh et al., 2021a; et al., 2020a). در روش‌های برآورد فراسنجه‌ها دو مورد<sup>۱</sup> نزدیک شدن به پاسخ بهینه مطلق و مدت زمان حل در کارایی روش مؤثر است. در

2 Direct search algorithm

3 Weed Optimization Algorithm

4 Imperialist Competition Algorithm

5 Bat Algorithm

1 Item

## ۲-۱- مدل ماسکینگام

رهیافت ماسکینگام یکی از روش‌های روندیابی هیدرولوژیکی در رودخانه است که نخستین بار توسط (McCarthy, 1938) پیشنهاد گردید. معادله‌های بنیادی به کار رفته در مدل ماسکینگام رابطه‌های پیوستگی و ذخیره به صورت زیر است:

$$\frac{dS}{dt} = I_t - O_t \quad (1)$$

$$S_t = K[XI_t + (1 - X)O_t] \quad (2)$$

در این رابطه‌های  $S_t$ ،  $I_t$  و  $O_t$  به ترتیب حجم ذخیره، جریان ورودی به بازه و جریان خروجی از بازه رودخانه در زمان  $t$ ،  $K$  ضریب زمان-ذخیره رودخانه است و یک مقدار منطقی نزدیک به زمان گذر جریان از کل بازه رودخانه دارد ( $0 < X < 0.5$ ) (Geem, 2006; Mohan, 1997). مدل ماسکینگام غیرخطی نوع پنجم ( $NL5$ ) نسبت به نوع چهارم آن ( $NL4$ ) خطای کمتری در برآورد سیلاب دارد. (Haddad et al., 2015). لذا در این تحقیق مدل ماسکینگام  $NL5$  در روندیابی سیلاب ارزیابی شده که ویژگی‌های آن به شرح زیر است:

$$I = a_1 y_U^{n_1} \Rightarrow y_U = \left(\frac{I}{a_1}\right)^{\frac{1}{n_1}} \quad (3)$$

$$O = a_2 y_D^{n_2} \Rightarrow y_D = \left(\frac{O}{a_2}\right)^{\frac{1}{n_2}} \quad (4)$$

$$S_U = b y_U^m \Rightarrow S_U = b \left(\frac{I}{a_1}\right)^{\frac{m}{n_1}} \quad (5)$$

در رابطه‌های بالا جریان ورودی به بازه رودخانه ( $I$ )، جریان خروجی از بازه رودخانه ( $O$ )،  $S_U$  ذخیره گوه‌ای و  $S_D$  ذخیره منشوری هستند که به ترتیب به مقدار ذخیره به‌ازای عمق‌های قسمت‌های انتهایی بالادست ( $y_U$ ) و پایین‌دست ( $y_D$ ) اشاره دارند (Chow, 1959).

با قرار دادن  $C_1 = \left(\frac{1}{a_1}\right)^{\frac{m}{n_1}}$  و  $\alpha_1 = \frac{m}{n_1}$  در رابطه ۵ مقدار ذخیره گوه‌ای از رابطه ۶ تعیین می‌شود:

$$S_U = b(C_1 I^{\alpha_1}) \quad (6)$$

کردند. برای بررسی کارایی این الگوریتم، بررسی موردی سیل ویلسون و همچنین یک سیل تاریخی از منطقه‌ی لیقوان مدنظر قرار گرفتند. مقدار تابع هدف مجموع مربعات اختلاف بین سیل خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده برای سیل ویلسون 35.14 محاسبه کردند (Hamed et al., 2016). (et al., 2017) برای روندیابی سیلاب استفاده کردند و برای تعیین فراسنجه‌های این مدل الگوریتم بهینه‌سازی علف هرز (WOA) را به کار بردند (Hamed et al., 2016). (Bozorg-Haddad et al., 2021) از الگوریتم بهینه‌سازی تکاملی فراابتکاری مبتنی بر یادگیری<sup>۱</sup> (TLBO) برای برآورد فراسنجه‌های مدل ماسکینگام سه فراسنجه‌ای استفاده کردند. TLBO یک الگوریتم بهینه‌سازی فرا ابتکاری بدون پارامتر به‌نسبت جدید است و از رابطه‌های بین آموزگار و دانش‌آموزان برای بهبود دانش کلی یک موضوع در یک کلاس الهام می‌گیرد. تابع هدف کمینه‌سازی خطای میان جریان روندیابی شده و اندازه‌گیری شده در نظر گرفته شده است (Bozorg-Haddad et al., 2021).

در این پژوهش از مدل غیر خطی  $NL5$  ماسکینگام برای روندیابی سیلاب در سه بررسی موردی استفاده شده است. با توجه به قابلیت‌های بالای الگوریتم‌های فراابتکاری در حل مسئله‌های پیچیده مهندسی، در این پژوهش برای برآورد فراسنجه‌های مدل  $NL5$  از الگوریتم‌های فراابتکاری PSO، GWO و GA استفاده شد و با روش  $NLP^2$  مقایسه شدند. روش  $NLP$  بعنوان روشی که تاکنون برای حل مسئله بهینه‌سازی  $NL5$  استفاده نشده است، برای برآورد فراسنجه‌های  $NL5$  به کار برده شد و ارزیابی شد. همچنین الگوریتم GWO نیز بعنوان یک الگوریتم قدرتمند در زمینه بهینه‌سازی و به‌عنوان روشی جدید در حل مسئله بهینه‌سازی  $NL5$  استفاده شد و نتایج آن همراه با نتایج PSO و GA برای ارزیابی روش  $NLP$  استفاده شد.

## ۲- مواد و روش‌ها

1 Teaching-Learning-Based Optimization (TLBO)

2 Nonlinear programming (NLP)

رابطه ۱۴ در نظر گرفته می‌شود (Haddad et al., 2015).

$$SSR = \text{Min} \sum_{t=1}^N \left[ O_t - \frac{\left( \frac{S_t}{K} \right)^{\frac{1}{\beta}} - X(C_1 I_{t-1}^{\alpha_1})}{(1-X)C_2} \right]^2 \quad (14)$$

در این رابطه  $SSR^1$  تابع هدف است، که به صورت کمینه‌سازی مجموع اختلاف بین جریان خروجی مشاهده‌ای ( $O_t$ ) و جریان خروجی روندیابی شده از بازه رودخانه ( $\hat{O}_t$ ) مشخص می‌شود. در این رابطه  $t$  گام زمانی و  $N$  شمار گام‌های زمانی هیدروگراف است.

گام‌های محاسبه جریان خروجی روندیابی شده ( $\hat{O}_t$ ) در مدل بهینه‌سازی به صورت زیر است (Bozorg-Haddad et al., 2019):

گام ۱. تعیین حدود پایین ( $lb$ ) و بالا ( $ub$ ) متغیرهای تصمیم (محدوده ممکن تغییرپذیری‌ها). متغیرهای تصمیم مسئله شامل  $K, X, C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$  و  $\beta$  هستند.

گام ۲. محاسبه  $S_1$  در گام زمانی  $t=1$  از رابطه زیر و با فرض  $\hat{O}_{t=1} = I_{t=1}$ :

$$S_1 = K[X(C_1 I_1^{\alpha_1}) + (1-X)(C_2 \hat{O}_1^{\alpha_2})]^\beta \quad (15)$$

گام ۳. محاسبه  $\hat{O}_t$  برای  $t > 1$  از معادله (۱۳).

گام ۴. محاسبه  $\Delta S$  بر مبنای رابطه پیوستگی و با استفاده از رابطه ۱۶:

$$\Delta S = \left\{ I_t - \left[ \frac{\left( \frac{S_t}{K} \right)^{\frac{1}{\beta}} - X(C_1 I_t^{\alpha_1})}{C_2(1-X)} \right]^{\alpha_2} \right\} \Delta t \quad (16)$$

گام ۵. محاسبه  $S$  در گام  $t+1$

$$S_{t+1} = S_t + \Delta S \quad (17)$$

گام ۶. با توجه به رابطه‌های ۱۶ و ۱۷ مقدار ذخیره در گام زمانی  $t+1$  ممکن است کوچکتر از صفر یا مختلط باشد لذا محاسبه تابع جریمه برای این حالت‌ها که  $S_{t+1}$  کوچکتر از صفر یا مختلط باشد به صورت رابطه ۱۸ منظور می‌شود.

$$S_{t+1} = \begin{cases} \lambda_S |S_{t+1}| & \text{if } S_{t+1} < 0 \\ \lambda_S |\text{real}(S_{t+1}) \times S_{t+1}| & \text{if } (S_{t+1}) \text{ is Complex} \end{cases} \quad (18)$$

برای تعیین ذخیره منشوری نیز با قرار دادن  $\alpha_2 = \frac{m}{n_2}$  در رابطه (۸) تعیین می‌شود:

$$S_D = by_D^m \Rightarrow S_D = b \left( \frac{O}{a_2} \right)^{\frac{m}{n_2}} \quad (7)$$

$$S_D = b(C_2 O^{\alpha_2}) \quad (8)$$

Chow (1959) معادله زیر را برای حجم ذخیره‌سازی در یک بازه از رودخانه ( $S$ ) ارائه کرد:

$$S = XS_U + (1-X)S_D \quad (9)$$

با جایگذاری معادله معادلات ۶ و ۸ در معادله ۹ رابطه حجم ذخیره‌سازی به صورت رابطه ۱۰ می‌باشد:

$$S = Xb(C_1 I^{\alpha_1}) - (1-X)b(C_2 O^{\alpha_2}) \quad (10)$$

Gill (1978) رابطه زیر را برای تبدیل مدل ماسکینگام خطی به غیر خطی ارائه کرد:

$$S = [Xb(C_1 I^{\alpha_1}) - (1-X)b(C_2 O^{\alpha_2})]^\beta \quad (11)$$

$$\xrightarrow{K=b^\beta} S = K[X(C_1 I^{\alpha_1}) + (1-X)(C_2 O^{\alpha_2})]^\beta \quad (12)$$

در رابطه‌های بالا  $a_1, n_1$  فراسنجه‌های مربوط به ویژگی‌های رابطه عمق-دبی در بالادست،  $a_2, n_2$  فراسنجه‌های مربوط به ویژگی‌های رابطه عمق-دبی در پایین دست و  $b, m$  به ویژگی‌های رابطه میانگین عمق-ذخیره در بازه بستگی دارند و  $C_1, C_2$  ضرایب ثابت با مقدار مثبت هستند.

معادله ۱۲ مدل غیر خطی ماسکینگام نوع ۵ (NL5) می‌باشد. در این رابطه فراسنجه‌های مدل  $K, X, C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2$  و  $\beta$  هستند، که تعیین این فراسنجه‌ها از روش‌های بهینه‌سازی انجام می‌شوند. بر اساس رابطه ۱۲ میزان دبی خروجی روندیابی شده ( $\hat{O}_t$ ) به صورت رابطه ۱۳ تعیین می‌شود.

$$\hat{O}_t = \left[ \frac{\left( \frac{S_t}{K} \right)^{\frac{1}{\beta}} - X(C_1 I_{t-1}^{\alpha_1})}{(1-X)C_2} \right]^{\frac{1}{\alpha_2}} \quad (13)$$

## ۲-۲- بهینه‌سازی مدل ریاضی ماسکینگام

برای بهینه‌سازی مدل ماسکینگام تابع هدف به صورت

1 Sum of Squares of Residuals (SSR) between actual, and routed outputs

انجام می‌شود. در گام چهارم با استفاده از رابطه ۱۵ مقدار  $S_t$  در گام زمانی  $t=1$  محاسبه می‌شود. گام پنجم مقدار  $S_{t+1}$  از رابطه ۱۷ تعیین می‌شود و در گام ششم در صورتی که مقدار آن کوچک‌تر از صفر یا مختلط باشد مقدار آن را از رابطه ۱۸ محاسبه می‌شود. گام هفتم مقدار  $\hat{O}_{t+1}$  از رابطه ۱۹ تعیین می‌شود و در صورت منفی بودن یا مختلط بودن مقدار آن از رابطه ۲۰ برای محاسبه آن استفاده می‌شود. این روند تا به شمار گام‌های زمانی هیدروگراف ورودی یا خروجی تکرار می‌شود تا اینکه هفتم با مشخص شدن دبی‌های خروجی روندیابی شده تابع هدف از رابطه ۱۴ محاسبه می‌شود و این روند تا شرط توقف (تعداد شمار) ادامه دارد. در شکل ۱ روندنمای مرحله‌های کار نشان داده شده است.

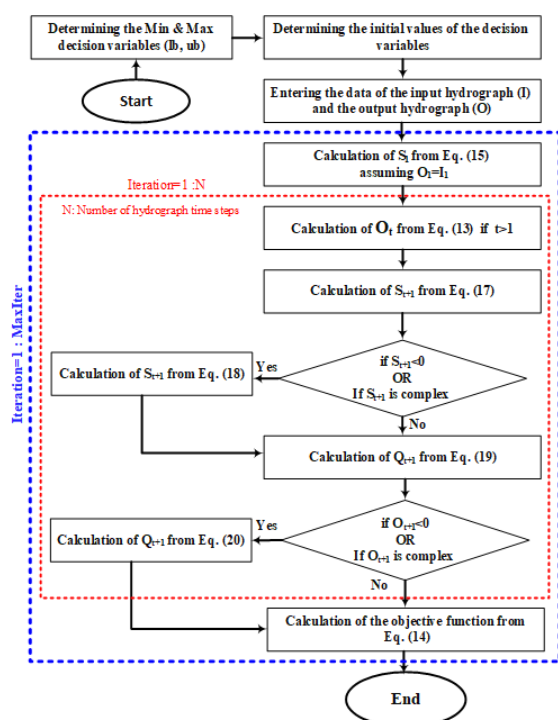


Fig. 1 Flowchart of optimization steps  
شکل ۱ روندنمای مرحله‌های بهینه‌سازی

#### ۴-۲- الگوریتم گرگ خاکستری

الگوریتم بهینه‌سازی گرگ خاکستری<sup>۱</sup> (GWO) در سال ۲۰۱۴ توسط آقای میر جلیلی و همکاران ارائه شد

در این رابطه  $(S_{t+1})$  real قسمت حقیقی  $S_{t+1}$  را بیان می‌کند و  $\lambda_S$  ثابت جریمه برای  $S$  می‌باشد.

گام ۷. محاسبه  $\hat{O}_{t+1}$  از معادله ۱۹

$$\hat{O}_{t+1} = \left\{ \frac{\left( \frac{S_{t+1}}{K} \right)^{\frac{1}{\beta}} - [X(C_1 t^{\alpha_1})]}{C_2(1-X)} \right\}^{\frac{1}{\alpha_2}} \quad (19)$$

گام ۸. با توجه به رابطه ۱۹ میزان دبی خروجی روندیابی شده در گام زمانی  $t+1$  ممکن است کوچک‌تر از صفر یا مختلط باشد لذا محاسبه تابع جریمه برای حالت‌هایی که  $O_{t+1}$  کوچکتر از صفر یا مختلط باشد:

$$\hat{O}_{t+1} = \begin{cases} \lambda_0 |\hat{O}_{t+1}| & \text{if } \hat{O}_{t+1} < 0 \\ \lambda_0 |\text{real}(\hat{O}_{t+1}) \times O_{t+1}| & \text{if } (\hat{O}_{t+1}) \text{ is Complex} \end{cases} \quad (20)$$

در این رابطه  $(\hat{O}_{t+1})$  real قسمت حقیقی  $\hat{O}_{t+1}$  را بیان می‌کند و  $\lambda_0$  ثابت جریمه برای  $\hat{O}_{t+1}$  می‌باشد.

گام ۹. به گام زمانی یک واحد اضافه می‌شود و تکرار مرحله‌های ۳ تا ۸ تا هنگامی که شمار گام زمانی به  $N$  برسد.

گام ۱۰: محاسبه SSR از رابطه ۱۴.

گام ۱۱: تکرار گام‌های ۲ تا ۱۰ تا رسیدن به شرط توقف.

گام ۱۲: تعیین میزان کمینه SSR

#### ۳-۲- روش NLP

ابزار بهینه‌سازی در نسخه R2021a نرم‌افزار متلب نسبت به نسخه‌های پیشین حالتی کاربر دوستانه‌تر داشته و با دسته‌بندی انواع تابع هدف، نوع قیدها، نوع تابع حل مسئله، انتخاب داده‌های مسئله و تنظیمات مربوط به تابع حل مسئله، کار را با این ابزار را ساده‌تر کرده‌است. از مزایای دیگر ابزار بهینه‌سازی در متلب زمان پردازش کمتر و دقت بیشتر در حل مسائل بهینه‌سازی می‌باشد. برای حل یک مسئله با ابزار بهینه‌سازی متلب بعد از ایجاد پنجره Optimize، در گام نخست مقادیر کمینه و پیشینه متغیرهای تصمیم مشخص می‌شود. در گام دوم برای متغیرهای تصمیم  $(X, C_1, C_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta)$  مقادیر اولیه در نظر گرفته می‌شود. در گام سوم وارد کردن داده‌های هیدروگراف ورودی (I) و خروجی مشاهداتی (O)

$$A = |2 \times a \times r_1 - a(t)| \quad (23)$$

$$C = 2 \times r_2 \quad (24)$$

$$a(t) = 2 - \frac{(2 \times t)}{\text{MaxIter}} \quad (25)$$

که ضریب‌های  $a$  به صورت خطی در مرحله‌های تکرار الگوریتم، از ۲ تا صفر کاهش می‌یابند و  $r_1$  و  $r_2$  نیز بردارهای تصادفی در بازه  $[0,1]$  هستند.  $t$  تکرار جاری و MaxIter حداکثر تعداد تکرار الگوریتم می‌باشد.

گرگ‌های خاکستری توانایی تشخیص مکان شکار و محاصره آن را دارند. شکار معمولاً توسط گرگ آلفا ( $\alpha$ ) هدایت می‌شود، ولی گرگ‌های بتا ( $\beta$ ) و دلتا ( $\delta$ ) نیز ممکن است گاهی اوقات در شکار شرکت کنند. در یک فضای جستجوی انتزاعی، دانشی در مورد راه‌حل بهینه  $[X_p(t)]$  وجود ندارد. از این رو موقعیت شکار همان موقعیت گرگ آلفا در نظر گرفته می‌شود. به منظور شبیه‌سازی ریاضی رفتار شکار گرگ‌های خاکستری، فرض می‌شود که گرگ‌های  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\delta$ ، دانش بهتری در مورد موقعیت بالقوه شکار دارند. بنابراین، سه مورد نخست از بهترین راه‌حل‌های به دست آمده موجود می‌باشد و عامل‌های دیگر جستجو (از جمله امگاها) به منظور به روز رسانی موقعیت‌شان، با توجه به موقعیت بهترین عوامل جستجو، ملزم به پیروی از آنها می‌باشند. رابطه‌های زیر در این زمینه پیشنهاد شده است:

$$\begin{cases} D_\alpha = |C_1 \times X_\alpha - X(t)| \\ D_\beta = |C_2 \times X_\beta - X(t)| \\ D_\delta = |C_3 \times X_\delta - X(t)| \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} X_1 = |X_\alpha - A_1 \times D_\alpha| \\ X_2 = |X_\beta - A_2 \times D_\beta| \\ X_3 = |X_\delta - A_3 \times D_\delta| \end{cases} \quad (27)$$

$$X(t+1) = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3} \quad (28)$$

که  $C_1$ ،  $C_2$  و  $C_3$  از معادله ۲۴ محاسبه می‌شوند. مقادیر  $A_1$ ،  $A_2$  و  $A_3$  از رابطه ۲۳ و مقادیر  $D_\alpha$ ،  $D_\beta$  و  $D_\delta$  از رابطه ۲۶ تعیین می‌شوند (Mirjalili et al., 2014). روندنمای این الگوریتم در شکل ۲ ارائه شده است. بهینه‌ترین حالت با آزمون و خطا برای تعداد جمعیت اولیه و تکرار به ترتیب ۱۵۰ و ۳۰۰۰ با انتخاب شد.

(Mirjalili et al., 2014). این الگوریتم از الگوریتم‌های فراابتکاری است که از چگونگی شکار گرگ خاکستری در طبیعت الهام می‌گیرد. این الگوریتم در دسته الگوریتم‌های هوش ازدحامی و مبتنی بر جمعیت قرار دارد. الگوریتم گرگ خاکستری از سلسله مراتب رهبری و ساز و کار شکار گرگ‌های خاکستری در طبیعت تقلید می‌کند. گرگ‌های خاکستری در رأس زنجیره غذایی هستند و زندگی اجتماعی دارند. شمار میانگین گرگ‌های هر گله بین پنج تا ۱۲ است. در هر گله چهار رتبه اصلی وجود دارد. گرگ‌های رهبر گروه آلفا ( $\alpha$ ) نامیده می‌شوند که می‌تواند نر یا ماده باشد این گرگ‌ها بر گله مسلط هستند. گرگ‌های بتا ( $\beta$ ) به گرگ‌های آلفا در فرآیند تصمیم‌گیری کمک کرده و همچنین مستعد انتخاب شدن به جای آنها هستند. گرگ‌های دلتا ( $\delta$ ) پایین‌تر از گرگ‌های بتا و شامل گرگ‌های پیر، شکارچی‌ها و گرگ‌های مراقبت‌کننده از نوزادان هستند و گرگ‌های امگا ( $\omega$ ) پایین‌ترین مرتبه در هرم سلسله مراتب هستند که کمترین حق را نسبت به دیگر اعضای گروه دارند. یکی دیگر از رفتارهای اجتماعی جالب گرگ‌های خاکستری شکار گروهی است که در مرحله نخست ردیابی، تعقیب و نزدیک شدن به طعمه انجام می‌شود، در مرحله دوم تلاش برای محاصره و خسته کردن طعمه تا هنگامی که حرکت آن متوقف شود، مدنظر است و در نهایت حمله به سمت طعمه صورت می‌گیرد.

گرگ‌های خاکستری در طول شکار خود طعمه را محاصره می‌کنند. معادله‌های ۲۱ تا ۲۵ پیاده‌سازی ریاضی محاصره طعمه را مدل‌سازی می‌کنند.

$$D = |C \times X_p(t) - X(t)| \quad (29)$$

$$X(t+1) = X_p(t) - A \times D \quad (30)$$

که در آن  $t$  بیانگر تکرار کنونی الگوریتم،  $A$  و  $C$  بردارهای ضریب،  $X_p$  بردار موقعیت طعمه،  $D$  بردار فاصله گرگ کنونی تا گرگ‌های رهبر و  $X$  بیانگر بردار موقعیت گرگ خاکستری است. بردارهای  $A$  و  $C$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:



زمانی که پاسخ‌ها به میزان بهینه و یا همسایگی آن‌ها همگرا شوند، ادامه می‌یابد. در الگوریتم ژنتیک بهینه‌ترین حالت با آزمون و خطا برای شمار جمعیت اولیه و تکرار به ترتیب ۱۵۰ و ۳۰۰۰ در نظر گرفته شد.

### ۲-۶- الگوریتم ازدحام ذرات

در الگوریتم PSO هر یک از پاسخ‌های مسئله به عنوان یک ذره در نظر گرفته می‌شود هر ذره میزان تابع هدف را در موقعیتی از محدوده متغیرها محاسبه می‌کند و آنگاه با استفاده از ترکیب اطلاعات محل فعلی اش و بهترین محلی که قبلاً در آن بوده است و همچنین اطلاعات بهترین ذرات موجود در جمع، جهتی را برای حرکت انتخاب می‌کند.  $c_1$  و  $c_2$  دو پارامتر مثبت و قابل تنظیم این الگوریتم هستند و  $c_1+c_2 \leq 4$  است. میزان فراسنجه‌های  $c_1=c_2=1.49$  در نظر گرفته شد. در این الگوریتم نیز اندازه جمعیت ۱۵۰ و شمار تکرارها ۳۰۰۰ در نظر گرفته شد.

### ۳- معیارهای ارزیابی

برای ارزیابی مدل‌های موردنظر از شاخص‌های میانگین قدرمطلق نسبی خطا بین هیدروگراف خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده<sup>۱</sup> (MARE)، اختلاف بین دبی اوج در هیدروگراف خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده<sup>۲</sup> (DPO)، اختلاف بین زمان وقوع دبی اوج در هیدروگراف خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده<sup>۳</sup> (DPOT)، ضریب ناش ساتکلیف<sup>۴</sup> (NSE) و ضریب همبستگی<sup>۵</sup> (CC) به صورت رابطه‌های ۲۹ تا ۳۳ استفاده شده است.

$$MARE = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \frac{|O_t - \hat{O}_t|}{O_t} \quad (29)$$

$$DPO = |O_{Peak} - \hat{O}_{Peak}| \quad (30)$$

$$DPOT = |Time_{O_{Peak}} - Time_{\hat{O}_{Peak}}| \quad (31)$$

$$NSE = 1 - \frac{\sum_{t=1}^N (O_t - \hat{O}_t)^2}{\sum_{t=1}^N (O_t - O_m)^2} \quad (32)$$

1 Mean Absolutely Relative Error

2 Deviations between the peak of the routed and actual flows

3 Deviations between the peak of routed and actual flows times

4 Nash Sutcliffe

5 Correlation coefficient

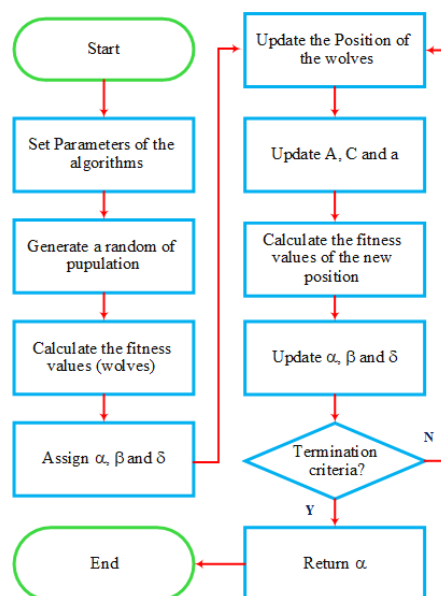


Fig. 2 Flowchart of GWO algorithm

شکل ۲ روندنمای الگوریتم GWO

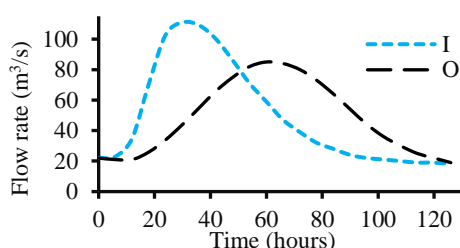
### ۲-۵- الگوریتم ژنتیک

الگوریتم ژنتیک بر مبنای فرآیند انتخاب و ژنتیک زیستی ترکیب‌بندی شده است. این روند با انتخاب تصادفی جمعیت اولیه از پاسخ‌های ممکن در بازه کمینه و پیشینه متغیرها شروع می‌شود. هر یک از پاسخ‌های مسئله توسط یک ساختار رشته‌ای (کروموزوم) از بیت‌ها (ژن‌ها) که میزان کدگذاری شده متغیرهای تصمیم را در بردارند، تشکیل می‌شود (El Harraki et al., 2021). با استفاده از کنشگر انتخاب (در این بررسی چرخه رولت) شماری از کروموزوم‌های جمعیت کنونی به عنوان والدین نسل بعد برگزیده می‌شوند. با تقاطع والدین از طریق کنشگر ترکیب به روش یکنواخت و احتمال حدود 0.8 فرزندان که همان پاسخ‌های جدید هستند تولید می‌شود. آنگاه با استفاده از کنشگر جهش با احتمال حدود 0.05 برخی از ژن‌ها به صورت تصادفی انتخاب و تغییر می‌کند، ترکیب به روش یکنواخت با احتمال 0.8 و احتمال جهش 0.05 در اجراهای مختلف تعیین شد. که از همگرایی پاسخ‌ها به سمت یک پاسخ بهینه موضعی جلوگیری شود و جستجو در محل دیگری از فضای تصمیم انجام شود (اکتشاف و استخراج). سپس مقدار برزندگی فرزندان (پاسخ‌ها) با توجه به تابع هدف موردنظر ارزیابی می‌شود و پاسخ‌هایی که شایستگی بهتری دارند انتخاب می‌شوند. این روند تا

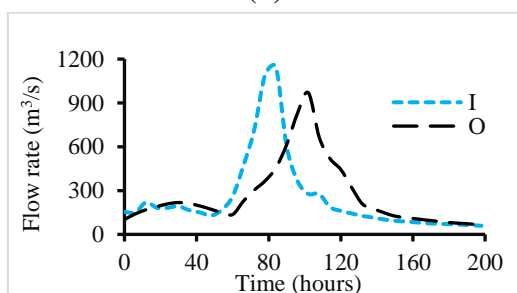
ورودی و خروجی در شکل (3b) آورده شده است.

### ۳-۴- بررسی موردی سوم

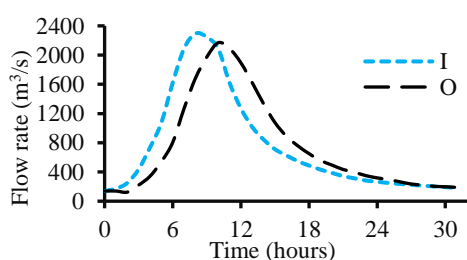
سومین بررسی موردی برای ارزیابی مدل غیرخطی ماسکینگام نوع پنج و برآورد فراسنجه‌های این مدل داده‌های ارائه شده در مقاله (Vatankhah, 2014) است. تعداد گام‌های زمانی هیدروگراف‌های مشاهده‌ای برابر با ۳۱ و طول هر گام یک ساعت است. آب‌نگار ورودی و خروجی این بررسی موردی در شکل (3c) ارائه شده است.



(a)



(b)



(c)

**Fig. 3** Case Study 1 (data form Wilson, 1974) (a), 2 (data form O'donnell, 1985) (b), 3 (data form Vatankhah, 2014) (c)

شکل ۳ بررسی موردی ۱ (داده‌ها از Wilson, 1974)، ۲ (داده‌ها از O'donnell, 1985) (b) و ۳ (داده‌ها از Vatankhah, 2014) (c)

### ۵- نتایج و بحث

در این تحقیق برای برآورد میزان بهینه فراسنجه‌های مدل

$$CC = \frac{\sum_{t=1}^N [(\hat{O}_t - O_t)(O_t - O_m)]}{\sqrt{\sum_{t=1}^N (\hat{O}_t - O_m)^2} \sqrt{\sum_{t=1}^N (O_t - O_m)^2}} \quad (33)$$

در این رابطه‌ها  $O_t$  جریان خروجی مشاهده‌ای،  $\hat{O}_t$  جریان خروجی روندیابی شده در گام زمانی  $t$ ،  $N$  شمار گام‌های زمانی،  $O_{Peak}$  دبی اوج هیدروگراف مشاهده‌ای،  $\hat{O}_{Peak}$  دبی اوج هیدروگراف روندیابی شده،  $Time_{O_{Peak}}$  و  $Time_{\hat{O}_{Peak}}$  به ترتیب زمان رخداد دبی اوج در هیدروگراف خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده،  $O_m$  و  $\hat{O}_m$  به ترتیب میانگین دبی‌های خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده می‌باشند.

### ۴- بررسی موردی‌ها

#### ۴-۱- بررسی موردی نخست

نخستین بررسی موردی، بر روی هیدروگراف ورودی و خروجی گزارش شده توسط Wilson (1974) انجام شده است (Wilson, 1974). داده‌های این سیل در بررسی‌های پیشین برای ارزیابی روش‌های مختلف برآورد پارامتر مدل‌های مختلف ماسکینگام غیرخطی استفاده شده است (Zeinali and Pourreza-Bilondi, 2018). شمار گام‌های زمانی هیدروگراف‌ها برابر ۲۱ و طول هر گام زمانی شش ساعت است. هیدروگراف ورودی و خروجی به صورت شکل (3a) است.

#### ۴-۲- بررسی موردی دوم

دومین بررسی موردی سیلی است که در رودخانه وای<sup>۱</sup> در انگلستان در سال ۱۹۶۰ رخ داده است. بازه مورد بررسی 69.75 Km از طول رودخانه‌ی وای است که انشعابی ندارد و جریان ورودی بسیار کمی دارد. بنابراین این سیل یک مورد آزمایشی خوب برای ارزیابی روش‌های روندیابی است (O'donnell, 1985). این سیل مانند سیل ویلسون یک ارتباط غیرخطی بین جریان و حجم ذخیره را نشان می‌دهد. در این بررسی موردی گام زمانی شش ساعت و تعداد گام‌های زمانی ۳۳ است. برخی از محققین برای برآورد فراسنجه‌های مدل ماسکینگام از این بررسی موردی استفاده کردند (Akbari et al., 2020). نمودار هیدروگراف

خطا کمتر از هفت درصد است، همچنین در بررسی‌های موردی دوم و سوم بیشینه درصد خطای محاسبه‌ای در گام زمانی دوم تا گام زمانی آخر به ترتیب کمتر از ۲۰ درصد و ۱۰ درصد می‌باشد. در گام زمانی نخست فرض می‌شود نخستین دبی روندیابی شده برابر مقدار نخستین دبی هیدروگراف ورودی باشد، این فرض مقدار درصد خطای محاسبه‌ای را در این گام زمانی افزایش می‌دهد. شکل‌های ۴ تا ۶ نشان می‌دهند مدل غیرخطی ماسکینگام نوع NL5 برای هر سه بررسی موردی کارکرد بهینه‌ای داشته‌است، همچنین دقت روش‌های NLP و GWO بیشتر از PSO و GA است. در جدول ۱ فراسنجه‌های مدل غیرخطی ماسکینگام تیپ پنج (X, K, C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>, α<sub>1</sub>, α<sub>2</sub> و β)، که توسط روش‌های فنی GA, PSO, GWO و NLP محاسبه شده است، ارائه شده‌است.

ماسکینگام غیرخطی NL5، کمینه‌سازی SSR به عنوان تابع هدف در نظر گرفته شد. برای حل معادله بهینه‌سازی از روش‌های NLP, GWO, PSO و GA استفاده شد. فراسنجه‌های مدل NL5 با روش‌های NLP, GWO, PSO و GA نیز تعیین شد. در شکل‌های ۴ تا ۶ برای سه بررسی موردی درصد خطای هیدروگراف خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده از روش‌های NLP, GWO, PSO و GA مقایسه شده‌اند. در شکل ۴ درصد خطای محاسبه‌ای برای بررسی موردی یک (Wilson, 1974) نشان می‌دهد. این شکل کارکرد بسیار خوب مدل NL5 و روش‌های حل این مدل را نشان می‌دهد. شکل‌های ۵ و ۶ نیز درصد خطای محاسبه‌ای بین هیدروگراف خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده به ترتیب در بررسی موردی دوم (O'donnell, 1985) و بررسی موردی سوم (Vatankhah, 2014) نشان می‌دهند. در بررسی موردی نخست میزان بیشینه درصد

**جدول ۱** فراسنجه‌های مدل ماسکینگام NL5 برای بررسی موردی نخست، دوم و سوم با الگوریتم‌های GA, PSO, GWO و NLP

**Table 1** Muskingum NL5 model parameters for the first, second and third case studies with GA, PSO and fmincon algorithms

Case Study	Solver	Muskingum NL5 model parameters						
		X	K	β	C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	α <sub>1</sub>	α <sub>2</sub>
1	GA	0.5000	0.2081	3.3095	0.1880	2.8153	0.8122	0.4955
	PSO	0.3574	0.0039	3.7075	0.8739	6.0973	0.7157	0.4389
	GWO	0.0925	0.0607	3.8544	1.6999	2.0024	0.6813	0.4215
	NLP	0.0488	1.4706	3.8202	1.3371	0.8387	0.6949	0.4249
2	GA	0.1052	0.6785	1.4000	5.4998	0.3835	1.0490	1.1677
	PSO	0.1100	0.7000	1.4000	5.5000	0.4000	1.0396	1.1587
	GWO	0.2974	0.2715	1.4391	4.7686	0.8863	0.9843	1.1423
	NLP	0.0871	0.2503	1.4147	14.9854	0.7584	1.0230	1.1561
3	GA	0.0525	0.6723	0.3454	0.00002	4.9599	4.7844	3.1017
	PSO	0.0001	0.5961	0.3145	0.0005	6.8241	5.5824	3.4275
	GWO	0.0059	0.5425	0.3581	0.0010	8.6225	4.5402	2.9841
	NLP	0.000045	0.5565	0.3199	0.0017	8.3544	5.4675	3.3673

و CC به یک نزدیک باشند نتایج این روش‌ها بسیار خوب ارزیابی می‌شود. در صورتی میزان شاخص NSE در محدوده  $0.75 < NSE < 1$  باشد کارکرد مدل بسیار خوب می‌باشد (Kult et al., 2014). میزان تابع هدف و زمان پردازش روش‌ها نیز در جدول ۲ برای ارزیابی روش‌های فنی حل ارائه شده‌است. در بررسی موردی نخست مقادیر

در جدول ۲ معیارهای ارزیابی خطا، تابع هدف و زمان پردازش برای روش‌های GA, PSO, GWO و NLP ارائه شده‌است. این معیارها MARE, NSE, CC, DPO و DPOT می‌باشند؛ هرچه مقدار معیارهای MARE, DPOT و DPOT به صفر نزدیک‌تر باشد، نشان از کارکرد مناسب روش‌های فنی حل دارد. و هر چه میزان معیارهای NSE

جدول ۲ معیارهای ارزیابی مدل ماسکینگام NL5

Table 2 The evaluation criteria of Muskingum NL5 model

Case Study	Solver	SSR	MARE	DPO	DPOT	NSE	CC	Processing time
-	-	m <sup>6</sup> /sec <sup>2</sup>	m <sup>3</sup> /sec	m <sup>3</sup> /sec	hour	-	-	sec
1	GA	5.88	0.012	0.318	0	0.9995	0.9998	1483
	PSO	5.47	0.012	0.11	0	0.9995	0.9998	1348
	GWO	5.44	0.011	0.026	0	0.9995	0.9998	1160
	NLP	5.44	0.011	0.048	0	0.9996	0.9998	123
2	GA	30929.1	0.104	75.8	6	0.9813	0.9912	1992
	PSO	30880.1	0.103	75.8	6	0.9813	0.9913	1852
	GWO	30848.2	0.105	79.05	6	0.9813	0.9914	1480
	NLP	30837.6	0.104	76.5	6	0.9814	0.9914	141
3	GA	7412.3	0.0303	40.3	0	0.9994	0.9997	1690
	PSO	7391	0.0301	40.5	0	0.9994	0.9997	1543
	GWO	7432.1	0.0301	41.06	0	0.9994	0.9997	1310
	NLP	7356.7	0.0301	41	0	0.99945	0.9997	129

میزان تابع هدف (SSR) و زمان پردازش<sup>۱</sup> (PT) روش‌های حل بیان شده‌است. مقادیر SSR بر حسب m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup> در بررسی موردی نخست برای روش‌های حل NLP، GWO، PSO و GA به ترتیب برابر با 5.44، 5.44، 5.47 و 5.88 است. همچنین میزان SSR برای بررسی موردی دوم برای روش‌های مذکور به ترتیب برابر با 30837.6، 30848.2، 30880.1 و 30929.1 می‌باشد و برای بررسی موردی سوم این میزان‌ها برابر است با 7356.7، 7432.1، 7391 و 7412.3. میزان PT نیز برای روش‌های حل NLP، GWO، PSO و GA در این سه بررسی موردی ارائه شده نشان می‌دهد زمان پردازش در روش NLP کمتر از 10%، PT روش‌های دیگر است. بنابراین روش‌های حل NLP، GWO، PSO و GA برای محاسبه‌های هیدروگراف خروجی روندیابی شده کاربرد بسیار مناسبی داشتند. همچنین بر اساس نتایج ارزیابی ارائه شده در جدول ۲ روش‌های حل NLP، GWO، PSO و GA از نظر رتبه‌بندی به ترتیب در رتبه یک تا چهار قرار دارند و روش NLP از نظر دقت و سرعت پردازش رتبه بالاتری نسبت به الگوریتم‌های GWO، PSO و GA دارد. جدول ۳ مقایسه نتایج این بررسی را با بررسی‌های پیشین نشان می‌دهد که کاربرد روش NLP در برآورد فراسنجه‌های مدل

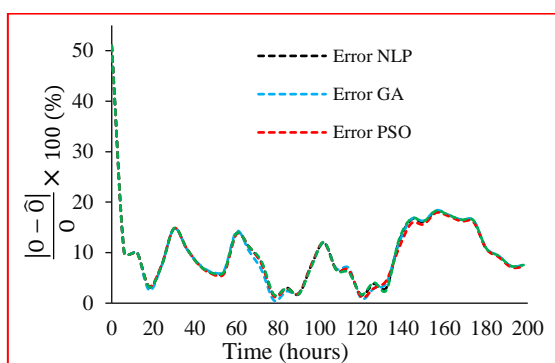
شاخص MARE برای تکنیک‌های NLP، GWO، PSO و GA به ترتیب برابر است با 0.011، 0.011، 0.012 و 0.012. مترمکعب بر ثانیه است. برای بررسی موردی دوم نیز مقدار MARE بر حسب مترمکعب بر ثانیه به ترتیب برابر با 0.104، 0.105، 0.103 و 0.104 می‌باشد؛ همچنین مقدار این شاخص در بررسی موردی سوم برای روش‌های یادشده به ترتیب برابر 0.0301، 0.0301، 0.0301 و 0.0303 است. مقادیر این شاخص برای بررسی‌های موردی در این پژوهش نشان از کارکرد بسیار خوب روش‌های فنی NLP، GWO، PSO و GA را دارند. شاخص‌های DPO و DPOT در جدول ۲ برای سه بررسی موردی و روش‌های حل NLP، GWO، PSO و GA ارائه شده‌است. این شاخص‌ها نیز نشان از کارکرد مطلوب این روش‌ها را نشان می‌دهند. شاخص مورد استفاده دیگر برای ارزیابی روش‌های حل NLP، GWO، PSO و GA شاخص NSE است. میزان این شاخص برای بررسی موردی یک تا سه برای همه روش‌های حل در بازه [0.99, 1] است، لذا برابر شاخص NSE نتایج این روش‌های فنی بسیار خوب است، همین‌طور شاخص CC برای روش‌های حل NLP، GWO، PSO و GA در سه بررسی موردی در بازه [0.99, 1] است که این مقادیر نشان از کارکرد مناسب روش‌های مذکور دارد. در جدول ۲ افزون بر شاخص‌های ارزیابی خطا،

1 Processing time (PT)

جدول ۳ مقایسه نتایج مدل ماسکینگام NL5 با برخی از پژوهش‌های پیشین برای بررسی موردی نخست، دوم و سوم

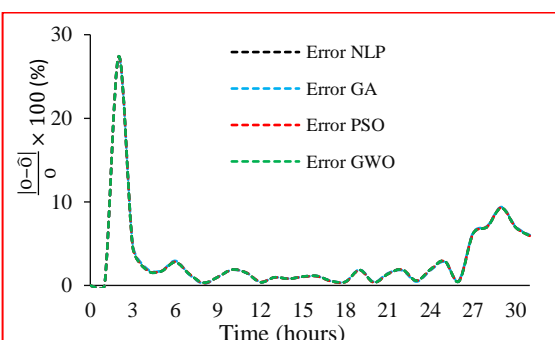
**Table 3** Comparison of the results of Muskingum NL5 model with those in the literature for the first and second case studies

Case Study	Method	Number of decision variables	Objective fun. (m <sup>6</sup> /s <sup>2</sup> )
1	CS (Karahan et al., 2014)	5	9.8248
	BFGS (Karahan 2014)	10	5.74
	HHO (khalifeh et al., 2021b)	3	128.78
	NLP (This Paper)	7	5.44
2	SA (Farahani et al., 2019)	5	34231
	SFLA-NMS (Haddad et al., 2015)	7	30894.4
	SFLA-NMS (Bozorg-Haddad et al., 2019)	8	28853
	NLP (This Paper)	7	30838.6
3	Runge-Kutta (Vatankhah, 2014)	3	14441.01
	NLP (This Paper)	7	7356.8



**Fig. 5** The difference between the observed and routed output discharges in the second case study with NLP, GA, PSO and GWO techniques

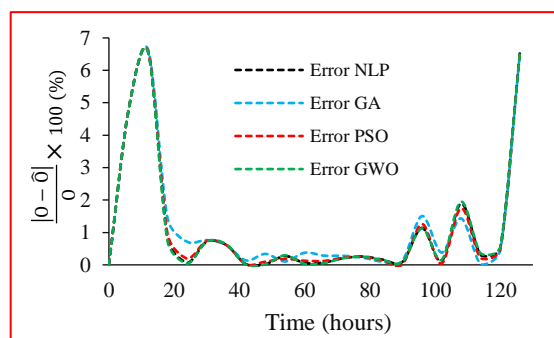
شکل ۵ اختلاف دبی خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده در بررسی موردی دوم با روش‌های فنی NLP, GA, PSO و GWO



**Fig. 6** The difference between the observed and routed output discharges in the third case study with NLP, GA, PSO and GWO techniques

شکل ۶ اختلاف دبی خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده در بررسی موردی سوم با روش‌های فنی NLP, GA, PSO و GWO

ماسکینگام NL5 بسیار مطلوب ارزیابی می‌شود. میزان SSR در این پژوهش و بررسی‌های پیشین در جدول ۳ نشان می‌دهد روش حل NLP برای مدل NL5 بهتر از بیشتر روش‌های پیشین عمل کرده است. در این پژوهش برای بررسی موردی سوم (داده‌های Vatankhah, 2014) که تا اکنون به روش ماسکینگام روندیابی نشده‌است، با استفاده از NL5 روندیابی انجام شد و نتایج با روش رانگ کوتا (Vatankhah, 2014) مقایسه شد. نتایج این مقایسه نشان داد که میزان SSR در مدل NL5 در روش حل با NLP برابر 7356.8 m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup> است، در صورتی که این میزان در روش رانگ کوتا 14441.3 m<sup>6</sup>/s<sup>2</sup> است. بنابراین در این بررسی موردی روش مورد استفاده در این پژوهش نسبت به روش رانگ کوتا کارکرد بهتری داشته است.



**Fig.4** The difference between the observed and routed output discharges in the first case study with NLP, GA, PSO and GWO techniques

شکل ۴ اختلاف دبی خروجی مشاهده‌ای و روندیابی شده در بررسی موردی اول با روش‌های فنی NLP, GA, PSO و GWOT

## ۶- نتیجه‌گیری

از میان روش‌های گوناگون روندیابی سیلاب، روش هیدرولوژیکی ماسکینگام غیرخطی بیشتر مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته است. با استفاده از روش ماسکینگام می‌توان ضمن صرفه‌جویی در زمان و هزینه، اطلاعات مربوط به عمق و دبی جریان سیلابی را در هر زمان مشخص کرد. در روش ماسکینگام فرض می‌شود مقدار دبی روندیابی شده در گام زمانی نخست برابر میزان دبی هیدروگراف ورودی در همین گام زمانی باشد، که این فرض قدری خطای محاسبه‌ای به همراه دارد. همچنین روش ماسکینگام در بیشتر مقاله‌ها برای رودخانه‌هایی که شاخه (انشعاب) ندارند به کار برده شده است. البته این روش را می‌توان با اضافه کردن جریان جانبی به معادله پیوستگی برای این رودخانه‌ها نیز استفاده کرد. برآورد فراسنجه‌های مدل ماسکینگام با استفاده از روش‌های آزمون و خطا کار دشواری بوده و در حالتی که شمار متغیرها افزایش یابد، روند آن پیچیده‌تر خواهد شد. لذا برای برآورد این فراسنجه‌ها از روش‌های بهینه‌سازی استفاده می‌شود. در دهه اخیر استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری در حل معادله‌ها بهینه‌سازی افزایش یافته است و استفاده از الگوریتم‌های فراابتکاری در برآورد فراسنجه‌های مدل ماسکینگام موفق عمل کردند. روش‌های فراابتکاری نسبتاً دقیق هستند و در مسئله‌هایی که پیچیدگی آن‌ها زیاد نیست، این روش‌ها در سرعت رسیدن به پاسخ (همگرایی) با هم تفاوت دارند و از نظر دقت ممکن است اختلاف زیادی با هم نداشته باشند. در این بررسی حاضر از روش‌های فنی NLP و الگوریتم قدرتمند GWO برای برآورد مقدار بهینه فراسنجه‌های مدل NL5 استفاده گردید و نتایج با الگوریتم‌های GA و PSO مقایسه شد. نتایج ارزیابی گویای این است که روش NLP علاوه بر دقت بیشتر، زمان کمتری نیز برای برآورد فراسنجه‌ها نیاز دارد. مقدار تابع هدف برای بررسی موردی نخست برای روش‌های NLP، GA و PSO به ترتیب 5.44، 5.44، 5.88 و 5.47  $m^6/s^2$ ، برای بررسی موردی دوم 30837.6، 30848، 30929.1 و 3088.1  $m^6/s^2$  و برای بررسی موردی سوم 7356.7، 7432.1 و 7412.3 و

7391  $m^6/s^2$  بدست آمد. زمان پردازش روش NLP، 10% زمان پردازش روش‌های GA و PSO است. لذا روش NLP برای برآورد فراسنجه‌های بهینه ماسکینگام نوع پنج با در نظر گرفتن دو عامل دقت و سرعت حل نسبت به الگوریتم‌های GA، PSO و GWO برتری دارد. شاخص NSE نشان می‌دهد که نتیجه ارزیابی روش‌های NLP، GA و PSO بسیار خوب می‌باشد. مقایسه این نتایج با نتایج تحقیقات پیشین نشان می‌دهد استفاده از روش‌های فنی NLP و GWO در برآورد فراسنجه‌های مدل NL5 بسیار مناسب است. همچنین در بررسی موردی سوم که تاکنون با روش ماسکینگام روندیابی نشده بود، نتایج را با روش رانگ- کوتا مقایسه شد و کارکرد مدل NL5 که با روش NLP فراسنجه‌های آن تعیین شده است مناسب‌تر است. برای مقایسه بیشتر از شاخص‌های ارزیابی خطا، MARE، DPO و DPOT در ارزیابی روش‌های NLP، GWO، PSO و GA مشخص شد که رتبه این روش‌ها به ترتیب یک، دو، سه و چهار است. بنابراین روش NLP به عنوان روشی مناسب برای حل مدل بهینه‌سازی ماسکینگام پیشنهاد می‌شود.

## ۷- فهرست نشانه‌ها

I	جریان ورودی به بازه رودخانه ( $m^3/S$ )
O	جریان خروجی از بازه رودخانه ( $m^3/S$ )
S	حجم ذخیره ( $m^3/S$ )
S <sub>U</sub>	حجم ذخیره گوه‌ای ( $m^3/S$ )
S <sub>D</sub>	حجم ذخیره منشوری ( $m^3/S$ )
K	ضریب زمان - ذخیره
X	عامل وزنی
y <sub>U</sub>	عمق آب در بالادست
y <sub>D</sub>	عمق آب در پایین‌دست
a <sub>1</sub>	فراسنجه مربوط به مشخصه عمق-دبی بالادست
n <sub>1</sub>	فراسنجه مربوط به مشخصه عمق-دبی بالادست
a <sub>2</sub>	فراسنجه مربوط به مشخصه عمق-دبی پایین‌دست
n <sub>2</sub>	فراسنجه مربوط به مشخصه عمق-دبی پایین‌دست
b	مشخصات رابطه میانگین عمق-ذخیره
M	مشخصات رابطه میانگین عمق-ذخیره
C <sub>1</sub>	ضریب ثابت

Das, A. (2004). Parameter estimation for Muskingum models. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. 130, 140-147.

Easa, S.M. (2014). New and improved four-parameter non-linear Muskingum model. *Proceedings of the Institution of Civil Engineers-Water Management*. 167(5), 288-298.

Ehteram, M., Karami, H., Mousavi, S.-F., Farzin, S. and Sarkamaryan, S. (2017). Evaluation of the performance of bat algorithm in optimization of nonlinear Muskingum model parameters for flood routing. *Iranian journal of Ecohydrology*. 4, 1025-1032. (in Persian)

El Harraki, W., Ouazar, D., Bouziane, A. and Hasnaoui, D. (2021). Optimization of reservoir operating curves and hedging rules using genetic algorithm with a new objective function and smoothing constraint: application to a multipurpose dam in Morocco. *Environmental Monitoring and Assessment*. 193, 1-17.

Farahani, N., Karami, H., Farzin, S., Ehteram, M., Kisi, O. and El Shafie, A. (2019). A new method for flood routing utilizing four-parameter nonlinear Muskingum and shark algorithm. *Water Resources Management*. 33, 4879-4893.

Geem, Z.W. (2006). Parameter estimation for the nonlinear Muskingum model using the BFGS technique. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. 132, 474-478.

Gill, M.A. (1978). Flood routing by the Muskingum method. *Journal of Hydrology*. 36, 353-363.

Haddad, O.B., Hamedi, F., Orouji, H., Pazoki, M. and Loáiciga, H.A. (2015). A re-parameterized and improved nonlinear Muskingum model for flood routing. *Water Resources Management*. 29, 3419-3440.

Hamedi, F., Bozorg-Haddad, O., Pazoki, M., Asgari, H.-R., Parsa, M. and Loáiciga, H.A. (2016). Parameter estimation of extended nonlinear Muskingum models with the weed optimization algorithm. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. 142, 04016059.

Khalifeh, S., Esmaili, K., Khodashenas, S. and Akbarifard, S. (2020a). Data on optimization of the non-linear Muskingum flood routing in Kardeh River using Goa algorithm. *Data in brief*. 30, 105398.

Khalifeh, S., Esmaili, K., Khodashenas, S.R. and Khalifeh, V. (2020b). Estimation of nonlinear

$C_2$  ضریب ثابت  
 $\lambda$  ثابت جریمه

## ۸- داده‌ها و اطلاعات

پژوهش یاد شده بخش‌هایی از رساله دکتری است که در دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرمانشاه در حال انجام است. زمان آغاز رساله آغاز سال ۱۳۹۹ بوده است. داده‌های این مقاله از مقاله‌های برداشت شده‌است که در متن مقاله به این موضوع اشاره شده‌است.

## ۹- تعارض منافع

در این بررسی تضاد منافی وجود ندارد و این مسئله مورد تایید همه نویسندگان است.

## ۱۰- مراجع

Akbari, R., Hessami-Kermani, M.-R. and Shojaee, S. (2020). Flood Routing: Improving Outflow Using a New Non-linear Muskingum Model with Four Variable Parameters Coupled with PSO-GA Algorithm. *Water Resources Management*. 34, 3291-3316.

Akbarifard, S., Qaderi, K. and Alinnejad, M. (2018). Parameter estimation of the nonlinear muskingum flood-routing model using water cycle algorithm. *Journal of Watershed Management Research*. 8, 34-43. (in Persian)

Barati, R. (2013). Application of excel solver for parameter estimation of the nonlinear Muskingum models. *KSCE Journal of Civil Engineering*. 17, 1139-1148.

Bozorg-Haddad, O., Abdi-Dehkordi, M., Hamedi, F., Pazoki, M. and Loáiciga, H.A. (2019). Generalized storage equations for flood routing with nonlinear Muskingum models. *Water Resources Management*. 33, 2677-2691.

Bozorg-Haddad, O., Sarzaeim, P. and Loáiciga, H. A. (2021). Developing a Novel Parameter-free Optimization Algorithm for Flood Routing. *Scientific Reports*. 11, 16183.

Chow, V.T. (1959). *Open channel hydraulics*. McGraw-Hill Civil Engineering Series McGraw-Hill: Toronto.

Chow, V.T., Maidment, D.R. and Larry, W. (1988). *Mays. Applied Hydrology*. International edition, MacGraw-Hill, Inc, 149 p.

- Ouyang, A., Liu, L.-B., Sheng, Z. and Wu, F. (2015). A class of parameter estimation methods for nonlinear muskingum model using hybrid invasive weed optimization algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, 1-15.
- Rajabi, D., Karami, H., Hosseini, K., Mousavi, S.F. and Hashemi, S.A. (2015). Estimating Optimum Parameters of Non-Linear Muskingum Model of Routing using Imperialist Competition Algorithm (ICA). *Journal of Water and Soil Science*. 19, 321-334. (in Persian)
- Vatankhah, A.R. (2014). Evaluation of explicit numerical solution methods of the Muskingum model. *Journal of Hydrologic Engineering*, 19, 06014001.
- Wilson, E. (1974). *Hydrograph Analysis*. Engineering Hydrology. Springer.
- Zeinali, M. and Pourreza-Bilondi, M. (2018). Estimation of Optimal Parameters of the Nonlinear Muskingum Model Using Continuous Ant Colony Algorithm. *Irrigation and Water Engineering*, 8, 94-106. (in Persian)
- parameters of the type 5 Muskingum model using SOS algorithm. *MethodsX*. 7, 101040.
- Khalifeh, S., Esmaili, K., Khodashenas, S.R. and Modaresi, F. (2021a). Estimation of Nonlinear Parameters of Type 6 Hydrological Method in Flood Routing with the Spotted Hyena Optimizer Algorithm (SHO), Research Square.
- Khalifeh, S., Khodashenas, S.R., Esmaili, K. and Khalifeh, V. (2021b). Estimation of the type 5 Muskingum nonlinear model parameters in the flood routing with The Harris Hawks Optimization Algorithm (HHO). *Irrigation and Water Engineering*. 11, 128-141. (in Persian)
- Kult, J., Choi, W. and Choi, J. (2014). Sensitivity of the Snowmelt Runoff Model to snow covered area and temperature inputs. *Applied Geography*. 55, 30-38
- Mccarthy, G. (1938). The unit hydrograph and flood routing, Conference of North Atlantic Division. US Army Corps of Engineers, New London, CT. US Engineering.
- Mohammad Rezapour Tabari, M. and Emami Dehcheshmeh, S.A. (2018). Development of Nonlinear Muskingum Model Using Evolutionary Algorithms Hybrid. *Iran-Water Resources Research*. 14, 160-167. (in Persian)
- Mohammadi Ghaleni, M. and Ebrahimi, K. (2013). Evaluation of direct search and genetic algorithms in optimization of muskingum nonlinear model parameters-a flooding of Karoun river, Iran. *Water and Irrigation Management*. 2, 1-12. (in Persian)
- Mohammadi Ghaleni, M., Bozorg Hadad, O. and Ebrahimi, K. (2010). Parameter Estimation of the Nonlinear Muskingum Model Using Simulated Annealing. *Water and Soil*, 24(5), 908-919. (in Persian)
- Mohan, S. (1997). Parameter estimation of nonlinear Muskingum models using genetic algorithm. *Journal of Hydraulic Engineering*. 123, 137-142.
- Norouzi, H. and Bazargan, J. (2019). Using the Linear Muskingum Method and the Particle Swarm Optimization (PSO) algorithm for calculating the depth of the rivers flood. *Iran-Water Resources Research*. 15, 344-347. (in Persian)
- O'donnell, T. (1985). A direct three-parameter Muskingum procedure incorporating lateral inflow. *Hydrological Sciences Journal*. 30, 479-496.