

Two- and Three-Dimensional Analysis of Supercritical Flow in Bends

Hadi Akbarian¹, Mohammad Reza Jaefarzadeh^{2*}

1- Ph.D. Candidate, Civil Engineering Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad.

2- Professor, Civil Engineering Department, Water and Environment Research Institute, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad.

* jafarzag@um.ac.ir

Received: 22 September 2021, Accepted: 1 December 2021  J. Hydraul. Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: Channel bends are sometimes unavoidable due to the project conditions or the land topography. However, oblique cross waves are a distinct feature of supercritical flow in bends. These waves continue for a long distance downstream and increase the height of water considerably. Initially, the complex behavior of supercritical flow in bends was studied by hydraulic models in a laboratory. Later on, numerical models were found inexpensive tools to investigate flow patterns and explain features that may not even be possible to measure. In this article, supercritical flow in a rectangular horizontal channel of 90° bend is studied with different ratios of radius to channel width (r/b) using two- and three-dimensional numerical models. Water surface profiles are then compared with the data that were obtained from our experimental bend models. It is proved that three-dimensional models are more successful in predicting the flow profile, peak, and location of waves at the outer wall bend.

Methodology: In this study, Flow3D package was used for the three-dimensional simulation of flow patterns. This software had a wide variety of applications and capabilities. The user could enter information to select different models to provide a range of flow phenomena. Flow3D integrated the Navier-Stokes equations (N-S) with finite volume method (FVM), with different mesh configurations, suitable for complex geometries. The $k-\epsilon$ turbulence model was used to close the N-S partial differential equations. The volume of fluid (VOF) method was used to model the free surface boundary. Additional boundary conditions for supercritical flow in bends was selected as constant depth and velocity at the inflow section and no-slip or zero velocity conditions at the floor and solid walls. The Roe2D model was used for the simulation of two-dimensional shallow water equations. This model was able to capture discontinuities such as shock waves in supercritical flow. A triangular mesh was used for the space discretization, and a minmod slope limiter was implemented to control oscillations. Experiments were performed in the curved channel of the hydraulic laboratory of Ferdowsi University of Mashhad. This rectangular channel was horizontal, 40 cm in width, and the walls and floor were made of transparent plexiglass sheets. A straight channel, 1.8 m length, was installed before the bend to ensure flow development length. At the end of this channel there was the 90° channel bend with internal and external radii of 40 and 80 cm, respectively. The channel width could be changed by adding interior walls; thereby, the ratio of r/b might be changed accordingly.

Results and Discussion: Several experiments were run in the curved channels with widths of 15, 20, 30, and 40 cm and different radius of curvature to channel width (r_c/b). The flow rate and water depth were measured, and thereby the approach Froude number Fr_o was calculated. New experimental equations were obtained to calculate the maximum flow depth and the location of the first wave crest along the outer wall in the terms of the approach Froude number and the geometric specification of the bend. For each experiment, the corresponding two- and three-dimensional computer models were performed, too. The three-dimensional model could properly estimate the behavior of the supercritical flow, including the depth and position of wave crest at the outer wall of the bend. As Fr_o increased or r_c/b decreased, the wave peak increased and moved downstream. However, the two-dimensional model had acceptable accuracy only for low values of $Fr_o < 3$. The assumption of hydrostatic pressure in depth-averaged 2D models was not applicable to supercritical bend flows. For flows with low Fr_o , the vertical acceleration might be ignored; however, as Fr_o increased, it became significant within the bend, and its negligence led to large errors in computations. In flows with high Fr_o , the maximum vertical acceleration occurred at the beginning of the bend (minimum depth point), and the minimum occurred at the wave crest. At high Fr_o , the vertical acceleration was downward, causing the hydrodynamic pressure to become less than the corresponding hydrostatic pressure.

Conclusions: The three-dimensional model of Flow3D is a suitable tool for the simulation of high-velocity supercritical flows in bends in comparison with the two-dimensional depth-averaged model of shallow water equation of Roe2D. By examining the pressure distribution and vertical acceleration in the numerical models, it may be concluded that the basic assumption in the extraction of shallow water equations, namely the hydrostatic pressure distribution, is not admissible, especially at high Froude numbers. Moreover, the effects of vertical acceleration of water particles has a great effect on the estimation of wave crest depth and its position in the bend.

Keywords: Curved open channel, Numerical solution, Pressure distribution, Vertical acceleration, Roe2D, Flow3D.

© 2022 Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.



This is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license)

(<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

تحلیل دو و سه بعدی جریان فوق بحرانی در خم‌ها

هادی اکبریان^۱، محمدرضا جعفرزاده^{۲*}

۱- دانشجوی دکتری گروه عمران، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

۲- استاد، گروه عمران، دانشکده مهندسی، پژوهشکده آب و محیط زیست، دانشگاه فردوسی مشهد.

*jafarzag@um.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۳۱، پذیرش: ۱۴۰۰/۰۹/۱۰، وب‌گاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: جریان فوق بحرانی در کانال‌های افقی با خم ۹۰ درجه و مقطع مستطیلی به صورت آزمایشگاهی و عددی بررسی می‌شود. نسبت شعاع انحناء به عرض کانال (r_c/b) در محدوده ۱/۵۰ تا ۴/۸۳ و عدد فرود جریان ورودی به خم Fr_0 بین ۱/۸۲ تا ۶/۱۸ قرار دارد. در شبیه‌سازی دو بعدی از مدل عددی Roe2D و برای مدل‌سازی سه بعدی از نرم‌افزار Flow3D استفاده شده است. مدل سه بعدی به خوبی قادر به شبیه‌سازی رفتار جریان فوق بحرانی در خم است اما مدل دو بعدی که از حل معادلات آب‌های کم‌عمق به دست آمده است، برای مقادیر $Fr_0 < 3$ دقت قابل قبولی دارد. با افزایش عدد فرود جریان ورودی به خم، خطای این مدل بیشتر می‌شود. با مقایسه توزیع فشارهای هیدرواستاتیک و هیدرودینامیک و همچنین مؤلفه قائم شتاب در خم ثابت می‌شود که فرض اساسی معادلات آب‌های کم‌عمق یعنی توزیع فشار هیدرواستاتیک که در نتیجه آن از اثر شتاب قائم ذرات آب صرف‌نظر می‌شود، تأثیر زیادی در خطای برآورد رفتار جریان به خصوص در اعداد فرود بالا دارد.

کلیدواژگان: کانال خمیده روباز، حل عددی، توزیع فشار، شتاب قائم، Flow3D، Roe2d.

۱- مقدمه

بعضی وقت‌ها استفاده از کانال‌های خمیده برای انتقال آب به دلیل شرایط پروژه یا توپوگرافی زمین اجتناب‌ناپذیر است. یکی از پدیده‌هایی که در خم‌های با جریان فوق بحرانی رخ می‌دهد الگوی موج‌های مورب و متقاطع^۱ مشابه با شکل ۱ است (Chow, 1986). این امواج تا مسافت زیادی در پایین دست ادامه پیدا می‌کنند و باعث بالا رفتن سطح آب در دیواره خارجی خم می‌شوند که منجر به افزایش ارتفاع دیواره کانال در طراحی می‌شود. رفتار پیچیده جریان فوق بحرانی در خم ابتدا توسط مدل‌های هیدرولیکی و اخیراً با استفاده از روش‌های عددی، توسط پژوهشگران تحقیق شده است.

Ippen and Knapp (1936) جریان فوق بحرانی در خم را به صورت آزمایشگاهی بررسی کردند. آزمایش‌های ایشان در کانال‌های با خمیدگی نسبی (نسبت عرض کانال به

شعاع خم $\rho_c = b/r_c$) در محدوده $\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{4}$ انجام شد. موقعیت و ارتفاع این امواج توسط Knapp and Ippen (1938) و von Kàrman (1938) بررسی شد. Poggi (1956) آزمایش‌های خود را در کانال‌های با خمیدگی نسبی $\frac{1}{12}$ و $\frac{1}{25}$ انجام داد و نتیجه گرفت که رابطه‌های Knapp and Ippen (1938) تنها برای مقادیر کم خمیدگی نسبی (ρ_c) و عدد فرود جریان ورودی به خم (Fr_0) کاربرد دارد و با افزایش این دو، خطای برآورد بیشتر می‌شود. Marchi (1988) جریان فوق بحرانی را در کانال‌هایی با خم ۹۰ درجه و خمیدگی نسبی در محدوده ۰/۵ تا ۲/۰ آزمایش کرد. محدوده عدد فرود جریان ورودی به خم در آزمایش‌های ایشان بین ۱/۱۴ و ۳/۸۷ بود. Reinauer and Hager (1997) جریان فوق بحرانی در خم را در سه کانال مختلف با خمیدگی‌های نسبی $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{4}$ به صورت آزمایشگاهی تحلیل کردند. نتایج بررسی‌های ایشان نشان داد عدد خم $B = Fr_0 \sqrt{\rho_c}$ پارامتر اصلی

1 Cross Waves

و با مدل‌های آشفتگی RNG و LES شبیه‌سازی کردند. بین این دو مدل، در برآورد عمق آب در دیواره خارجی کانال، تفاوت زیادی وجود نداشت و مدل سه بعدی همخوانی بسیار خوبی با مقادیر اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه به ویژه در دیواره خارجی خم (که در طراحی بیشتر مورد علاقه است) داشت. Huang and Wang (2018) سرریز یک سد را با مقیاس ۱:۱ به کمک نرم‌افزار Flow3D به صورت سه بعدی مدل‌سازی کردند. کانال مستطیل‌شکل پایین‌دست این سرریز یک خم با زاویه ۶۰ درجه، شعاع میانی ۶۰ متر و عرض ۱۶/۸ متر داشت. ایشان همچنین یک مدل فیزیکی با مقیاس هندسی ۱:۳۰ ساختند و نتایج شبیه‌سازی سه بعدی را با مدل فیزیکی مقایسه نمودند و رابطه‌هایی برای محاسبه عمق آب در دیواره‌های خم ارائه کردند. Ghazanfari-Hashemi et al. (2019) با کمک نرم‌افزار Fluent آزمایش‌های Poggi (1956) را به صورت سه بعدی شبیه‌سازی کردند و اهمیت مدل‌سازی سه بعدی و همچنین اثر مدل‌های آشفتگی را در برآورد نیمرخ سطح آب در دیواره‌های خم بررسی کردند. مدل‌سازی سه بعدی با و بدون در نظر گرفتن اثرات آشفتگی انجام شد. مدل سه بعدی با مقادیر آزمایشگاهی و مدل دو بعدی مقایسه شد و نتایج نشان داد که مقدار و موقعیت عمق بیشینه جریان در مدل سه بعدی دقیق‌تر است و همچنین مدل آشفتگی تأثیر زیادی در شبیه‌سازی جریان فوق بحرانی در خم‌ها ندارد. در این پژوهش جریان فوق بحرانی در کانال مستطیل شکل افقی خمیده با خم ۹۰ درجه با نسبت‌های مختلف شعاع انحناء به عرض کانال (r/b) به صورت آزمایشگاهی و عددی با مدل‌های دو و سه بعدی مطالعه می‌شود. برای مدل‌سازی دو بعدی از مدل عددی Roe2D و برای مدل‌سازی سه بعدی از نرم‌افزار Flow3D استفاده می‌گردد. پس از صحت‌سنجی مدل عددی سه بعدی با نتایج آزمایشگاهی و کارهای تحقیقاتی دیگران، رابطه‌های تجربی جدیدی برای محاسبه عمق بیشینه جریان در دیواره خارجی خم و موقعیت فراز موج بر حسب عدد فرود جریان ورودی و ویژگی‌های هندسی خم ارائه می‌شود. در ادامه توزیع فشار هیدرواستاتیکی و

کنترل‌کننده امواج جریان فوق بحرانی است. Beltrami et al. (2007) جریان فوق بحرانی را در سه کانال مستطیلی با خم ۱۸۰ درجه و خمیدگی‌های نسبی ۰/۱۳، ۰/۲۱ و ۰/۲۵ به صورت آزمایشگاهی بررسی و با رابطه‌های Reinauer and Hager (1997) مقایسه کردند. ایشان رابطه‌های قبلی برای نیمرخ سطح آب در دیواره خارجی خم را بهبود دادند. Ghaeini and Tahershamsi (2009) معادله پیوستگی و معادله دو بعدی اولر متوسط‌گیری شده در عمق را خطی‌سازی کردند و جریان فوق بحرانی را در تندآب‌های مستطیلی خمیده بررسی کردند. نتایج حل تحلیلی با مقادیر آزمایشگاهی صحت‌سنجی شد.

Valiani and Caleffi (2005) از جمله محققانی بودند که جریان فوق بحرانی در خم را به صورت عددی بررسی و ارزیابی کردند. ایشان با روش عددی حجم محدود HLL^۱ معادلات آب‌های کم‌عمق^۲ را حل کردند و جریان فوق بحرانی در خم‌های تیز را مدل‌سازی کردند. آنها برای صحت‌سنجی مدل عددی از نتایج آزمایشگاهی Marchi (1988) و Reinauer and Hager (1997) استفاده کردند. Shamkhalchian and Jaefarzadeh (2011) راه حل تحلیلی برای مدل‌سازی عددی امواج فوق بحرانی در خم‌ها را ارزیابی کردند. Jaefarzadeh et al. (2012) جریان فوق بحرانی در خم را با استفاده از روش عددی حجم محدود Roe2D شبیه‌سازی و با داده‌های آزمایشگاهی Reinauer and Hager (1997) و رابطه‌های تحلیلی Knapp and Ippen (1938) و روش عددی Valiani and Caleffi (2005) مقایسه کردند. بررسی نتایج عددی و آزمایشگاهی نشان داد که معادلات آب‌های کم‌عمق نمی‌توانند عمق جریان فوق بحرانی در خم را در اعداد فرود بالا به خوبی برآورد کنند.

در سال‌های اخیر استفاده از مدل‌های سه بعدی برای شبیه‌سازی پدیده‌های فیزیکی و هیدرولیکی گسترش پیدا کرده است. Brown and Crookston (2016) آزمایش‌های Ippen and Knapp (1936) را با کمک نرم‌افزار Flow3D

1 Harten, Lax and van Leer (HLL)
2 Shallow Waters Equation

b عرض کانال و β تابعی از عدد فرود جریان ورودی به خم (Fr_0) است:

$$\beta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{Fr_0}\right), Fr_0 = \frac{V_0}{\sqrt{gh_0}} \quad (2)$$

در رابطه (۲)، V_0 و h_0 به ترتیب سرعت و عمق جریان ورودی به خم و g شتاب ثقل است. برابر با شکل ۱ پس از تشکیل نخستین موج در زاویه θ_m ، مجموعه امواج متوالی با فراز و نشیب‌های پی در پی در امتداد دیواره‌های خم در زاویه‌های $2\theta_m$ ، $3\theta_m$ و غیره توسعه پیدا می‌کنند.

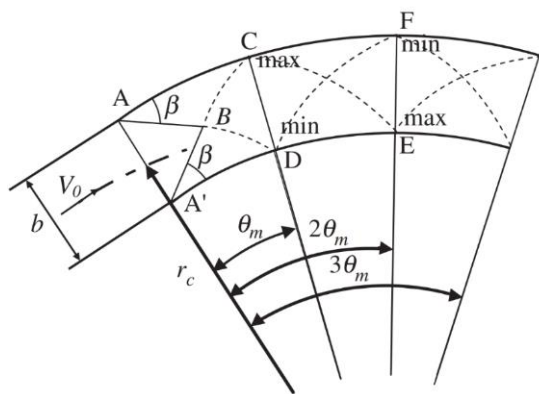


Fig. 1 Development of oblique waves in a supercritical bend flow (Chow, 1986)

شکل ۱ توسعه امواج مورب در جریان فوق بحرانی در خم (Chow, 1986)

Knapp and Ippen (1938) برای محاسبه نیمرخ سطح آب در دیواره‌های خم از رابطه زیر استفاده کردند.

$$\frac{h}{h_0} = Fr_0^2 \sin^2(\beta \pm \frac{\theta}{2}), \quad 0 < \theta < \theta_m \quad (3)$$

h ارتفاع آب در زاویه θ از ابتدای خم است. (Reinauer and Hager (1997) با بررسی آزمایشگاهی جریان فوق بحرانی در کانال مستطیل شکل خمیده افقی، رابطه‌هایی را برای محاسبه موقعیت نخستین فراز موج و نیمرخ سطح آب در دیواره خارجی ارائه دادند:

$$\tan \theta_{max} = \begin{cases} Fr_0 \frac{b}{r_c}, & Fr_0 \frac{b}{r_c} \leq 0.35 \\ 0.6 \sqrt{Fr_0 \frac{b}{r_c}}, & Fr_0 \frac{b}{r_c} > 0.35 \end{cases} \quad (4)$$

$$\tau_{ow} = \sin^{1.5}\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_{max}}\right), \quad 0 \leq \frac{\theta}{\theta_{max}} < 1.25 \quad (5)$$

هیدرودینامیکی آب در خم توسط این مدل به دست می‌آید. همچنین با بررسی تغییرات شتاب قائم در خم در مدل عددی سه بعدی، علت خطای بالای مدل عددی دو بعدی در برآورد عمق جریان فوق بحرانی در خم تشریح می‌شود.

۲- مواد و روش‌ها

۲-۱- حل تحلیلی جریان فوق بحرانی در خم

هرگاه در یک کانال خمیده با عرض b و شعاع انحناء r_c ، جریان فوق بحرانی مطابق با شکل ۱ برقرار باشد، امواج مورب و متقاطع بوجود می‌آید. نخستین موج مورب مثبت به علت انحناء کانال، در نقطه A روی دیواره خارجی باعث افزایش ارتفاع جریان می‌شود. این موج در طول خط AB امتداد می‌یابد. در همین هنگام موج منفی حاصل از دیواره داخلی، باعث کاهش عمق جریان شده، در طول خط A'B انتشار می‌یابد. دو موج حاصله در نقطه B یکدیگر را قطع می‌کنند. در بالادست مرز ABA'، جریان تحت تأثیر انحناء کانال قرار نمی‌گیرد. پس از نقطه B، در نتیجه تداخل امواج مورب، آشفتگی جریان در یک خط مستقیم منتشر نمی‌شود بلکه مسیرهای BC و BD را می‌پیماید. دیواره AC مسیر جریان را منحرف می‌کند. در این حالت، عمق آب به تدریج اضافه شده، در نقطه C به بیشینه می‌رسد و پس از این نقطه در دیواره خارجی، از عمق آب کاسته می‌شود. از نقطه A' به بعد جریان از دیواره داخلی به خارج کشیده می‌شود. در نتیجه نیمرخ سطح آب پایین می‌افتد و در نقطه D به کمترین خود می‌رسد. عمق آب پس از نقطه D در دیواره داخلی اضافه می‌شود. توسعه امواج مورب، امواج سینوسی شکلی را برای اعماق آب در دیواره‌های داخلی و خارجی به وجود می‌آورد (Chow, 1986) و (Knapp, 1951).

نخستین فراز (نشیب) موج در زاویه θ_{min} تا θ_{max} ، از شروع خم تشکیل می‌شود. (Knapp and Ippen (1938) رابطه‌هایی را برای محاسبه موقعیت فراز و نشیب این امواج ارائه کردند. $\theta_m = \theta_{min} = \theta_{max}$ داریم:

$$\theta_m = \tan^{-1} \frac{2b}{(2r_c + b) \tan \beta} \quad (1)$$

معادلات آب‌های کم‌عمق در کانال افقی بدون اصطکاک از انتگرال‌گیری معادلات ناویر-استوکس در عمق به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

در این رابطه:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}$$

$$F(U) = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{1}{2}gh^2 \\ huv \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$G(U) = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix}$$

در این رابطه‌ها، h تراز سطح آب در هر نقطه، g شتاب ثقل، u (v) مؤلفه سرعت متوسط‌گیری شده در عمق در راستای x (y) هستند.

از معادلات آب‌های کم‌عمق، برای تحلیل رفتارهای جریان مثل مدل‌سازی جذر و مد، شکست امواج در سواحل، امواج سیلابی در رودخانه‌ها و موج حاصل از شکست سد و غیره استفاده می‌شود. فرض بنیادین در استخراج معادلات آب‌های کم‌عمق مربوط به توزیع فشار هیدرواستاتیک است که در نتیجه آن از اثرات شتاب قائم ذرات آب، صرف‌نظر می‌شود (Chaudry, 2008).

۲-۳- مدل‌سازی عددی

دینامیک سیالات محاسباتی^۶ یک ابزار مبتنی بر روش‌های عددی جهت شبیه‌سازی رفتار سیستم‌هایی شامل جریان سیال، انتقال گرما و دیگر فرآیندهای فیزیکی وابسته است. این ابزار با حل عددی معادله جریان سیال روی یک ناحیه مورد نظر، با اعمال شرایط مرزی مشخص، رفتار سیال را پیش‌بینی می‌کند (Ferziger and Peric, 2001). در پژوهش حاضر برای شبیه‌سازی عددی سه بعدی الگوی جریان از نرم‌افزار Flow3D استفاده شده است. Flow3D یک برنامه رایانه‌ای با کاربردهای کلی و توانایی‌های بسیار

در این رابطه، τ_{ow} ، نیمرخ سطح آب در دیواره خارجی است که به شکل زیر بدون بعد شده است.

$$\tau_{ow} = \frac{h - h_0}{h_{max} - h_0} \quad (6)$$

ایشان همچنین رابطه‌ای تجربی برای محاسبه عمق بیشینه جریان در دیواره خارجی خم ($Z_m = (h_{max}/h_0)^{0.5} - 1$) بر حسب عدد فرود جریان ورودی و ویژگی‌های هندسی خم (عدد خم، B) ارائه کردند:

$$Z_m = \sqrt{\frac{h_{max}}{h_0}} - 1 = \begin{cases} 0.40B^2, & B \leq 1.5 \\ 0.60B, & B > 1.5 \end{cases} \quad (7)$$

۲-۲- معادلات حاکم

معادله پیوستگی و معادلات مومنتم^۱ (ناویر-استوکس^۲) برای سیال تراکم‌ناپذیر^۳ در راستای x ، y و z به شکل زیر است (Chaudry, 2008):

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (8)$$

$$x: \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} =$$

$$g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$y: \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} =$$

$$g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$z: \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} =$$

$$g_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (11)$$

حل همزمان این معادلات، توصیف کاملی از ویژگی‌های مختلف میدان جریان یک سیال نیوتنی^۴ و تراکم‌ناپذیر در اختیار قرار می‌دهد.

در رابطه‌های بالا، متغیر t زمان، متغیرهای u ، v و w مؤلفه‌های سرعت در راستاهای x ، y و z ، متغیر ρ جرم مخصوص، متغیر p فشار، متغیر μ گرانشی دینامیکی^۵ و $g = (g_x, g_y, g_z)$ نیروی گرانشی بر واحد جرم است.

1 Momentum equation

2 Navier-Stokes Equation

3 Incompressible fluid

4 Newtonian Fluid

5 Dynamic viscosity

6 Computational Fluid Dynamics (CFD)

مخزن بالادست در ابتدای کانال پمپاژ شد. دریچه‌ای در ورودی مخزن به کانال وجود داشت. این دریچه در چند مورد با بازشدگی‌های مختلف آزمایش و بازشدگی به مقدار ۶ سانتی‌متر به جهت اینکه محدوده اعداد فرود مناسبی را تولید می‌کرد، مناسب تشخیص داده شد.

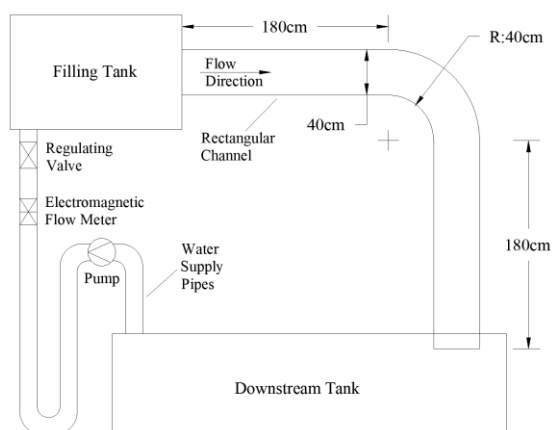


Fig. 2 Plan of experimental flume

شکل ۲ پلان فلوم آزمایشگاهی

یک کانال مستقیم به طول ۱۸۰ سانتی‌متر قبل از خم برای اطمینان از طول توسعه‌یافتگی جریان احداث شد. در انتهای این کانال، یک کانال خمیده با زاویه مرکزی ۹۰ درجه قرار داشت که شعاع‌های داخلی و خارجی آن ۴۰ و ۸۰ سانتی‌متر بود. مخزن اصلی، به ابعاد ۱ در ۱ در ۷ متر در پایین‌دست کانال واقع شده بود و وظیفه آن انباشت آب کل مجموعه بود. پس از مخزن اصلی، یک پمپ گریز از مرکز بود که آب را به مخزن بالادست کانال پمپاژ می‌کرد. در مسیر انتقال آب از مخزن اصلی به مخزن بالادست یک فلومتر و یک شیر کشویی زبانه لاستیکی برای قرائت و تنظیم دبی جریان نصب شد. عرض کانال با اضافه کردن دیواره‌های میانی در کانال و خم قابل تغییر بود و نسبت شعاع خم به عرض کانال عوض می‌شد. شکل ۳ نمایی از فلوم آزمایشگاهی را نشان می‌دهد.

۳- نتایج و بحث

با اضافه کردن دیواره میانی در کل طول کانال‌های بالادست، خمیده و پایین‌دست، ۸ کانال با عرض‌های ۱۵، ۲۰، ۳۰ و ۴۰ سانتی‌متر و با نسبت‌های مختلف شعاع

است که کاربر می‌تواند با وارد کردن اطلاعات، مدل‌های مختلفی را به منظور ارائه محدوده گسترده‌ای از پدیده‌های جریان، انتخاب کند. معادلات حاکم بر جریان در نرم‌افزار Flow3D، معادلات ناویر-استوکس هستند. گسسته‌سازی معادلات جهت حل عددی مسائل دینامیک سیالات محاسباتی با روش حجم محدود انجام می‌شود (Flow Science Inc., 2017). این روش می‌تواند با هر شبکه‌ای سازگار باشد و برای هندسه‌های پیچیده مناسب است (Ferziger & Peric, 2001).

برای تکمیل معادلات ناویر-استوکس از مدل آشفتگی $k-\epsilon$ و برای مدل‌سازی سطح آزاد از روش حجم سیال^۱ استفاده شد. در مرز ورودی شرط مرزی سرعت و عمق ثابت و در کف و دیواره‌ها شرط مرزی غیر لغزشی فرض شد. با توجه به هندسه کانال، سه بلوک شبکه به ترتیب برای کانال بالادست خم، کانال خمیده و کانال پایین‌دست خم ایجاد شد. شبکه‌بندی در مختصات کارتزین^۲ انجام شد. طبق آنالیز حساسیت انجام شده، به جهت دقت بیشتر در انجام محاسبات، اندازه سلول‌های شبکه در خم ۰/۵ سانتی‌متر و در کانال‌های بالادست و پایین‌دست برابر با ۱/۰ سانتی‌متر در نظر گرفته شد.

برای حل معادلات آب‌های کم‌عمق (۱۲) و (۱۳) از مدل دوبعدی Roe2D استفاده گردید. این روش به خوبی توانست ناپیوستگی‌ها را در جریان‌های فوق بحرانی شبیه‌سازی کند. برای مهار نوسان‌ها از محدود کننده شیب minmod و برای حل مسئله از شبکه‌بندی مثلثی استفاده شد. جزئیات و رابطه‌های حل معادلات در مقاله دیگری به وسیله نگارنده دوم این مقاله توضیح داده شده است (Alamatian and Jaefarzadeh, 2010).

۲-۴- فلوم آزمایشگاهی

آزمایش‌ها در فلوم آزمایشگاه هیدرولیک دانشگاه فردوسی مشهد انجام شد. این کانال افقی، مستطیل شکل، به عرض ۴۰ سانتی‌متر مطابق با شکل ۲، و دیواره‌ها و کف آن از جنس پلکسی گلس شفاف بود. آب از مخزن ذخیره به

1 Volume of Fluid (VOF)

2 Cartesian

دیواره خارجی را در برابر عدد فرود ورودی به خم (Fr_0) در کانال‌های با $r_c/b = 1/50$ و $r_c/b = 3/100$ و $r_c/b = 4/83$ نشان می‌دهد. با افزایش Fr_0 و یا کاهش r_c/b عمق بیشینه جریان افزایش می‌یابد و موقعیت فراز موج به سمت پایین دست خم می‌رود. مدل سه بعدی به خوبی می‌تواند رفتار جریان فوق بحرانی از جمله عمق و موقعیت فراز موج را در دیواره خارجی خم برآورد کند. مدل دو بعدی برای مقادیر کم عدد فرود جریان $Fr_0 < 3$ دقت قابل قبولی دارد اما با افزایش عدد فرود، خطای آن افزایش پیدا می‌کند.

جدول ۱ ویژگی‌های هندسی کانال‌ها

Table 1 Geometric specification of channels

No	r_c (cm)	b (cm)	r_c/b	$\rho=b/r_c$
1	60.0	40	1.50	0.67
2	55.0	30	1.83	0.55
3	65.0	30	2.17	0.46
4	50.0	20	2.50	0.40
5	60.0	20	3.00	0.33
6	70.0	20	3.50	0.29
7	57.5	15	3.83	0.26
8	72.5	15	4.83	0.21

برای نشان دادن اختلاف بین مدل‌های دو و سه بعدی با نتایج آزمایشگاهی از خطای جذر میانگین مربعات^۱ (RMSE) استفاده شده است.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (h_i - h_{exp,i})^2} \quad (14)$$

در این رابطه، h_i برآورد i ام از عمق آب در مدل عددی و $h_{exp,i}$ عمق آب اندازه‌گیری شده متناظر با آن است. مقادیر RMSE مدل‌های دو بعدی و سه بعدی در برآورد عمق آب در دیواره خارجی در جدول ۲ آورده شده است. مقادیر RMSE در مدل سه بعدی برای همه موارد از مدل دو بعدی کمتر است و با افزایش عدد فرود جریان ورودی به خم، این خطا بیشتر می‌شود.

شکل ۷ همخوانی مدل‌های عددی با نتایج آزمایشگاهی را در برآورد عمق بیشینه بدون بعد جریان ($\eta_{max} = \frac{h_{max}}{h_0}$) و موقعیت نخستین فراز موج ($\frac{2\theta_{max}}{\pi}$) در دیواره خارجی خم نشان می‌دهد. در برآورد عمق بیشینه بدون بعد جریان، خطای مدل سه بعدی در محدوده ۰.۵٪ و در برآورد موقعیت



Fig. 3 Experimental flume setup
شکل ۳ نمای از فلوم آزمایشگاه

انحناء به عرض (r_c/b) ساخته شد. شکل ۴ چگونگی اضافه کردن دیواره میانی برای ساخت کانال‌های جدید را نشان می‌دهد. مقادیر دبی جریان و عمق آب در کانال خمیده اندازه‌گیری شد و عدد فرود جریان ورودی به خم (Fr_0) محاسبه شد. دبی در کانال‌های مختلف در بازه ۶/۷۰ تا ۵۷/۳ لیتر بر ثانیه و عمق آب در ورودی خم بین ۳/۸ تا ۴/۴ سانتی‌متر بود. از طرف دیگر با استفاده از مدل‌سازی دو و سه بعدی، آزمایش‌های انجام شده شبیه‌سازی گردید. جدول ۱ ویژگی‌های هندسی کانال‌های مورد آزمایش را نشان می‌دهد.

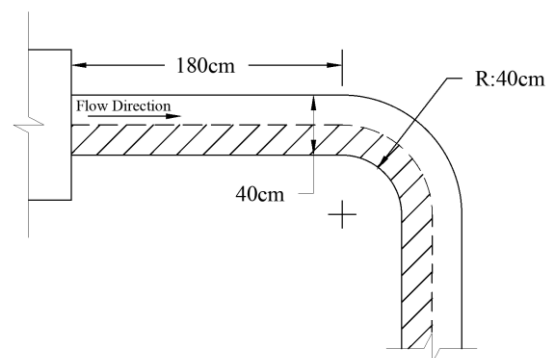


Fig. 4 Adding the middle wall inside the main channel
شکل ۴ اضافه کردن دیواره میانی در کانال اصلی

۳-۱- بررسی عمق جریان

در شکل ۵ عمق بدون بعد جریان ($\eta = \frac{h}{h_0}$) در طول دیواره خارجی خم به ازای اعداد فرود ورودی ۲/۲۵، ۴/۲۳ و ۵/۸۰ در کانال‌های با $r_c/b = 1/50$ و $r_c/b = 4/83$ نشان داده شده است. شکل ۶ عمق بیشینه بدون بعد جریان در

1 Root Mean Square Error (RSME)

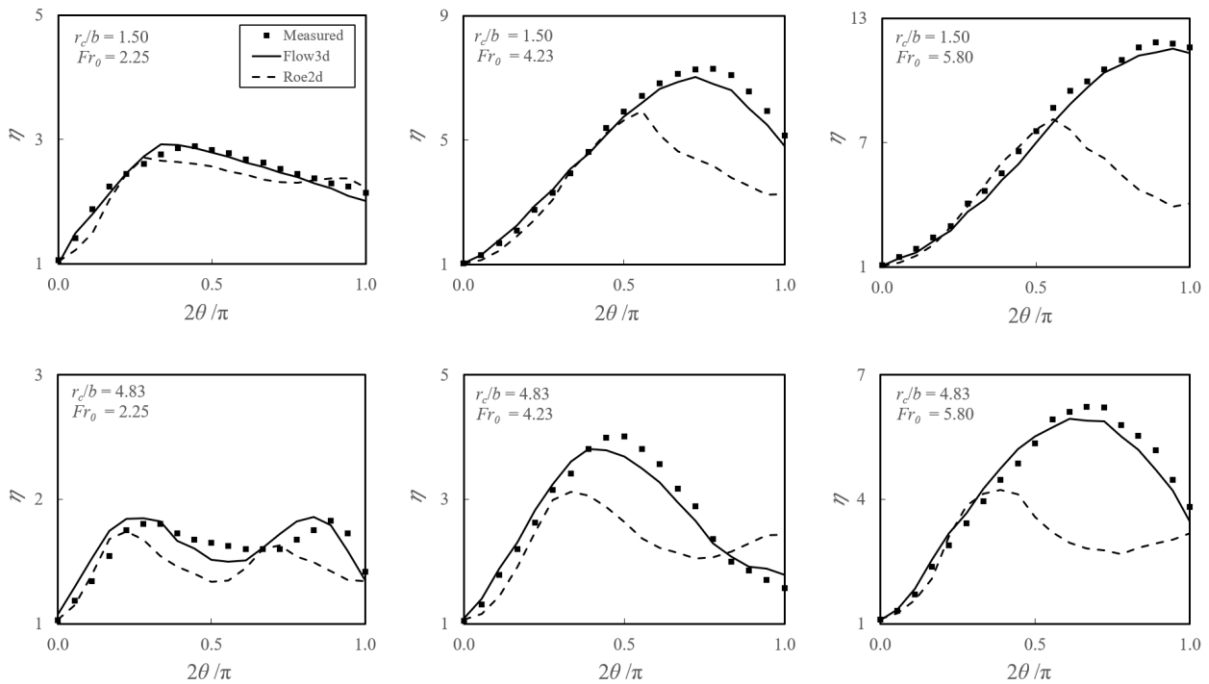


Fig. 5 Dimensionless flow depth at the outer wall

شکل ۵ عمق بدون بعد جریان در دیواره خارجی

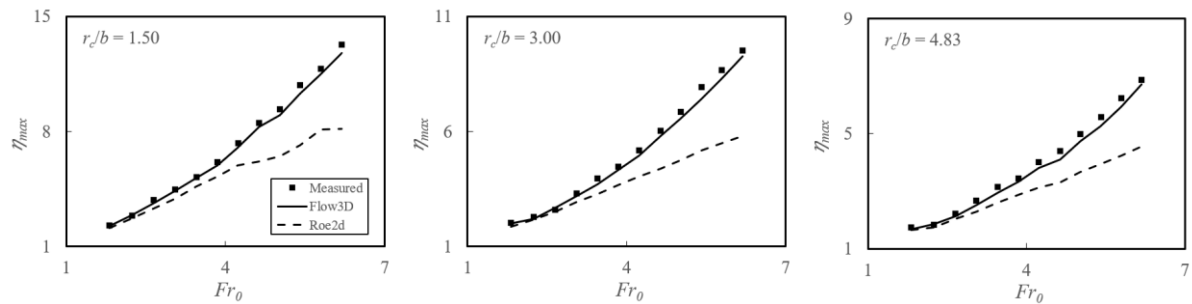


Fig. 6 Maximum dimensionless depth η_{max} versus Fr_0

شکل ۶ عمق بیشینه بدون بعد جریان در برابر عدد فرود جریان ورودی به خم

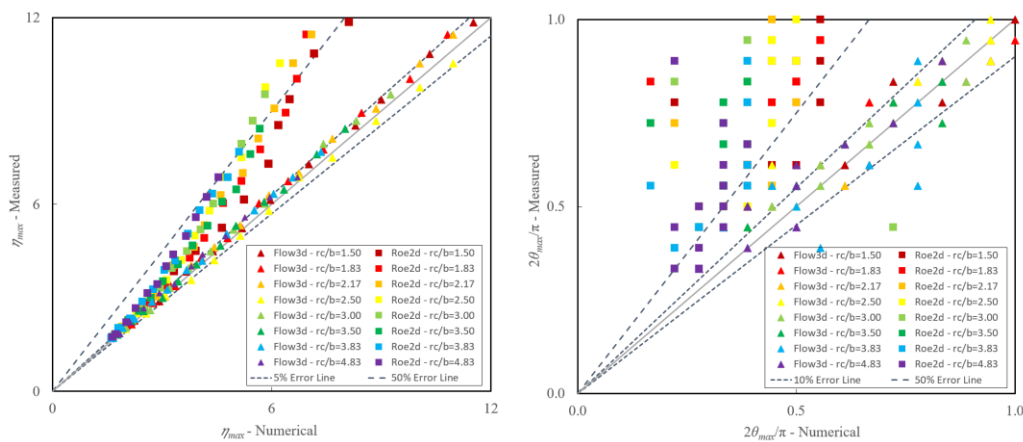


Fig. 7 Adaptation of numerical models to experimental results – maximum dimensionless flow depth (left) and crest location (right)

شکل ۷ همخوانی مدل‌های عددی با نتایج آزمایشگاهی - عمق بیشینه بدون بعد جریان (چپ) و موقعیت نخستین فراز موج (راست)

مقایسه شده است. مدل سه بعدی دقت بسیار خوبی در برآورد مقادیر عمق و موقعیت فراز موج دارد.

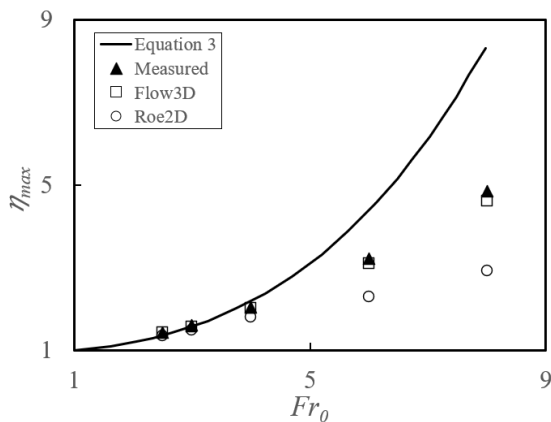


Fig. 8 Maximum dimensionless depth $\eta_{max}(Fr_0)$, in numerical models, Eq. 3 and experimental data by Reinauer and Hager (1997)

شکل ۸ عمق بیشینه بدون بعد در برابر عدد فرود جریان ورودی به خم در مدل‌های عددی، رابطه ۳ و نتایج آزمایشگاهی (Reinauer and Hager (1997)

با در نظر گرفتن داده‌های آزمایشگاهی این پژوهش و پژوهش‌های (Reinauer and Hager (1997), Poggi, Rokotorivelo و Sananes and Acatay (1962) (1956)، مقدار عمق بیشینه جریان در دیواره خارجی خم و موقعیت فراز موج به دست آمد. خمیدگی نسبی ($\rho=b/r_c$) در کانال‌های پژوهشگران پیشین، کم و در محدوده ۰/۰۶ تا ۰/۱۴ بود. در این پژوهش طیف گسترده‌تر خمیدگی نسبی از ۰/۲۱ تا ۰/۶۷ بررسی شده و رابطه‌های جدید برای محدوده ۰/۰۶ تا ۰/۶۷ ارائه شده است. در نتیجه عمق بیشینه جریان در دیواره خارجی خم و موقعیت فراز موج بر حسب عدد فرود جریان ورودی و ویژگی‌های هندسی خم بدست می‌آید.

$$Z_m = 0.59Fr_0\sqrt{\frac{b}{r_c}} - 0.18 \quad (15)$$

$$\frac{h_{max}}{h_0} = \left(0.59Fr_0\sqrt{\frac{b}{r_c}} + 0.82 \right)^2 \quad (16)$$

$$\tan \theta_{max} = \left(0.65Fr_0\left(\frac{b}{r_c}\right) + 0.29 \right)^2 \quad (17)$$

نخستین فراز موج در دیواره خارجی خم، خطای این مدل در محدوده ۱۰٪ است. مدل دو بعدی در برآوردها، خطای بسیار بیشتری دارد.

جدول ۲ مقایسه RMSE مدل‌های دو و سه بعدی

Table 2 Comparison between RMSE values of 2D and 3D models

No	r_c/b	Fr_0	RMSE (cm)	
			Flow3D	Roe2D
1	1.50	2.25	0.34	0.78
2	1.50	4.23	1.06	6.68
3	1.50	5.80	1.45	14.71
4	4.83	2.25	0.42	0.82
5	4.83	4.23	0.71	2.93
6	4.83	5.80	1.02	7.26

۳-۲- مقایسه نتایج با پژوهش‌های پیشین و ارائه رابطه‌های تجربی جدید

برای صحت‌سنجی بیشتر مدل عددی سه بعدی از نتایج آزمایشگاهی (Reinauer and Hager (1997) و رابطه Knapp and Ippen (1938) استفاده شد. یکی از کانال‌هایی که (Reinauer and Hager (1997) مورد آزمایش قرار دادند، بعرض ۲۵ سانتی‌متر و شعاع انحناء ۳/۶۰۷ متر ($r_c/b = 14/43$)، بود. در شکل ۸ عمق بیشینه بدون بعد جریان در این کانال در برابر عدد فرود ورودی به خم (Fr_0) حاصل از مدل‌های عددی دو و سه بعدی و مقادیر آزمایشگاهی و همچنین نتایج حل تحلیلی Knapp and Ippen (1938) با به دست آوردن مقادیر β از رابطه (۲) (مقدار β در محدوده ۰/۱۳ تا ۰/۴۱ رادیان) و جایگزینی آن در رابطه (۳)، ترسیم شده است. حل عددی سه بعدی همخوانی بسیار خوبی با نتایج آزمایشگاهی دارد. برای $Fr_0 < 3$ ، حل عددی دو بعدی و حل تحلیلی Knapp and Ippen (1938) به نتایج آزمایشگاهی نزدیک هستند در حالی که برای $Fr_0 > 3$ ، حل عددی دو بعدی و به ویژه حل تحلیلی خطای زیادی دارند. این خطا با افزایش عدد فرود جریان ورودی به خم افزایش می‌یابد.

در شکل ۹ عمق بدون بعد جریان در دیواره خارجی در طول خم در کانال اول (Reinauer and Hager (1997) برای اعداد فرود ورودی ۴/۰۰ و ۶/۰۰ با مدل سه بعدی

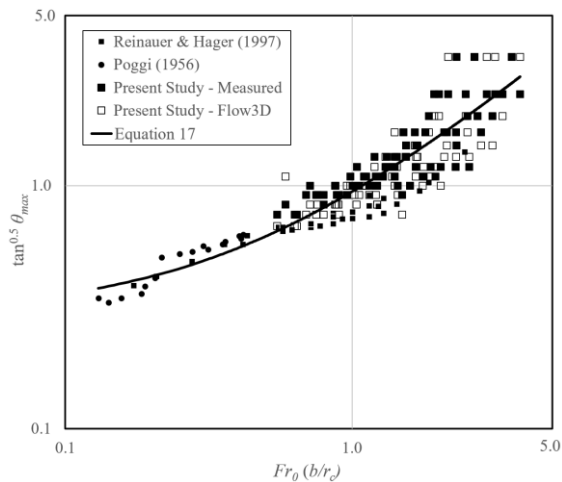


Fig. 11 Crest location $\tan\theta_{max}$ versus $Fr_0(b/r_c)$ in 3D model, Eq. 17 and experimental data by Reinauer and Hager (1997)

شکل ۱۱ موقعیت فراز موج ($\tan^{0.5}\theta_{max}$) در برابر $Fr_0(b/r_c)$ در مدل عددی سه بعدی، مقادیر آزمایشگاهی و رابطه ۱۷

در شکل ۱۰ تغییرات پارامتر $Z_m=(h_{max}/h_0)^{0.5}-1$ بر حسب مقیاس $Fr_0(b/r_c)^{0.5}$ برای داده‌های آزمایشگاهی و مدل سه بعدی همراه با رابطه‌های تجربی (۷) از تحقیق Reinauer and Hager (1997) و رابطه (۱۵) از پژوهش حاضر ترسیم شده است. رابطه اخیر همخوانی خوبی ($R^2 = 0.97$) با داده‌های آزمایشگاهی و مدل سه بعدی در محدوده گسترده‌تری دارد.

در شکل ۱۱ موقعیت فراز موج ($\tan^{0.5}\theta_{max}$) در برابر $Fr_0(b/r_c)$ برای داده‌های آزمایشگاهی و مدل عددی سه بعدی همراه با رابطه (۱۷) ترسیم شده است. این رابطه همخوانی به نسبت خوبی ($R^2 = 0.94$) با نتایج عددی و آزمایشگاهی دارد.

۳-۳- شکل‌گیری امواج متقاطع

تشکیل امواج متقاطع از مشخصه‌های اصلی جریان فوق بحرانی در خم‌ها هستند. این امواج تا مسافت زیادی در پایین دست ادامه پیدا می‌کنند که باید در طراحی کانال‌ها مورد توجه قرار گیرند. شکل ۱۲ (بالا) خطوط تراز را در امواج متقاطع در مدل سه بعدی و شکل ۱۲ (پایین) تصویر همان خطوط را در فلوم آزمایشگاهی نشان می‌دهد. مدل سه بعدی با در نظر گرفتن مؤلفه شتاب قائم سیال، با دقت بالایی موقعیت و ارتفاع این امواج را برآورد می‌کند.

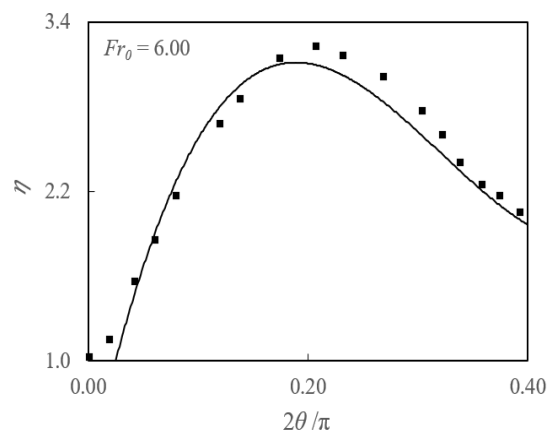
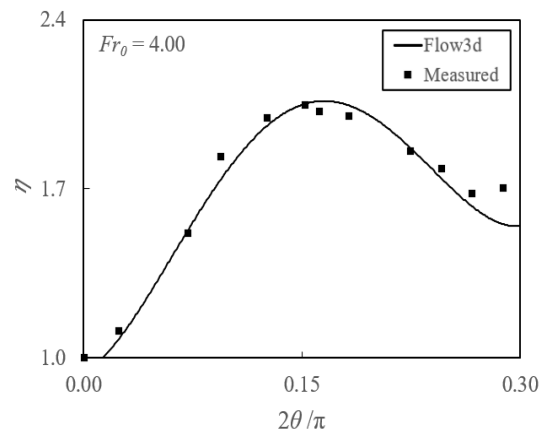


Fig. 9 Dimensionless depth η at the outer wall, in 3D model and experimental data by Reinauer and Hager (1997)

شکل ۹ عمق بدون بعد جریان در دیواره خارجی خم، مدل سه بعدی و مقادیر آزمایشگاهی Reinauer and Hager (1997)

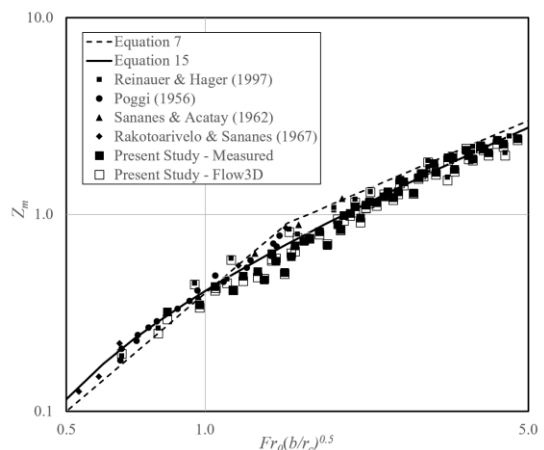


Fig. 10 Maximum wave height Z_m versus $Fr_0(b/r_c)^{0.5}$ at the outer wall, in 3D model, experimental data, equations (7) and (15)

شکل ۱۰ عمق بیشینه جریان در دیواره خارجی خم (Z_m) در برابر $Fr_0(b/r_c)^{0.5}$ در مدل عددی سه بعدی، مقادیر آزمایشگاهی، رابطه‌های (۷) و (۱۵)

۱۳ توزیع فشار بدون بعد هیدرودینامیک و هیدرواستاتیک را در محل فراز موج در دیواره خارجی خم در برابر تراز آب بدون بعد شده ($\zeta = \frac{z}{h_0}$) برای جریان با اعداد فرود ورودی به خم ۲/۲۵، ۴/۲۳ و ۵/۸۰ در کانال‌های با $r_c/b = 1/50$ و $r_c/b = 4/83$ مدل سه بعدی نشان می‌دهد. با افزایش Fr_0 و کاهش r_c/b اختلاف بین فشار هیدرودینامیک و فشار هیدرواستاتیک افزایش می‌یابد. بر این مبنا استفاده از معادلات آب‌های کم عمق (مدل دو بعدی) برای شبیه‌سازی این نوع جریان‌ها به ویژه در اعداد فرود بالا خطای زیادی به وجود می‌آورد.

۳-۵- شتاب قائم

در مدل‌های دو بعدی اغلب از شتاب قائم صرف‌نظر می‌شود (Toro, 2001). این فرض در جریان فوق بحرانی در خم‌ها صحیح نیست. شتاب قائم از مؤلفه‌های شتاب موضعی^۱ و انتقالی^۲ تشکیل شده است (Julien, 2002). مؤلفه شتاب موضعی پس از پایدار شدن جریان صفر می‌شود. جهت محاسبه مؤلفه‌های شتاب انتقالی، مقادیر سرعت در مختصات کارتزین (w و v و u) در نقطه‌های مختلف دیواره بیرونی خم برداشت و در رابطه زیر جایگذاری شد.

$$\alpha_z = u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \quad (19)$$

شکل ۱۴ شتاب قائم بدون بعد ($\alpha_z = \frac{a_z}{g}$) را در عمق h_0 در کنار عمق بدون بعد جریان در دیواره خارجی خم، در کانال با $r_c/b = 1/50$ و اعداد فرود ورودی به خم ۲/۲۵، ۴/۲۳ و ۵/۸۰ نشان می‌دهد. برای جریان با عدد فرود پایین شتاب قائم تقریباً برابر با صفر و قابل صرف‌نظر کردن است. با افزایش عدد فرود جریان ورودی، تغییرات شتاب قائم داخل خم قابل توجه می‌شود و صرف نظر کردن از آن منجر به خطای زیاد در محاسبات می‌گردد. در جریان‌های با اعداد فرود بالا بیشینه شتاب قائم جریان در ابتدای خم (نقطه عمق حداقل) و حداقل آن در محل فراز موج رخ داده است.

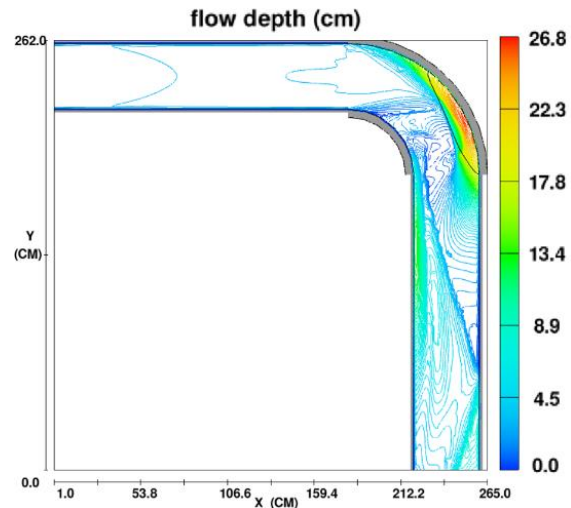


Fig. 12 Cross waves formation in the experimental flume and 3D model

شکل ۱۲ شکل‌گیری امواج متقاطع در مدل سه بعدی (بالا) و فلوم آزمایشگاهی (پایین)

۳-۴- توزیع فشار

با صرف‌نظر از مؤلفه شتاب قائم در معادله آب‌های کم‌عمق، فشار هیدرواستاتیک (P_{hs}) سیال در تراز z از رابطه زیر به دست می‌آید (Chaudry, 2008):

$$P_{hs} = \gamma(z_s - z), \quad \gamma = \rho g \quad (18)$$

در این رابطه، ρ جرم مخصوص، g شتاب ثقل، γ وزن مخصوص و z_s تراز سطح آزاد سیال است.

بر خلاف آنچه در مدل دو بعدی متوسط گرفته شده در عمق فرض می‌شود، توزیع فشار سیال در جریان فوق بحرانی داخل خم به صورت هیدرواستاتیک نیست. شکل

1 Local acceleration
2 Convective acceleration

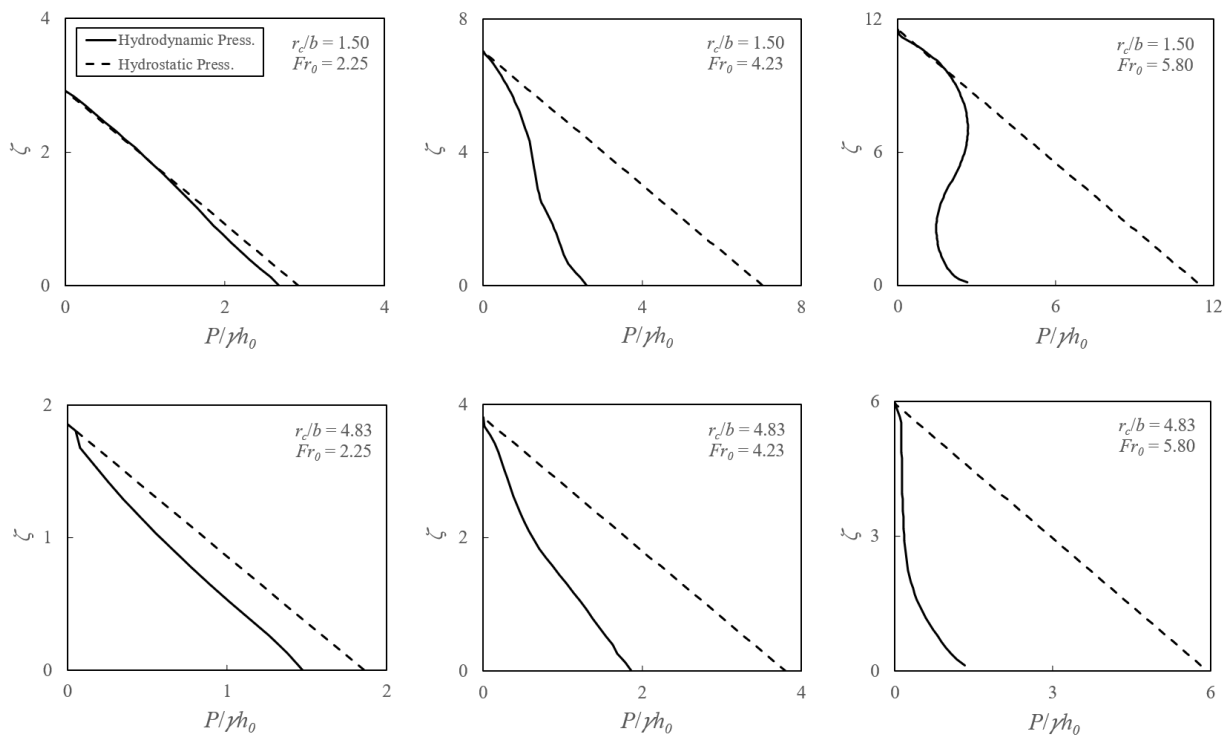


Fig. 13 Dimensionless hydrodynamic and hydrostatic pressure at wave's crest of the outer wall
 شکل ۱۳ توزیع فشار بدون بعد هیدرودینامیک و هیدرواستاتیک در محل فراز موج در دیواره خارجی خم

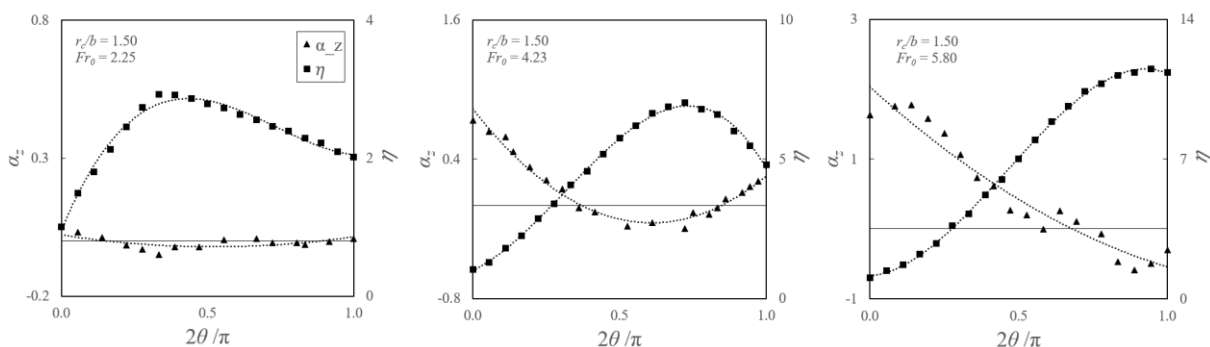


Fig. 14 Dimensionless vertical acceleration at h_0 and dimensionless depth - outer wall
 شکل ۱۴ شتاب قائم بدون بعد در عمق h_0 و عمق جریان بدون بعد در دیواره خارجی خم

شکل افقی با خم ۹۰ درجه با نسبت شعاع انحناء به عرض (r_c/b) در محدوده ۱/۵۰ تا ۴/۸۳ و عدد فرود ورودی به خم در محدوده ۱/۸۲ تا ۶/۱۸ در آزمایشگاه مدل سازی و نتایج با مدل های عددی دو و سه بعدی مقایسه شد و رابطه های تجربی جدیدی برای محاسبه عمق بیشینه جریان در دیواره خارجی خم و موقعیت فراز موج بر حسب عدد فرود جریان ورودی و ویژگی های هندسی خم بدست آمد. بررسی نیمرخ سطح آب در خم نشان داد که با افزایش Fr_0 و یا کاهش r_c/b عمق بیشینه جریان در دیواره خارجی افزایش می یابد و موقعیت فراز موج به

در شکل ۱۵ شتاب قائم بدون بعد در عمق دیواره خارجی خم در محل فراز موج برای همین کانال ترسیم شده است. در جریان های با اعداد فرود بالا مقدار شتاب قائم منفی و جهت آن به سمت پایین است. در نتیجه با توجه به رابطه ناویر-استوکس و کاسته شدن از شتاب جاذبه مقدار فشار هیدرودینامیک کمتر از فشار هیدرواستاتیک می شود (شکل ۱۳).

۴- نتیجه گیری

در این مقاله جریان فوق بحرانی در کانال های مستطیل

داخل خم به صورت هیدرواستاتیک نیست. با افزایش Fr_0 و یا کاهش r_c/b اختلاف بین فشار هیدرودینامیک و فشار هیدرواستاتیک افزایش می‌یابد. بر این مبنا استفاده از معادلات آب‌های کم‌عمق (مدل دو بعدی) برای شبیه‌سازی این نوع جریان‌ها به ویژه در اعداد فرود بالا خطای زیادی به وجود می‌آورد. همچنین محاسبه شتاب قائم نشان داد که برای جریان با عدد فرود پایین شتاب قائم تا حدودی برابر با صفر است. با افزایش عدد فرود جریان ورودی، تغییرات شتاب قائم داخل خم قابل توجه می‌شود و صرف نظر کردن از آن منجر به خطای زیادی در محاسبات می‌گردد. در جریان‌های با اعداد فرود بالا بیشینه شتاب قائم جریان در ابتدای خم (نقطه عمق کمینه) و کمترین آن در محل فراز موج اتفاق می‌افتد.

۵- فهرست نشانه‌ها

r_c	شعاع انحناء کانال خمیده (m)
b	عرض کانال (m)
Fr_0	عدد فرود جریان ورودی به خم (-)
B	عدد خم (-)
V_0	سرعت جریان ورودی به خم (m/s)
h_0	عمق جریان ورودی به خم (m)
h	عمق آب (m)
h_{max}	عمق بیشینه آب (m)
Z_m	پارامتر نشان‌دهنده عمق بیشینه جریان (-)
t	زمان (sec)
u	مؤلفه سرعت در راستای x (m/s)
v	مؤلفه سرعت در راستای y (m/s)
w	مؤلفه سرعت در راستای z (m/s)
R^2	ضریب تعیین (-)
p	فشار (Pa)
g	شتاب ثقل (m/s^2)
h_{exp}	عمق آب اندازه‌گیری شده (m)
P_{hs}	فشار هیدرواستاتیک (Pa)
z_s	تراز سطح آزاد سیال (m)
z	تراز (m)
a_z	مؤلفه قائم شتاب (m/s^2)

نشانه‌های یونانی:

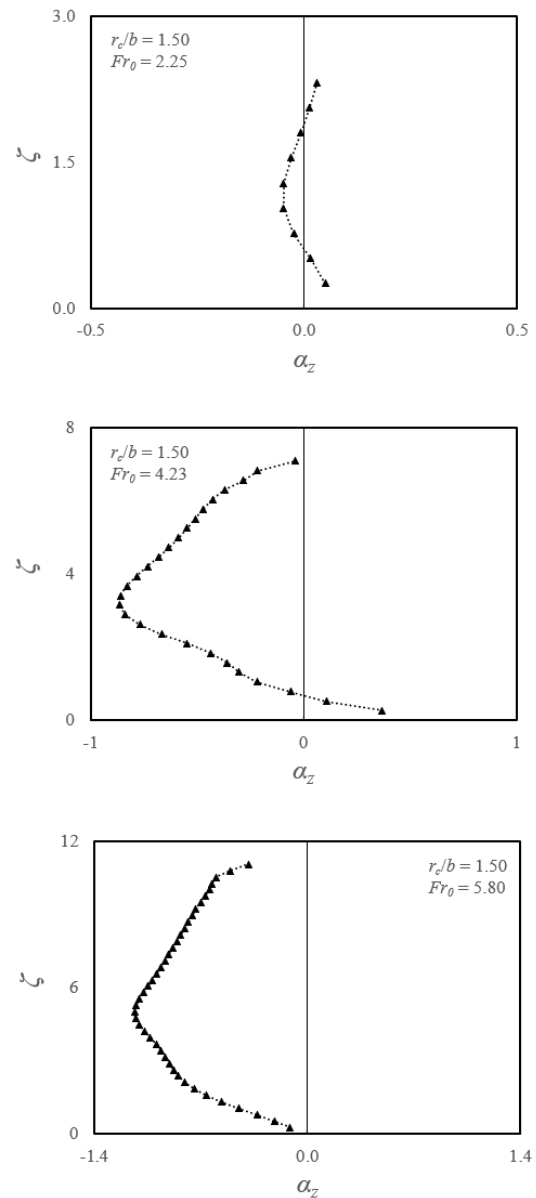


Fig. 15 Dimensionless vertical acceleration at wave's crest – outer wall

شکل ۱۵ شتاب قائم بدون بعد در محل فراز موج در دیواره خارجی خم

سمت پایین دست خم می‌رود. مدل سه بعدی به خوبی قادر به شبیه‌سازی رفتار جریان فوق بحرانی در خم بود و عمق آب و موقعیت فراز موج را در دیواره خارجی خم برآورد کرد. مدل دو بعدی برای $Fr_0 < 3$ دقت قابل قبولی داشت اما با افزایش عدد فرود، خطای آن زیاد شد. بررسی توزیع فشار هیدرواستاتیک و هیدرودینامیک نشان داد که بر خلاف آنچه در مدل دو بعدی متوسط گرفته شده در عمق فرض می‌شود، توزیع فشار در جریان فوق بحرانی

and turbulence in supercritical bend flow. *International Journal of Civil Engineering*, 18, 381-391.

Huang, X. and Wang, Q. (2018). Numerical models and theoretical analysis of supercritical bend flow. *Journal of Water Science and Engineering*, 11(4), 338-343.

Ippen, A.T. and Knapp, R.T. (1936). A study of high velocity flow in curved channels of rectangular cross section. *Transactions American Geophysical Union*, 17, 516-521.

Jaefarzadeh, M.R., Shamkhalchian, A.R. and Jomehzadeh, M. (2012). Supercritical flow profile improvement by means of a convex corner at a bend inlet. *Journal of Hydraulic Research*, 50(6), 623-630.

von Kärman, T. (1938). Eine praktische anwendung der analogie zwischen überschallströmung in gasen und überkritischer strömung in offenen gerinnen. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 18, 49-56. (in German)

Julien, P.Y. (2002). *River mechanics*. Cambridge University Press, England.

Knapp, R.T. (1951). Design of channel curves for supercritical flow. *Hydrodynamics Laboratory Publication*, No. 99, ASCE, New York, 296-325.

Knapp, R.T. and Ippen, A.T. (1938). Curvilinear flows of liquids with free surfaces at velocities above that of wave propagation. *Proceedings of the 5th International Congress of Applied Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc., New York.

Marchi, E. (1988). Correnti veloci in curva a 90° molto strette. *Idrotecnica*, 6, 439-455. (in Italian)

Poggi, B. (1956). Correnti veloci nei canali in curva. *L'energia Elettrica*, 33(5), 465-480. (in Italian)

Rakotoarivelo, W. and Sananes, F. (1967). Etude de l'écoulement supercritique dans un canal dont la section est en forme de U. *Proceedings, 12th International Association of Hydraulic Research Congress*, 1 (A38), 1-7. (in French)

Reinauer, R. and Hager, H. (1997). Supercritical bend flow. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123 (3), 208-218.

Sananes, F. and Acatay, T. (1962). Contribution a l'etude des écoulements supercritiques dans des canaux coudés. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences, Paris, France*, 255, 471-473. (in French)

ρ_c	خمیدگی نسبی (-)
θ_{max}	موقعیت نخستین فراز (radians)
θ_{min}	موقعیت نخستین نشیب (radians)
θ_m	موقعیت نخستین موج (radians)
θ	زاویه از ابتدای خم (radians)
τ_{ow}	نیمرخ بدون بعد سطح آب در دیواره خارجی (-)
μ	گرانروی دینامیکی (kg/m.sec)
η	عمق بدون بعد جریان (-)
ρ	جرم مخصوص (kg/m ³)
γ	وزن مخصوص (N/m ³)
ζ	تراز آب بدون بعد شده (-)
α_z	شتاب قائم بدون بعد (-)

۶- منابع ها

Alamatian, E. and Jaefarzadeh, M.R. (2010). Evaluation of turbulence models in the simulation of oblique standing shock waves in supercritical channel flows. *Sharif Journal of Science and Technology*, 28(1), 17-27. (in Persian)

Beltrami, G.M., Del Guzzo, A. and Repetto, R. (2007). A simple method to regularize supercritical flow profiles in bends. *Journal of Hydraulic Research*, 45(6), 773-786.

Brown, K. and Crookston B. (2016). Investigating supercritical flows in curved open channels with three-dimensional numerical modeling. *Hydraulic Structures and Water System Management. 6th IAHR International Symposium on Hydraulic Structures, Portland, , 230-239.*

Chaudry, M.H. (2008). *Open-Channel Flow*. Springer.

Chow, V.T. (1986). *Open channel hydraulics*. McMillan Inc., New York.

Ferziger, J.H. and Peric, M. (2001). *Computational methods for fluid dynamics*. Springer.

Flow Science Inc. (2017). *FLOW-3D® Version 11.0 User's Manual*. Santa Fe, NM, USA.

Ghaeini-Hessaroyeh, M. and Tahershamsi, A. (2009). Analytical model of supercritical flow in rectangular chute bends. *Journal of Hydraulic Research*, 47(5), 566-573.

Ghazanfari-Hashemi, R.S., Montazeri-Namin, M., Ghaeini-Hessaroyeh, M. and Fadaei-Kermani, E. (2019). A numerical study on three-dimensionality

Valiani, A. and Caleffi, V. (2005). Brief analysis of shallow water equations suitability to numerically simulate supercritical flow in sharp bends. *Journal of Hydraulic Engineering*, 131(10), 912-916.

Shamkhalchian, A.R. and Jaefarzadeh, M.R. (2011). Numerical modeling of supercritical waves in bends with the finite volume method of Roe-TVD and appraisal of analytical assumptions. *Amirkabir Journal of Scientific Research*, 43(1), 43-50. (in Persian)

Toro, E. (2001). *Shock capturing methods for free surface shallow flows*. John Wiley and Sons, LTD. Chichester, New York.