

Lagrangian Approach in Simulating Dam Break Using Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method by Radial Basis Function

Seyed Mojtaba Mosavi Nezhad ^{1*}, Mohammad Akbari Makouei ²

1- Assistant Professor, Department of Civil and Environmental Engineering, University of Birjand, Birjand, Iran.

2- PhD student, Department of Civil and Environmental Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

* mojtaba.mosavi@birjand.ac.ir

Received: 14 December 2020, Accepted: 24 January 2021 J. Hydraul. Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: Due to the increasing need water resources, analysis, design and construction of dams is one of the most widely used fields in engineering sciences. In general, dams with their special characteristics have been able use to another of types of the hydraulic structures. One of the most popular numerical methods proposed for the analysis of hydraulic problems is the meshless methods. In the meshless method, the amplitude and boundaries of the structure are created by nodes. The shape function is used to communicate between nodes.

In this study first the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method by Radial Basis Function (RBF) has been explained entirely. In the following, MLPG method is verified by exact solution in a numerical example. The Results show that MLPG method presented high accuracy and capability for solving the governing equation of differential equations problem in meshless methods. Finally, using RBF (MatLab code was adopted) in the fluid flow in dam breaking problem.

Methodology: Several numerical methods, such as the finite element (FE) and meshless methods, have been developed in the last few decades for solving governing partial differential equations of engineering problems. Approximation in geometry and imposition of boundary conditions in meshless approaches can be mentioned as the drawbacks of the methods. Furthermore, in some engineering problems such as those which are solved in a Lagrangian framework, geometry and boundaries change and, therefore, discretization of the domain should be modified in case of using the FE method, which is quite costly

In the meshless methods, the calculation of the integration is based on the Gaussian integration method in the general and the local forms. In the general method, in order to integrate, it is necessary to create meshes in the background of the problem domain; therefore, this method is not a true meshless method. But meshless methods based on the local integration method, such as the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method, have been proposed. In this way, the governing fluid flow in dam breaking problem is expanded using MLPG method. Radial Basis Functions (RBF) is used to communicate between nodes. In order to discretize the derived equations in time domains, (Zienkiewicz and Codina, 1995) scheme with suitable time step is used. The Mass and momentum conservation laws are governing equations of flow,

which are solved by pressure correction in Lagrangian approach. Then these results are compared with another method results. The results showed high accuracy and good conformity compared to available another solutions and the ability of the proposed method in solution of moving fluid with moving boundaries.

Results and discussion: In order to demonstrate the accuracy of the present method for dam breaking, at the first a problem verifying with analytical solution. Table 2 shows the analytical, numerical and error values obtained. The comparison shows the high capacity and accuracy of the present method.

After verification, the dam breaking problem is investigated. The geometry of the dam breaking problem is shown in Figure 4 and then the present method compare with isogeometric and the least squares method. By comparing the free surface profile between the three methods, it can be easily understood that the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method based on Radial Basis Functions (RBF) has the high accuracy. On the other hand, the close nature of the meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method with the least squares method, it is quite clear that the results are in good agreement. The following results are shown in Figures 7 to 9. The water flow velocity resulting from the present method results with the base function of the radial function in 0.15 seconds in the problem compared to the least squares method (Shobeyri and Afshar, 2010) and isogeometric (Amini, Maghsoodi et al. 2016). Finally, the pressure obtained from the MLPG method in 0.15 seconds compared to the least squares method (Shobeyri and Afshar, 2010) and isogeometric (Amini, Maghsoodi et al., 2016) in Figures 10 to 12 are showed.

Conclusion: By considering the dam breaking problem, it was found, the Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) method is useful in modeling problems with variable boundary conditions, because only by producing nodes at each stage of analysis can define a new boundary conditions and then in the shortest possible time modeling is done. It is clear the modeling this problem with the other methods such as finite element method is complex, because by changing the boundary conditions, produced the new elements becomes a time-consuming and complex matter. The Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method is an intelligent design for solving problems of variable geometric conditions.

Keywords: Dam breaking, Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG) Method, fluid flow modeling, radial base function, Lagrangian Approach.



© 2021 Iranian Hydraulic Association, Tehran, Iran.
This is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution 4.0 International (CC BY 4.0 license)

(<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

مدل سازی شکست سد در دیدگاه لاگرانژی با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی

سید مجتبی موسوی نژاد^{۱*}، محمد اکبری ماکویی^۲

۱- استادیار، مهندسی عمران، دانشگاه بیرجند، بیرجند.

۲- دکتری، مهندسی عمران سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود.

* mojtaba.mosavi@birjand.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۹/۰۹/۲۴، پذیرش: ۱۳۹۹/۱۱/۰۵ و ب‌گاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: در این بررسی سعی شده است، معادله‌های حاکم بر جریان سیال در مسئله شکست سد با استفاده از مبانی ریاضی روش بدون شبکه، رابطه‌سازی شود. در این راستا، در آغاز به معرفی کامل روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی پرداخته می‌شود. همچنین به منظور صحت سنجی، یک مثال عددی که دارای پاسخ دقیق می‌باشد، به کمک این روش حل و با پاسخ‌های دقیق مقایسه شده است. خطای مدل‌سازی در روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین کمتر از ۰/۵ درصد به دست آمده است که به نظر قابل قبول می‌رسد. نتایج نشان می‌دهد روش بدون شبکه به عنوان یک روش کارآمد و دقیق برای دست‌یابی به پاسخ‌های تقریبی معادله‌های دیفرانسیل مورد توجه قرار می‌گیرد. در نهایت مسئله‌ی شکست سد، با استفاده از تابع شکل شعاعی که در محیط متلب نوشته شده است، به شکل لاگرانژی و با استفاده از روش تصحیح فشار، حل و با نتایج دیگر روش‌ها مقایسه شده‌اند. لازم به یادآوری است، معادله‌ها حاکم بر جریان شامل معادله‌ها بقای جرم و بقای ممنتوم می‌باشند. نتایج به دست آمده نشان‌دهنده‌ی دقت بالای روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی در مدل‌سازی مسئله شکست سد و نیز نبود زمینه نیاز به شبکه‌ی پیش زمینه و سازگاری مناسب با شرایط مرزی است.

کلید واژگان: شکست سد، روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین، مدل‌سازی جریان سیال، تابع پایه شعاعی، دیدگاه لاگرانژی.

۱- مقدمه

با توجه به نیاز روزافزون جهان به منابع آب، تحلیل، طراحی و احداث سدها همچنان از پرکاربردترین دامنه‌ها در علوم مهندسی می‌باشد. در مجموع سدها با ویژگی‌های خاص خود توانسته است هم‌چنان یکی از جمله زمینه‌های پر استفاده از سازه‌های هیدرولیکی باشد.

از جمله پرطرفدارترین روش‌های عددی که برای تحلیل مسئله‌های هیدرولیکی پیشنهاد شده، روش‌های بدون شبکه می‌باشد. در روش بدون شبکه، دامنه و مرزهای سازه با ایجاد گره‌هایی خلق می‌شود. برای برقراری ارتباط بین گره‌ها، از تابع شکل استفاده می‌شود. محاسبه‌ی تابع اولیه، بر مبنا روش انتگرال‌گیری گوس به دو صورت کلی و محلی به کار می‌رود. در

روش کلی به منظور انتگرال‌گیری، نیاز به ایجاد شبکه‌بندی در پس زمینه دامنه مسئله می‌باشد؛ به این سبب این شیوه یک روش بدون شبکه قطعی به شمار نمی‌آید. برای رفع کاستی‌های ناشی از ایجاد شبکه در پس زمینه، روش‌های مبتنی بر شیوه‌ی انتگرال‌گیری به صورت محلی مانند روش بدون شبکه پترو-گلرکین (MLPG) پیشنهاد شده است. پژوهشگران بسیاری با استفاده از این روش، به تحلیل مسئله‌های مختلف هیدرولیکی پرداخته‌اند. شمار روز افزون پژوهش‌ها در این زمینه، نشان از توانمندی منحصر به فرد روش بالا دارد.

برای نخستین بار روش هیدرودینامیک ذرات هموار (SPH)^۱ در مدل کردن پدیده‌های نجومی و مانند آن استفاده شد (Gingold and Monaghan, 1977). از این روش بدون شبکه، برای تحلیل

¹ Smooth Particle Hydrodynamics

جریان سطح آزاد، در مدل‌سازی هیدرولیکی، استفاده شد (Farzin et al., 2014). در این روش، از طرح گسسته سازی جدید سازگار برای مشتقات مکانی مرتبه اول و دوم استفاده شده است. آن‌گاه توسعه‌ی آن در بررسی بال حمله‌ی هواپیما در برابر برخورد با پرند (Pahahnge and Abolbashi, 2016). تحقیق در روش بدون شبکه پس از انتشار روش اجزا پراکنده^۱ (Nayroles et al., 1992) توسعه یافت. چندین روش بعد از آن به نام‌های روش مستقل از جز گلرکین^۲ (EFG) (Belytschko et al., 1994)، روش باز تولید ذرات^۳ (RKPM) (Liu et al., 1995)، روش جداگر اجزا محدود^۴ (PUFEM) (Melenk and Babuska, 1997)، روش اجزای طبیعی^۵ (NEM) (Sukumar et al., 1998)، روش بدون شبکه گلرکین با استفاده از تابع شعاعی^۶ (RBF) (Wendland, 1999)، معرفی شدند. تفاوت عمده این روش‌ها چگونگی تولید و به کار بردن تابع شکل مورد استفاده در روش حل بوده است. هر چند در ظاهر این روش‌ها برای به وجود آوردن تابع‌های شکل و وزن نیاز به شبکه بندی ندارند ولی در مقابل برای انتگرال گیری نیاز به یک شبکه بندی در سایه دارند. پس هیچیک از روش‌های یاد شده، از روش‌های بدون شبکه‌ی واقعی به شمار نمی‌آید.

در سال‌های اخیر، روش بدون شبکه معادله‌ها انتگرالی مرزی^۷ (LBIE) (Zhu et al., 1998) و روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین^۸ (MLPG) (Atluri et al., 1999) که از روش‌های به کل بدون شبکه به شمار می‌آیند، برای حل مسئله‌های خطی و غیر خطی توسط آتلوری معرفی شدند. در ادامه موسوی نژاد و همکاران با استفاده از همین روش به مدل‌سازی دو بعدی رفتار دینامیکی سازه‌های استوانه‌ای با تقارن محوری و طول محدود بر روی مواد هوشمند پرداختند و بدین ترتیب رابطه سازی و کاربرد آن برای بارهای دینامیکی و شتاب پایه نشان دادند (Moussavinezhad et al., 2013a,b). از دیگر سو از روش بدون شبکه اجزای طبیعی برای بررسی و ارزیابی جریان آب در آب‌های کم عمق کمک گرفته شده است (Zounemat-

Kermani and Ghiasi-Tarzi, 2017). همچنین از روش MLPG برای مدل‌سازی جریان سیال بهره گرفته شده است (Amini et al., 2018; Akbarimakoui et al., 2018). از سوی دیگر استفاده از روش نیمه ضمنی ذرات متحرک توسعه یافته در شبیه سازی مدل سازی هیدرولیکی (Arami Fadafan and Hessami Kermani, 2018)، توسعه روش بدون شبکه چندربعی برای حل مسئله شکست سد (Kahid Basiri et al., 2020) و همچنین بررسی شکل متوازن شده الگوی عددی شار متوسط وزن دار برای شبیه‌سازی جریان در کانال‌های روباز (Eslamlooian and Amiri, 2020) از دیگر نمونه‌های انجام گرفته در مدل‌سازی هیدرولیکی جریان می‌باشد. از دیگر روش‌های به کار رفته در مطالعه شکست سد می‌توان به روش به نسبت نوین ایزوژئومتریک اشاره کرد که آمینی و همکاران از آن در سال‌های گذشته بهره جستند (Amini et al., 2016). یو و همکاران با روش بدون شبکه شکست سد را در دو حالت پایه خشک و تر تحلیل کردند (Ye et al., 2020). معادله فشار پواسون بر مبنای مدل لاپلاس بهبود یافته با روش نیمه ضمنی ذرات متحرک توسط ژو و جین حل شد (Xu and Jin, 2019). تحلیل عددی بر روی پارامترهای موثر بر شکست سد (Yang et al., 2018) توسط یانگ و همکاران انجام پذیرفت. از طریق شبیه سازی های عددی، آزمایش‌ها و قانون‌های مقیاس سازی، مسئله شکست سد برای مواد ویسکوپلاستیک (Valette et al., 2021) تحلیل شد.

در این تحقیق در آغاز به بیان و معرفی روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین پرداخته می‌شود و پس از آن با استخراج معادله‌ها بقای جرم و ممنتوم جریان سیال با دیدگاه لاگرانژی در مسئله شکست سد، سعی شده است با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی معادله‌ها استخراج شده رابطه‌سازی شود. روش باقی مانده وزنی به عنوان یک روش کارآمد و سودمند برای دستیابی به پاسخ‌های تقریبی معادله‌های دیفرانسیل معمولی^۹ و جزئی^{۱۰} در روش‌های

۱ Diffuse Elements Method
 ۲ Element Free Galerkin
 ۳ Reproducing Kernel Particle Method
 ۴ Partition of Unity Finite Element Method
 ۵ Natural Element Method
 ۶ Meshless Galerkin method using Radial Basis function

⁷ Meshless Local Boundary Integral Equation

⁸ Meshless Local Petrov-Galerkin method

⁹ Ordinary differential equation

¹⁰ Partial differential equation

می‌کند. از این رو، باید میزان باقی‌مانده ناشی از تقریب تابع میدان را به حداقل ممکن رسانید. این کار با برابر شدن مجموع میزان انتگرال باقی‌مانده‌های وزن‌دار در دامنه و بر روی مرزهای مسئله امکان پذیر خواهد بود (رابطه (۳)).

$$\int_{\Omega} \widehat{W}_i R_{\Omega} d\Omega + \int_{\Gamma} \widehat{V}_i R_{\Gamma} d\Gamma = 0 \quad (3)$$

$i = 1, 2, \dots, n$

در این رابطه \widehat{W}_i و \widehat{V}_i به ترتیب به عنوان تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی R_{Ω} و R_{Γ} به شمار می‌آید.

با بهره جویی از رابطه (۲)، همچنین قرار دادن آن در رابطه (۳) و بسط آن رابطه (۴) به دست می‌آید. رابطه (۴) یک دستگاه n معادله‌ای با n مجهول (ضرایب ثابت در بردار α) را نشان می‌دهد.

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \widehat{W}_1 (D(P^T \alpha) - f) d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \widehat{V}_1 (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \\ \int_{\Omega} \widehat{W}_2 (D(P^T \alpha) - f) d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \widehat{V}_2 (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \widehat{W}_n (D(P^T \alpha) - f) d\Omega \\ + \int_{\Gamma} \widehat{V}_n (B(P^T \alpha) - g) d\Gamma = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

در این معادله‌ها پس از تعیین تابع شکل انتگرال‌گیری انجام می‌شود. انتخاب تابع شکل مناسب بر پایه توزیع گره‌های اختیاری در درون دامنه‌ی سازه یکی از مهم‌ترین مسئله‌هایی است که در پیش روی روش بدون شبکه است. به همین سبب بدون داشتن یک تابع شکل مناسب، روش بدون شبکه دارای کارآمدی لازم نخواهد بود. تابع میدان در روش بدون شبکه با بهره جویی از میزان تابع میدان در گره‌های واقع شده در دامنه‌ی تحت پوشش^۱ تعریف می‌شود. با استفاده از رابطه (۵) می‌توان تابع میدان را تقریب زد.

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^k \varphi_i(x) u_i = \Phi^T(x) \times U_s \quad (5)$$

بدون شبکه‌بندی مورد توجه قرار می‌گیرد. با استفاده از تابع شکل شعاعی، میزان سرعت و فشار بین گره‌ها در دامنه جریان تقریب زده می‌شود. یک مثال عددی با استفاده از این روش بررسی شده و با نتایج به دست آمده از روش‌های حداقل مربعات و ایزوژئومتری یک مقایسه شده است.

از دیگی نوآوری‌های این تحقیق می‌توان به استفاده از تابع پایه شعاعی از نوع چند ضلعی و گوسی برای تقریب تابع میدان و حل معادله پواسن در حالت خاص به منظور صحت‌سنجی و نیز مدل‌سازی شکست سد به روش بدون شبکه و مقایسه‌ی آن با روش تحلیلی و دیگر روش‌های عددی اشاره کرد. از سوی دیگر بهره‌گیری از روش محلی انتگرال‌گیری برای محاسبه تابع‌های اولیه، از نوآوری‌های این مجموعه می‌باشد.

۲- مواد و روش‌ها

به طور کلی، معادله‌ها دیفرانسیل مبنایی حاکم بر رفتار سازه‌ها و شاره‌ها در درون دامنه (Ω) و بر روی مرزهای آن (Γ)، به صورت رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$D(u) - f = 0 \quad (a-1)$$

$$B(u) - g = 0 \quad (b-1)$$

در این رابطه‌ها u تابع میدان (پاسخ)، D و B عملگر دیفرانسیلی و f و g تابع نیرویی می‌باشند.

دست‌یابی به میزان دقیق تابع میدان (u) دشوار است. از رابطه (۲) می‌توان برای تقریب‌زدن تابع میدان استفاده کرد:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n p_i(x) \alpha_i = P^T \alpha \quad (2)$$

در این رابطه، $u^h(x)$ تابع میدان تقریبی، P بردار عضوهای چندجمله‌ای و α بردار ضرایب چندجمله‌ای می‌باشد. به طور معمول برای برقراری رابطه (۲) شمار عضوهای چندجمله‌ای (n) به کار رفته دارای شمار محدودی است، از این رو، تابع میدان به صورت تقریبی به دست می‌آید. بنا بر این حل معادله‌ی حاکم بر مسئله دارای باقی‌مانده‌ی R_{Ω} در درون دامنه و R_{Γ} بر روی مرزها خواهد بود. در روش باقی‌مانده وزنی با توجه به چگونگی انتخاب تابع تقریبی، میزان باقی‌مانده‌ی R_{Ω} و R_{Γ} در مسئله تغییر

¹ Support domain

پایه‌ای دو روش ابداع شده است. روش درون‌یابی نقطه‌ها از تابع‌های چند جمله‌ای^۱ (Liu and Gu, 2001) و تابع‌های شعاعی^۲ (Liu and Gu, 2001) برای تقریب تابع میدان استفاده می‌کند.

در ادامه‌ی این روش از تابع‌های چند جمله‌ای به عنوان تابع‌های پایه‌ای استفاده می‌شود. با جای‌گذاری تابع چند جمله‌ای در رابطه (۶)، رابطه حاکم بر این روش به دست می‌آید (رابطه (۷)).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n P_i(x) a_i(x_Q) \quad (7)$$

در این حالت شمار ضرایب مجهول a_i با شمار گره‌های درون دامنه برابر می‌باشد. با قرار دادن مقدارهای گره‌ی، می‌توان ضرایب مجهول را با استفاده از رابطه‌های (۸) تا (۱۱) به دست آورد.

$$U_s = P_Q \times a \quad (8)$$

$$U_s = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n] \quad (9)$$

$$P_Q = [p^T(x_1) \ p^T(x_2) \ \dots \ p^T(x_n)] \quad (10)$$

$$a = P_Q^{-1} \times U_s \quad (11)$$

با قرار دادن رابطه (۱۱) در رابطه (۸)، تابع شکل به صورت رابطه (۱۲) به دست می‌آید.

$$\Phi = P^T(x) P_Q^{-1} \quad (12)$$

از جمله امتیازهای استفاده از تابع شکل بر پایه چند جمله‌ای‌ها، می‌توان به سادگی و دقت مناسب روش اشاره نمود.

از سوی دیگر با افزایش شمار گره‌ها، می‌توان هر مرتبه‌ای از تابع شکل مورد نیاز را ایجاد کرد؛ اما به رغم مزیت‌های یاد شده در بالا، در برخی حالت‌ها ماتریس P_Q در رابطه (۱۲) ویژه می‌شود. برای رفع این مسئله، از روش درون‌یابی نقطه‌ها بر پایه تابع‌های شعاعی بهره جسته می‌شود. (رابطه (۱۳)).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n R_i(x) a_i(x_Q) \quad (13)$$

$$= R^T a(x_Q)$$

$$R^T(x) = [R_1(x) \ R_2(x) \ \dots \ R_n(x)] \quad (14)$$

R_i در رابطه (۱۴) تابع پایه شعاعی است. در جدول ۱ چهار تابع پایه شعاعی پر کاربرد ارائه شده است (Hardy, 1990)، (Onate et al., 1996) و (Liu and Gu, 2005).

در این رابطه k شمار گره‌هایی است که در دامنه تحت پوشش واقع شده‌اند، u_i و $\varphi_i(x)$ به ترتیب تابع میدان و تابع شکل در i امین نقطه در درون دامنه تحت پوشش و U_s و $\Phi^T(x)$ به ترتیب بردار تغییر مکان و بردار تابع شکل می‌باشند. در شکل ۱ نمونه‌ای از دامنه‌های تحت پوشش مورد استفاده در روش بدون شبکه برای ساخت تابع‌های شکل نشان داده شده است.

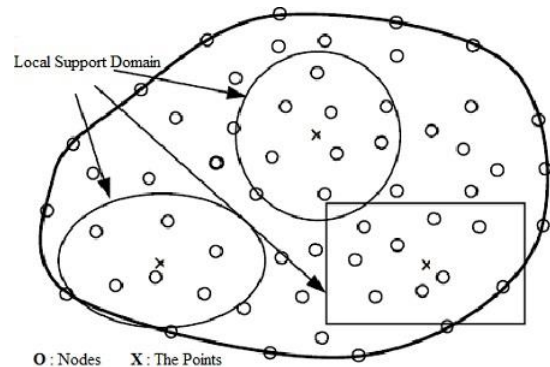


Fig. 1 Support domain in MLPG

شکل ۱ دامنه‌های تحت پوشش در روش بدون شبکه (Akbarmakoui et al., 2018)

همان طوری که در شکل ۱ دیده می‌شود، دامنه‌ی تحت پوشش می‌تواند به صورت مستطیل، دایره و بیضی انتخاب شود. اندازه دامنه‌ی تحت پوشش، برای دست‌یابی به پاسخ دقیق دارای اهمیت ویژه‌ای است.

روش درون‌یابی نقطه‌ها یکی از ابزار تقریب تابع میدان در روش بدون شبکه به شمار می‌آید. این روش توسط لیو و ژئو (Liu and Gu, 2001) برای ساخت تابع‌های شکل با بهره‌جویی از پراکنش اختیاری گره‌ها در درون دامنه‌ی مسئله پیشنهاد شد. در روش درون‌یابی نقطه‌ها، تابع $u(x)$ را با استفاده از مقدارهای گره‌ی در دامنه و نقطه‌ی مورد نظر Ω_Q درون‌یابی می‌کنند (رابطه (۱۶)).

$$u^h(x, x_Q) = \sum_{i=1}^n B_i(x) a_i(x_Q) \quad (16)$$

در این رابطه $B_i(x)$ تابع پایه‌ای تعریف شده در مسئله پیرامون فضای دکارتی $X^T = [x, y, z]$ شمار گره‌های قرار گرفته در دامنه‌ی تحت پوشش x_Q و $a_i(x_Q)$ ضریب تابع پایه‌ای $B_i(x)$ است. در روش درون‌یابی نقطه‌ها بر مبنای چگونگی انتخاب تابع

² Radial point interpolation method

¹ Polynomial point interpolation methods

در اینجا ρ^n و ρ^{n+1} به ترتیب چگالی در زمان‌های t و $t+1$ و همچنین ρ^* چگالی در مرحله حدس می‌باشد. به همین ترتیب برای ترم مشتق مادی سرعت در قسمت گسسته‌سازی، رابطه (۲۰) بوجود می‌آید:

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \frac{u^{n+1} - u^* + u^* - u^n}{\Delta t} = \frac{\Delta u + \Delta u^*}{\Delta t} \quad (20)$$

که در اینجا u^n و u^{n+1} به ترتیب سرعت در زمان‌های t و $t+1$ و همچنین u^* سرعت در مرحله حدس می‌باشد. به همین ترتیب برای ترم مشتق مادی سرعت در قسمت گسسته‌سازی به‌دست خواهد آمد:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho + \Delta \rho^*}{\Delta t} = -\nabla \cdot (u^{n+1} - u^* + u^*) \quad (21)$$

$$\frac{\Delta u + \Delta u^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} - g \quad (22)$$

با استفاده از روش نیمه ضمنی حدس و تصحیح رابطه‌های (۲۱) و (۲۲) و بسط آن‌ها، به رابطه‌های (۲۳) و (۲۴) و رابطه‌های (۲۵) و (۲۶) تبدیل می‌شود.

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = -\nabla u^* \quad (23)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho^*}{\Delta t} = -\nabla u \quad (24)$$

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla \bar{P} \quad (25)$$

$$\frac{\Delta u^*}{\Delta t} = -g \quad (26)$$

۴-۳- اصلاح مرحله‌های حدس و اصلاح

بر مبنای رابطه‌ی (۲۶) و همچنین تعریف رابطه‌های (۲۰) و (۲۱) به دست می‌آید (Amini et al., 2016) و (Shobeyri and Afshar, 2010):

$$\Delta u^* = -g \cdot \Delta t \quad (27)$$

$$u^* = u^t + \Delta u^* \quad (28)$$

$$r^* = r^t + u^* \Delta t \quad (29)$$

جدول ۱ تابع‌های پایه شعاعی

Table 1 Radial point interpolation method functions

Effective variable	Formula	Shape functions
$\alpha_c \geq 0, q$	$R_i(x, y) = (r_i^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q$	Multiquadric
α_c	$R_i(x, y) = \exp(-\alpha_c (\frac{r_i}{d_c}))^q$	Gaussian
η	$R_i(x, y) = r_i^\eta$	Thin plate spline
η	$R_i(x, y) = r_i^\eta \log r_i$	Logarithmic

۳-۳- رابطه سازی معادله‌ی حاکم

۳-۱- معادله‌ها حاکم بر جریان

در این معادله‌ها بقای جرم و ممنتوم حاکم بر جریان سیال غیر لزج در مسئله شکست سد به صورت رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) بیان می‌شود (Amini, Maghsoodi et al., 2016):

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \bar{u} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P - \bar{g} = 0 \quad (16)$$

که در آن \bar{u} بردار سرعت، P فشار، \bar{g} بردار شتاب جاذبه، چگالی و $\frac{D}{Dt}$ عملگر مشتق مادی می‌باشد.

۳-۲- شرایط مرزی

برای فشار دو نوع شرایط مرزی متمایز در مسئله‌های سطح آزاد وجود دارد. نخستین شرط فشار اتمسفر روی سطح آزاد شرط دریشله و دومین شرط روی سطح دیوار شرط نیومن می‌باشد این دو شرط به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$P = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial P}{\partial n} = 0 \quad (18)$$

۳-۳- گسسته سازی زمانی

بر مبنای رویکرد زینکوویچ و کادینا (Zienkiewicz and Codina, 1995) گسسته‌سازی زمانی برای ترم مشتق مادی چگالی به صورت رابطه (۱۹) انجام می‌پذیرد.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\rho^{n+1} - \rho^n}{\Delta t} = \frac{\rho^{n+1} - \rho^* + \rho^* - \rho^n}{\Delta t} = \frac{\Delta \rho + \Delta \rho^*}{\Delta t} \quad (19)$$

رابطه‌ی (۳۶) به دست می‌آید.

$$\int_{\Omega_Q} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} + W \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega - \int_{\Gamma_Q} \left(W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma = 0 \quad (36)$$

دامنه کلی (Ω) مسئله به چندین دامنه کوچک برای انتگرال گیری قسمت می‌شود. Ω_Q دامنه انتگرال گیری برای گره I است. با استفاده از قضیه دایورژانس و تقسیم مرزها به صورت $\Gamma_Q = \Gamma_{Qi} \cup \Gamma_{Qu} \cup \Gamma_{Qt}$ معادله (۳۶) بدین صورت در می‌آید (رابطه (۳۷)).

$$\int_{\Omega_Q} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_i} \left(W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \left(W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_t} \left(W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \left(W \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega \quad (37)$$

با تعریف تابع شکل بر مبنای تابع پایه شعاعی به دست می‌آید (رابطه (۳۸)).

$$P^{t+1} = \sum_{i=1}^{\infty} N_i P^{t+1} \quad (38)$$

با جایگذاری تابع شکل در رابطه‌ی (۳۷)، رابطه‌ی (۳۸) به دست می‌آید:

$$\int_{\Omega_Q} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Omega - \int_{\Gamma_i} \left(W n_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + W n_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \left(W n_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + W n_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Gamma \Big] P^{n+1} = \int_{\Gamma_t} \left(W n_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + W n_y \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \left(W \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega \quad (39)$$

که در اینجا u^t و r^t به ترتیب سرعت و موقعیت ذره در زمان t ، u^* سرعت موقت ذره و Δu^* تغییر سرعت در مرحله حدس می‌باشد.

بر مبنای رابطه‌ی (۲۵) و در مرحله دوم که مرحله تصحیح نامیده می‌شود، عبارت فشار برای محاسبه تغییر پذیری‌های اصلاحی در سرعت ذره به کار برده می‌شود:

$$\Delta \dot{u} = \frac{1}{\rho} \nabla P^{n+1} \Delta t \quad (30)$$

$$u^{n+1} = u^* + \Delta \dot{u} \quad (31)$$

که در اینجا $\Delta \dot{u}$ تغییر سرعت ذره در طی مرحله تصحیح، P^{n+1} فشار در زمان $t+1$ می‌باشد. در ادامه با استفاده از رابطه‌های (۲۳) و (۲۴) و به منظور محاسبه‌ی $\Delta \dot{u}$ ، رابطه‌ی (۳۲) به دست می‌آید:

$$\nabla^2 P^{t+1} = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot u^* \quad (32)$$

در نهایت برای محاسبه‌ی سرعت جدید ذرات می‌توان از رابطه‌های (۳۰) و (۳۱) استفاده کرد. موقعیت جدید ذرات به صورت رابطه‌ی (۳۳) محاسبه می‌شود:

$$r^{t+1} = r^t + \frac{u^{t+1} + u^t}{2} \Delta t \quad (33)$$

که r^t موقعیت ذره در زمان t و r^{t+1} در زمان $t+1$ می‌باشند.

۳-۵- محاسبه‌ی گام زمانی

پایداری حل گام زمانی در هر مرحله باید کنترل شود. بدین منظور از تعریف شرایط کورانت استفاده می‌شود (Shao and Lo, 2003).

$$\Delta t \leq 0.1 \frac{l_0}{u_{max}} \quad (34)$$

در اینجا l_0 فاصله‌ی نخستین ذره و u_{max} بیشینه سرعت ذره در محاسبات است.

۳-۶- رابطه سازی بدون شبکه

برای دو طرف معادله (۳۲) را در تابع وزن ضرب کرده و پس از انتگرال گیری رابطه (۳۵) به دست خواهد آمد.

$$\int W \left(\frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P^{n+1}}{\partial y^2} - \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega = 0 \quad (35)$$

اینجا W تابع وزن است. در ادامه با انتگرال گیری جز به جز

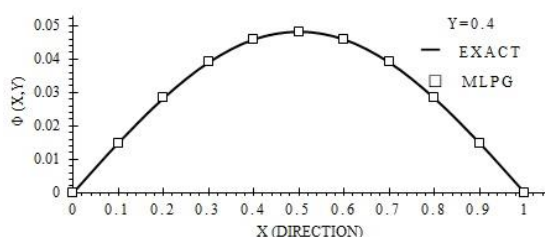


Fig. 3 MLPG solution and exactly solution in $Y=0.4$
 شکل ۳ مقایسه نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG در $Y=0.4$

جدول ۲ مقایسه نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG و خطای آن

Table 2 Comparing between obtain result from MLPG method and exact solutions

ϕ			ϕ			X
y=0.4			y=0.2			
%Er	MLPG	Exact	%Er	MLPG	Exact	
0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	0.0
0.456	0.0148	0.0149	0.370	0.0092	0.0092	0.1
0.120	0.0283	0.0283	0.389	0.0174	0.0175	0.2
0.349	0.0389	0.039	0.140	0.0242	0.0242	0.3
0.074	0.0459	0.0459	0.121	0.0283	0.0283	0.4
0.071	0.0482	0.0482	0.114	0.0299	0.0298	0.5
0.074	0.0459	0.0459	0.124	0.0282	0.0283	0.6
0.436	0.0388	0.039	0.143	0.0242	0.0242	0.7
0.240	0.0282	0.0283	0.389	0.0174	0.0175	0.8
0.456	0.0148	0.0149	0.370	0.0092	0.0092	0.9
0.000	0.0000	0.0000	0.000	0.0000	0.0000	1.0

پس از انجام صحت سنجی، بررسی سطح جریان آب در مسئله شکست سد مورد بررسی قرار می‌گیرد. هندسه مسئله شکست سد در شکل ۴ نشان داده شده است (Nithiarasu, 2005):

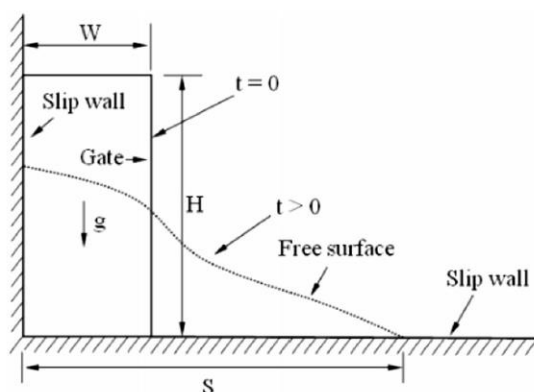


Fig. 4 Schematic of broken dam problem
 شکل ۴ هندسه مسئله شکست سد

ارتفاع اولیه ستون آب را ۰/۲ متر و عرض آن را ۰/۱ متر در نظر گرفته شده است. در این بخش به بررسی نتایج مدل سازی جریان آب در مسئله شکست سد با استفاده از روش بدون شبکه محلی

$$\int_{\Gamma_t} \left(W n_x \frac{\partial P^{n+1}}{\partial x} + W n_y \frac{\partial P^{n+1}}{\partial y} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_Q} \left(W \frac{\rho^*}{\Delta t} \nabla u^* \right) d\Omega$$

۴- نتایج و مشاهدات

به منظور صحت سنجی روش MLPG در این تحقیق، در آغاز با استفاده از این روش یک حالت خاص معادله پواسن (رابطه (۴۰)) مورد حل قرار می‌گیرد. از آنجاییکه این معادله دارای حل تحلیلی می‌باشد لذا پاسخ‌های ناشی از مدلسازی با پاسخ‌های تحلیلی مقایسه می‌شود. در حالت خاص فرض می‌شود:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

$$0 \leq x, y \leq 1$$

$$B.C.: \phi = 0 \text{ if } x = 0, \quad (40)$$

$$\phi = 0 \text{ if } x = 1,$$

$$\phi = 0 \text{ if } y = 0,$$

$$\phi = 0 \text{ if } y = 1$$

پاسخ تحلیلی عبارت است از (رابطه (۳۹)):

$$\phi^{\text{exact}} = -\frac{1}{2\pi^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (41)$$

پاسخ حل مسئله، با استفاده از روش بدون شبکه و تحلیلی در دو حالت به صورت زیر ارائه شده است (شکل ۲ و ۳):

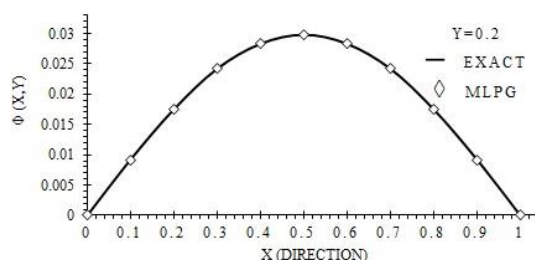


Fig. 2 MLPG solution and exactly solution in $Y=0.2$
 شکل ۲ مقایسه ی نتایج تحلیلی و عددی به روش MLPG در $Y=0.2$

از مقایسه پاسخ‌ها در دو روش تحلیلی و بدون شبکه با یکدیگر می‌توان به دقت بسیار بالای روش بدون شبکه پی برد. در جدول ۲ میزان‌ها تحلیلی، عددی و خطای به دست آمده نشان داده شده است.

از مقایسه‌ی پروفیل سطح آزاد بین دو روش ایزوژئومتریکی و حداقل مربعات بدون شبکه به آسانی می‌توان متوجه شد روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی به علت دقت بالا در ایجاد ارتباط با گره‌ها، سطح آزاد را با دقت بسیار بالاتری نمایش می‌دهد، از سوی دیگر به علت ماهیت نزدیک به یکدیگر روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین و روش بدون شبکه حداقل مربعات به کل آشکار است که نتایج دارای همخوانی مناسبی می‌باشند.

در ادامه بردارهای سرعت در شکل‌های ۷ تا ۹ آمده است. از سوی دیگر همان طور که میدان سرعت بر حسب متر بر ثانیه در شکل‌های ۷ تا ۹ آمده است، سرعت جریان آب منتج از نتایج روش بدون شبکه با تابع پایه تابع شعاعی چند جمله‌ای در زمان ۰/۱۵ ثانیه در مسئله در مقایسه با روش حداقل مربعات (Shobeyri and Afshar, 2010) و ایزوژئومتریکی (Amini et al., 2016) قابل مشاهده و مقایسه می‌باشد.

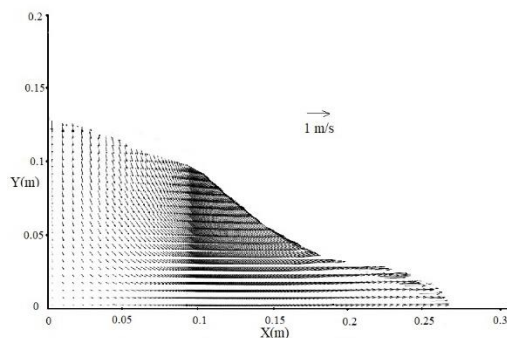


Fig. 7 The velocity field by MLPG method at times 0.15s
شکل ۷ بردار سرعت در روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی در $t=0.15s$

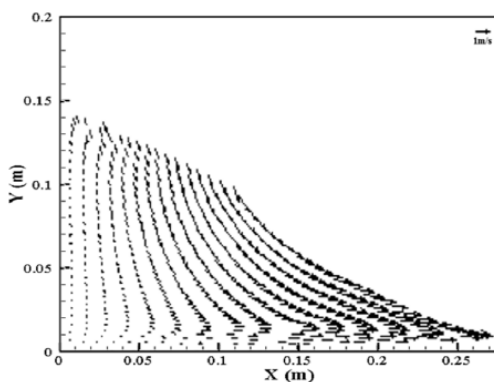


Fig. 8 The velocity field by DLMS method at times 0.15s
شکل ۸ بردار سرعت در روش بدون شبکه حداقل مربعات در $t=0.15s$ (Shobeyri and Afshar, 2010)

پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی پرداخته می‌شود و آن‌گاه مقایسه آن با نتایج روش ایزوژئومتریکی (Amini et al., 2016) و بدون شبکه حداقل مربعات (Shobeyri and Afshar, 2010) صورت می‌پذیرد. بدین منظور سطح آزاد آب به دست آمده از نتایج روش بدون شبکه بر پایه تابع شعاعی چند جمله‌ای در شکل‌های ۵ و ۶ آمده است. همچنین با سطح سیال با روش حداقل مربعات و ایزوژئومتریکی مقایسه شده است. این امر در زمان‌های ۰/۱ و ۰/۱۵ ثانیه و در مسئله با ابعاد شکل ۴ با گره‌های منظم صورت پذیرفته است.

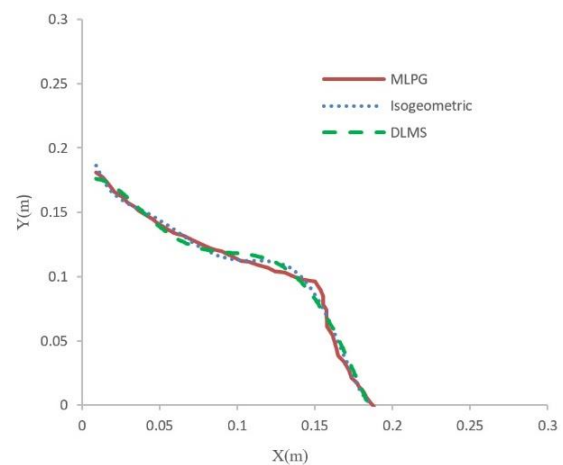


Fig. 5 The free surface computed by MLPG, Isogeometric and DLMS method at times 0.1s
شکل ۵ مقایسه‌ی پروفیل سطح آزاد بین روش‌های ایزوژئومتریکی، حداقل مربعات و بدون شبکه در $t=0.1s$

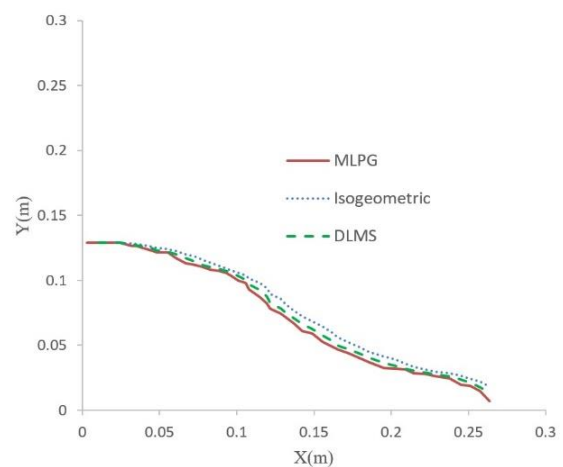


Fig. 6 The free surface computed by MLPG, Isogeometric and DLMS method at times 0.15s
شکل ۶ مقایسه‌ی پروفیل سطح آزاد بین روش‌های ایزوژئومتریکی، حداقل مربعات و بدون شبکه در $t=0.15s$

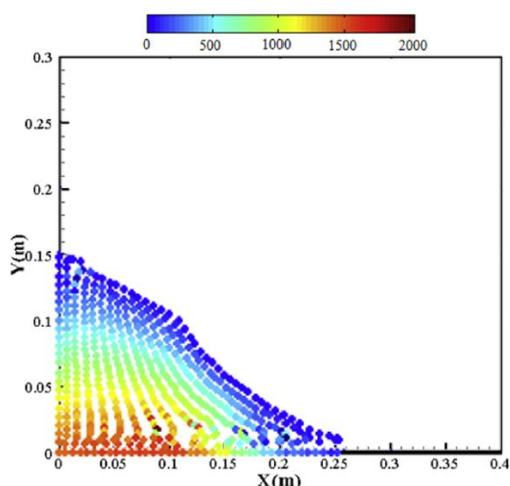


Fig. 11 The pressure field by DLMS method at times 0.15s

شکل ۱۱ تراز فشار در روش بدون شبکه حداقل مربعات در (Shobeyri and Afshar, 2010) $t=0.15s$

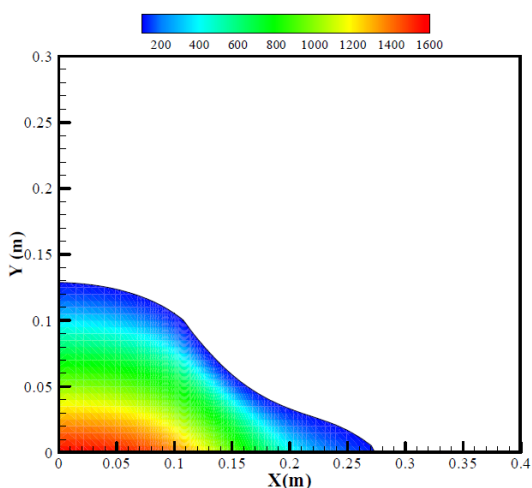


Fig. 12 The pressure field by Isogeometric method at times 0.15s

شکل ۱۲ تراز فشار در روش ایزوژئومتریک در (Amini et al., 2016) $t=0.15s$

(Shobeyri and Afshar, 2010) و ایزوژئومتریک (Amini, 2016) دارای همخوانی مناسبی می‌باشد.

۵- نتیجه گیری

در این بررسی، در در آغاز روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین معرفی شد. به منظور صحت‌سنجی نتایج، یک حالت خاص از معادله پواسن مورد مدل‌سازی قرار گرفت. خطای مدل‌سازی به روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین کمتر از ۰/۵ درصد به‌دست آمد. آن‌گاه با استخراج معادله‌ها بقای جرم و ممنتوم جریان سیال با دیدگاه لاگرانژی در مسئله شکست سد، سعی

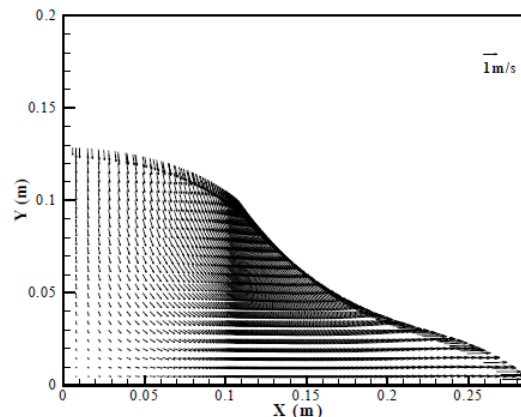


Fig. 9 The velocity field by Isogeometric method at times 0.15s

شکل ۹ بردار سرعت در روش ایزوژئومتریک در $t=0.15s$ (Amini et al., 2016)

همان طور که قابل پیش بینی بود در قسمت پنجه‌ی جریان، عمده جهت جریان به صورت افقی می‌باشد و در قسمت بالایی پاشنه بردار سرعت‌ها در جهت قائم قرار گرفته است.

در نهایت، میدان فشار به دست آمده از نتایج روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین در زمان ۰/۱۵ ثانیه در مسئله در مقایسه با روش حداقل مربعات (Shobeyri and Afshar, 2010) و ایزوژئومتریک (Amini et al., 2016) بر حسب پاسکال در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ قابل مشاهده می‌باشد.

همان طور که در شکل‌های ۱۰ تا ۱۲ مشاهده شد، فشار آب به‌دست آمده از نتایج روش بدون شبکه محلی بر تابع پایه تابع شعاعی چند جمله‌ای در زمان ۰/۱۵ ثانیه در مسئله که بر حسب پاسکال بیان شده است در مقایسه با روش‌های حداقل مربعات

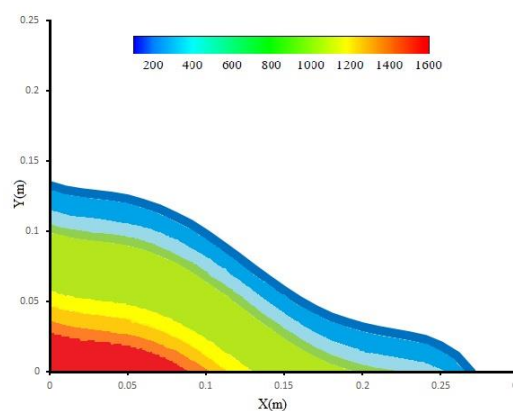


Fig. 10 The pressure field by MLPG method at times 0.15s

شکل ۱۰ تراز فشار در روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی در $t=0.15s$

\hat{W}_i	تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی برای R_Ω
\hat{V}_i	تابع‌های وزن برای باقی‌مانده وزنی برای R_Γ
k	شمار گره‌هایی است که در دامنه تحت پوشش واقع شده‌اند.
u_i	تابع میدان در i آمین نقطه در درون دامنه تحت پوشش
$\varphi_i(x)$	تابع شکل در i آمین نقطه در درون دامنه تحت پوشش
U_s	بردار تغییر مکان
$\Phi^T(x)$	بردار تابع شکل
$B_i(x)$	تابع پایه‌ای تعریف شده در مسئله پیرامون فضای دکارتی $X^T = [x, y, x]$
$a_i(x_Q)$	ضریب تابع پایه‌ای
$R_i(x)$	تابع پایه شعاعی
P	فشار ($\text{kgm}^{-1}\text{s}^{-2}$)
g	شتاب جاذبه (ms^{-2})
\bar{u}	بردار سرعت (ms^{-1})
H	ارتفاع ستون آب اولیه (m)
W	عرض ستون آب اولیه (m)
α	ضرایب چندجمله‌ای
ρ	چگالی (kgm^{-3})
v	لزجت سینماتیکی (m^2s^{-1})
$\frac{D}{Dt}$	عملگر مشتق مادی
ρ^*	چگالی در مرحله حدس (kgm^{-3})
$\Delta\rho^*$	تغییرات چگالی در مرحله حدس (kgm^{-3})
$\Delta\rho$	تغییرات چگالی در مرحله تصحیح (kgm^{-3})
u^*	سرعت در مرحله حدس (ms^{-1})
Δu^*	تغییرات سرعت در مرحله حدس (ms^{-1})
Δu	تغییرات سرعت در مرحله تصحیح (ms^{-1})
l_0	فاصله‌ی نخستین ذره (m)
u_{max}	بیشینه سرعت ذره در محاسبات (ms^{-1})

۷- منبع‌ها

Akbarimakoui, M., Amini, R. and Mosavi Nezhad, S.M. (2018). Fluid flow modeling using meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method by Radial

شد با استفاده از روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین بر پایه تابع شعاعی رابطه‌سازی شود. روش باقی مانده وزنی به عنوان یک روش کارآمد و سودمند برای دستیابی به پاسخ‌های تقریبی معادله‌های دیفرانسیل معمولی ۱ و جزئی ۲ در روش‌های بدون شبکه‌بندی توجه می‌شود. با استفاده از تابع شکل شعاعی، میزان سرعت و فشار بین گره‌ها در دامنه جریان تقریب زده می‌شود. یک مثال عددی با استفاده از این روش بررسی و با نتایج حاصل از روش‌های حداقل مربعات و ایزوژئومتریک مقایسه شد. نتایج به دست آمده دارای هم‌خوانی بسیار مناسبی در مقایسه با روش‌های حداقل مربعات و ایزوژئومتریک است.

با توجه به مدل‌سازی جریان سیال در مسئله شکست سد، مشخص شد که روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین ابزاری است که در مدل‌سازی مسئله‌های با شرایط مرزی متغیر بسیار کاربردی است، زیرا تنها با تولید نقطه‌ها در هر مرحله و تحلیل با شرایط مرزی جدید، بدون نگرانی از ارتباط بین گره‌ها و رعایت پیوستگی بین آن‌ها، مدل‌سازی در کمترین زمان ممکن انجام می‌شود. مدل‌سازی چنین مسئله‌هایی به کمک دیگر روش‌ها مانند روش اجزاء محدود پیچیده بوده زیرا با کوچکترین تغییر در شرایط مرزی، شبکه بندی مسئله به یک امر زمان‌بر و پیچیده تبدیل می‌شود. از طرف دیگر در مسئله‌های با مرزهای غیرمسطح ایجاد المان‌هایی که از نظر شکل و ظاهر متناسب با فرضیه‌های روش اجزاء محدود باشد پیچیده بوده در حالی که در روش پیشنهادی این مسئله به آسانی قابل رفع می‌باشد. به طور کلی روش بدون شبکه محلی پترو-گلرکین یک طرح هوشمند در حل مسئله‌های شرایط هندسی متغیر است.

۶- فهرست نشانه‌ها

D و B	عملگر دیفرانسیلی
f و g	تابع نیرویی
$u^h(x)$	تابع میدان تقریبی
P	بردار عضوهای چندجمله‌ای
n	شمار عضوهای چندجمله‌ای
R_Ω	باقی‌مانده‌ی مسئله در درون دامنه
R_Γ	باقی‌مانده‌ی مسئله بر روی مرزها

² Partial differential equation

¹ Ordinary differential equation

- Liu, G.-R. and Gu, Y. (2001). A point interpolation method for two-dimensional solids. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4), 937-951.
- Liu, G. and Gu, Y. (2001). A local radial point interpolation method (LRPIM) for free vibration analyses of 2-D solids. *Journal of Sound and vibration*, 246(1), 29-46.
- Liu, W.K., Jun, S. and Zhang, Y.F. (1995). Reproducing kernel particle methods. *International journal for numerical methods in fluids* 20(8-9), 1081-1106.
- Melenk, J. and Babuska, I. (1997). Approximation with harmonic and generalized harmonic polynomials in the partition of unity method. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences*, 4, 607-632.
- Moussavinezhad, S., Shahabian, F. and Hosseini, S. M. (2013a). Two-dimensional elastic wave propagation analysis in finite length FG thick hollow cylinders with 2D nonlinear grading patterns using MLPG method. *CMES Comput. Model. Eng. Sci*, 91, 177-204.
- Moussavinezhad, S., Shahabian, F. and Hosseini, S. M. (2013b). Two-dimensional stress-wave propagation in finite-length FG cylinders with two-directional nonlinear grading patterns using the MLPG method. *Journal of Engineering Mechanics*, 140(3), 575-592.
- Nayroles, B., Touzot, G. and Villon, P. (1992). Generalizing the finite element method: diffuse approximation and diffuse elements. *Computational mechanics*, 10(5), 307-318.
- Nithiarasu, P. (2005). An arbitrary Lagrangian Eulerian (ALE) formulation for free surface flows using the characteristic-based split (CBS) scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48(12), 1415-1428.
- Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O. and Taylor, R. (1996). A finite point method in computational mechanics. Applications to convective transport and fluid flow. *International journal for numerical methods in engineering*, 39(22), 3839-3866.
- Pahange, H. and Abolbashiri, M. (2016). Simulation, analysis and optimization of airplane wing leading edge structure against bird strike.
- Shao, S. and Lo, E.Y. (2003). Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Basis Function. *Journal of Hydraulics*, 13(3), 95-106. (in Persian).
- Amini, R., Maghsoodi, R. and Moghaddam, N. (2016). Simulating free surface problem using isogeometric analysis. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(2), 413-421.
- Amini, R., Akbarimakoui, M. and Mosavi Nezhad, S.M. (2018). Fluid flow modeling in channel using meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method by Radial Basis Function. *Modares Mechanical Engineering*, 18(8), 241-249. (in Persian).
- Arami Fadafan, M. and Hessami Kermani, M.-R. (2018). Moving particle semi-implicit method with improved pressures stability properties. *Journal of Hydroinformatics*, 20(6), 1268-1285.
- Atluri, S.N., Kim, H.-G. and Cho, J.Y. (1999). A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG), and local boundary integral equation (LBIE) methods. *Computational mechanics* 24(5), 348-372.
- Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. (1994). Element-free Galerkin methods. *International journal for numerical methods in engineering*, 37(2), 229-256.
- Eslamlooian, A. and Amiri, S.M. (2020). Evaluation of well-balanced form of Weighted Average Flux scheme for simulation of flow in open channels. *Journal of Hydraulics*, 15(1), 143-155. (in Persian).
- Farzin, S., Hassanzadeh, Y., Alami, M.T. and Fatehi, R. (2014). An Implicit Incompressible SPH Method for Free Surface Flow Problems. *Modares Mechanical Engineering*, 14(4), 99-110. (in Persian).
- Gingold, R.A. and Monaghan, J.J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 181(3), 375-389.
- Hardy, R.L. (1990). Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method 20 years of discovery 1968-1988. *Computers & Mathematics with Applications*, 19(8-9), 163-208.
- Kahid Basiri, H., Babaei, R., Fallah, A. and Jabbari, E. (2020). Development of multiquadric method for solving dam break problem. *Journal of Hydraulics*, 14(4), 83-98. (in Persian).
- Liu, G.-R. and Gu, Y.-T. (2005). *An introduction to meshfree methods and their programming*, Springer Science & Business Media.

Newtonian flows with a free surface. *Advances in water resources*, 26(7), 787-800.

Shobeyri, G. and Afshar, M. (2010). Simulating free surface problems using discrete least squares meshless method. *Computers & Fluids*, 39(3), 461-470.

Sukumar, N., Moran, B. and Belytschko, T. (1998). The natural element method in solid mechanics. *International journal for numerical methods in engineering*, 43(5), 839-887.

Valette, R., Pereira, A., Riber, S., Sardo, L., Larcher, A. and Hachem, E. (2021). Viscoplastic dam-breaks. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 287, 104447.

Wendland, H. (1999). Meshless Galerkin methods using radial basis functions. *Mathematics of Computation of the American Mathematical Society*, 68(228), 1521-1531.

Xu, T. and Jin, Y.C. (2019). Improvement of a projection-based particle method in free-surface flows by improved Laplacian model and stabilization techniques. *Comput. Fluids*, 191, 104235.

Yang, S., Yang, W., Qin, S., Li, Q. and Yang, B. (2018). Numerical study on characteristics of dam-break wave. *Ocean Eng.*, 159, 358–371.

Ye, Y., Xu, T. and Zhu, D. (2020). Numerical analysis of dam-break waves propagating over dry and wet beds by the mesh-free method. *Ocean Engineering*, 217, 107-118.

Zhu, T., Zhang, J.-D. and Atluri, S. (1998). A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach. *Computational mechanics*, 21(3), 223-235.

Zienkiewicz, O.C. and Codina, R. (1995). A general algorithm for compressible and incompressible flow—Part I. the split, characteristic based scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 20(89), 869-885.

Zounemat-Kermani, M. and Ghiasi-Tarzi, O. (2017). Using natural element mesh-free numerical method in solving shallow water equations. *European Journal of Environmental and Civil Engineering*, 21(6), 753-767