Iranian Hydraulic Association
Journal of Hydraulics
https://doi.org/10.30482/jhyd.2020.219579.1437

Evaluation of Well-Balanced Form of Weighted Average Flux Scheme for Simulating Flow in Open Channels

Ali Eslamloueyan [1], Seyed Mehrab Amiri [2*]

1- MSc of Civil Engineering, Water Eng. and Hydraulic Structures, Shiraz University.
2- Assistant Professor, Department of Road, Building and Environmental Engineering, Shiraz University.

* **mamiri@shirazu.ac.ir**

Received: 18 February 2020, Accepted: 3 May 2020 J. Hydraul. Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: Water is the most strategic liquid in the world. The life of all humankind and animals and plants are relying on the water. The water should supply to the location of the demands. One of the most common water transmission ways is open channels. If a sudden change occurs in the channel section, it can affect the whole water flow in the channel. These changes can happen naturally, like aggregation of sediments in a section of the channel. Moreover, the changes may cause by humans, like sharp and broad-crested weirs. Thus, it is necessary to simulate open-channel flows to predict possible changes in water surface profile and velocity.

Basically, researchers follow three approaches to simulate water flows: the analytic, the experimental, and the numerical approaches. Analytical approaches for solving the flow equations is not sufficient due to the complexity and nonlinearity of the equations so there are several restrictions in the modeling. On the other hand, experimental approach is time consuming and expensive. Since the high-performance computers have been developed, researchers attracted to the numerical approaches. There are different numerical solutions which are used to solve the water flow equations such as finite difference method, finite element method, finite volume method, etc.

The finite volume method is one of the most applicable methods in several computational aspects of engineering, such as computational fluid dynamics and heat transfer problems. In this method, it is necessary to have a strong approximation of the numerical flux term for solving flow equations. The Riemann solver provides a reliable approximation for the numerical flux term. The Riemann problem for a set of PDEs is an initial value problem for such PDEs in which the initial condition has a special form. In order to apply numerical solutions, one can use the exact Riemann solver or approximate Riemann solver. The exact Riemann solver uses Newton-Raphson method that takes noticeable cost in time and money and the results rely on the first guess of Newton-Raphson. Therefore, researchers prefer the approximate Riemann solvers such as Harten Lax van Leer (HLL) scheme, Harten Lax van Leer Constant (HLLC) scheme and Weighted Average Flux (WAF) scheme that have acceptable results and running time.

Materials and Methods: WAF scheme can be categorized as a branch of finite volume method. The scheme was first applied to the Euler equation. This scheme is one of the approximation solution (besides HLL and HLLC methods) of the Riemann problem. Then, Toro used the WAF scheme to simulate two-dimensional shallow water equations. Subsequently, WAF has been utilized to simulate flow over different kinds of open channels. Although the scheme shows reasonable results, it is noticeable that the numerical scheme is not well-balanced essentially. Thus, a well-balanced WAF scheme should be developed to simulate flow in open channels accurately without non-physical fluctuations in flow surface.

The aim of this research is to use the ability of the WAF scheme to simulate shallow water and applying some consideration on the scheme to prevent non-physical fluctuations in water surfaces.

Conclusion: In this paper, a well-balanced form of WAF which is combined with HLL for estimating flux has been employed to simulate one-dimensional flow open channels. MINMOD as an effective slope limiter has been used in order to prevent non-physical oscillations. Moreover, Runge-Kutta has been employed as the time integration method to renew depths and velocities. Several different cases have been used to show that the scheme has an excellent shock-capturing ability and can handle the wet and dry condition of channel bed. Importantly, the linear reconstruction for the scheme has been applied to have second-order accuracy and to prevent the negative depth effect on computations. The scheme is shown to be well-balanced by evaluating stationary solutions at steady state conditions. Besides, the capability and accuracy of the scheme are verified by the comparison of scheme numerical results with the analytical and experimental literature results. The numerical results have shown that the scheme can satisfy the continuity equation and prevent negative depth. For real applications of the scheme, the simulations of flow over sharp changes and dam-break show that RMSEs are in acceptable ranges and there is no non-physical fluctuations on the water surface profile. Simulating dam break on the wet and dry beds, show that the scheme is capable in shock capturing as well as solving wetting-drying problems. In addition, flow with wide range of Froude number over different forms of broad crested weirs, have been employed to verify the robustness, accuracy and stability of the scheme. Hence, all of these results prove that the presented well-balanced scheme is able to simulate different cases of shallow water equation examples accurately.

Keywords: Weighted Average Flux Scheme, Well-balanced Scheme, Shallow Water Equations.

انجمن هیدرولیک ایران

نشریه هیدرولیک

https://doi.org/10.30482/jhyd.2020.219579.1437

بررسی شکل متوازن شده الگوی عددی شار متوسط وزن‌دار برای شبیه‌سازی جریان در آبراهه های روباز

علی اسلاملوئیان[1]، سید محراب امیری[2*]

۱- کارشناسی ارشد عمران، مهندسی آب و سازه‌های هیدرولیکی، دانشگاه شیراز.

۲- استادیار، بخش مهندسی راه، ساختمان و محیط زیست دانشگاه شیراز.

* mamiri@shirazu.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۲۹، پذیرش: ۱۳۹۹/۰۲/۱۴ وب‌گاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: در تحقیق پیش رو جریان یک بعدی در آبراهه روباز، با استفاده از شکل متوازن شده الگوی عددی شار متوسط وزن‌دار، شبیه‌سازی شده است که معادله های آب کم عمق را حل می نماید. به منظور پیشگیری از به وجود آمدن نوسان‌ها با منشا غیر فیزیکی، از MINMOD به عنوان یک تابع محدود کننده شار استفاده شده است. پس از آن، برای دستیابی به یک شکل متوازن از الگوی شار متوسط وزن‌دار با هدف شبیه سازی جریان آب کم عمق، یک فرآیند بازسازی خطی روی عبارت شار اعمال شده و به وسیله الگوی به دست آمده در حالت های مختلف شبیه سازی هایی صورت گرفته است. این شبیه‌سازی ها عبارت‌اند از شبیه‌سازی آبراهه در حالت سکون به منظور صحت‌سنجی توازن الگوی شار متوسط وزن‌دار و عدم وابستگی آن به شکل تغییرپذیری‌های ناگهانی کف، شبیه‌سازی شکست سد در دو حالت بستر خشک و بستر تر که با بیشینه خطای نسبی 3.42% نشان دهنده توانایی شبیه‌سازی جریان روی بسترهای تر و خشک و قابلیت تسخیر شوک است. همچنین شبیه سازی جریان در آبراهه با تغییرپذیری‌های ناگهانی کف نشان دهنده قابلیت این الگو برای مدلسازی جریان روی تغییرپذیری‌های ناگهانی کف بوده و بیشترین مقادیر خطای نسبی در شبیه سازی های صورت گرفته برابر 3.47% است. شبیه‌سازی‌های صورت گرفته و مقادیر خطا گویای کارایی، پایداری و دقت الگوی متوازن شار متوسط وزن‌دار به‌دست آمده در این تحقیق است.

کلید واژگان: ناپیوستگی، معادله‌های آب کم عمق، الگوی شار متوسط وزن‌دار، متوازن.

۱- مقدمه

محققان در طول تاریخ با الهام از آبراهه‌های طبیعی به تدریج به دیدگاه ساخت آبراهه مصنوعی برای انتقال آب از نقطه ای به نقطه ای دیگر دست یافتند. وجود پیچیدگی هایی مانند ثابت نبودن نیمرخ جریان در طول آبراهه، سرریز شدن جریان از آبراهه ، ایجاد موج ، انتقال رسوب و ... سبب شد تا تحقیق روی آبراهه‌ها با روش‌هایی مانند روش‌های آزمایشگاهی، روش های تحلیلی و روش های عددی صورت گیرد. روش های آزمایشگاهی به طور معمول هزینه بر و وقتگیر هستند. از سوی دیگر برای رسیدن به پاسخ در روش‌های تحلیلی نیاز به فرضیه‌های زیادی است که مسئله را محدود می‌کند و از دقت محاسبات می‌کاهد. به مرور زمان و با پیشرفت در محاسبات، بیشتر محققان و پژوهشگران به روش‌های عددی گرویدند. یکی از پرکاربردترین روش‌های حل عددی در مسئله‌های هیدرولیک محاسباتی و دینامیک سیالات روش حجم محدود می‌باشد. در این روش برای حل معادله های جریان، یک تقریب قوی برای عبارت شار عددی ضروری می‌باشد. حلگر ریمان یک تقریب مناسب و قابل اطمینان برای برآورد عددی عبارت شار ارائه می‌دهد. در محاسبات عددی می‌توان از حل دقیق مسئله ریمان و یا حل تقریبی آن استفاده کرد (Toro, 2001).

در حل به نسبت دقیق مسئله ریمان از روش نیوتن-رافسون کمک گرفته می‌شود که هزینه زمانی زیادی را متحمل می‌شود و همچنین نتیجه به شدت به حدس اولیه نیوتن-رافسون بستگی دارد. در نتیجه محققان بیشتر از حل تقریبی مسئله ریمان بهره می‌جویند که از جمله

مشهورترین و رایج‌ترین آن‌ها روش‌های HLL[1] ، HLLC[2] و WAF[3] را می‌توان نام برد (Toro, 2001).
الگوی شار متوسط وزن‌دار در آغاز توسط Toro ارائه شد. این الگوی از روش حجم محدود به دست می‌آید. این الگو در آغاز روی معادله اویلر پیاده‌سازی شد و آنگاه از آن برای شبیه‌سازی معادله های آب کم عمق در دو بعد استفاده شد (Toro et al., 2013). بایستی توجه داشت که این الگوی عددی به خودی خود الگوی متوازنی نیست، در نتیجه باید شکل متوازنی از الگوی شار متوسط وزن‌دار را به دست آورد تا بتوان به وسیله آن جریان را روی تغییرپذیری‌های ناگهانی کف و بدون تشکیل نوسان‌های غیر فیزیکی در سطح آب شبیه‌سازی کرد. خاطر نشان می‌شود، به رغم آنکه شکل استاندارد الگوی شار متوسط وزن‌دار توانایی‌های فراوانی در مدلسازی جریان دارد دارد، اما همانند دیگر الگوهای عددی چنانچه متوازن نباشد (به عبارت دیگر توانایی حل دقیق معادله پایستگی جرم را نداشته باشد)، دارای قابلیت تعمیم مناسبی نبوده و تنها در مورد مسئله‌هایی قابل کاربرد است که از پیش پاسخ آنها به صورت تحلیلی و یا آزمایشگاهی مشخص باشد(Toro, 2009).
همان‌طور که اشاره شد روش شار متوسط وزن‌دار به رغم محاسنی که دارد، روشی متوازن نیست. به دلیل قابلیت های زیاد این الگو و در جهت رفع مشکل عدم توازن آن در حل معادله های آب کم عمق تلاش هایی توسط برخی محققان انجام شده است که به طور عمده روشهای به نسبت پیچیده و زمان بری است (Nieto and Reina , 2008).
تاثیر وجود مانع های طبیعی یا مصنوعی در طول آبراهه بر جریان، همواره مورد توجه محققان بوده است. مانع های طبیعی در نتیجه رخدادهای طبیعی یا دخالت انسان در طبیعت به وجود می‌آیند. اما مانع‌های مصنوعی توسط انسان و به طور معمول برای کنترل جریان و یا کاستن از انرژی جریان ساخته می‌شود. یکی از مهم ترین مانع های مصنوعی سرریز ها هستند که بررسی نیمرخ جریان روی آنها بسیار اهمیت دارد (Zhou et al., 2002). روش‌های مختلفی برای بررسی ویژگی‌های جریان روی سرریز ها وجود دارد اما باید توجه داشت وجود ناپیوستگی هایی مانند تغییر ارتفاع ناگهانی کف آبراهه یا شوک های ایجاد شده در آبراهه می‌تواند هنگام استفاده از روش عددی مد نظر، خطاهای محاسباتی را شدیداً افزایش دهد. همچنین مدل سازی جریان روی سطح خشک (مرز متغیر) نیز توسط همه مدل های عددی قابل شبیه‌سازی نمی‌باشد (Toro et al., 2013). بنابراین در این تحقیق سعی می شود موارد زیر انجام شود:

- تبدیل الگوی عددی به یک الگوی عددی متوازن.
- بررسی نیمرخ های جریان در محل تغییر شکل های کف با استفاده از الگوی به دست آمده.
- بررسی ویژگی تسخیر شوک الگوی عددی.

۲- معادله‌های حاکم

۲-۱- معادله‌های آب کم عمق

معادله‌های اصلی حاکم بر این تحقیق معادله های آب کم عمق است که در حالت پایستار و به صورت برداری به شکل زیر می باشد:

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial \boldsymbol{t}}+\frac{\partial \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})}{\partial \boldsymbol{x}}=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U}) \qquad (1)$$

در رابطه بالا بردار U بردار متغیر ها و بردار $F(U)$ بردار شار در جهت x و $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{U})$ بردار عبارت چشمه می‌باشند.

$$U=\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}$$
$$F(U)=\begin{bmatrix} hu \\ hu^2+\frac{1}{2}gh^2 \end{bmatrix} \qquad (2)$$
$$S(U)=\begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_0-S_f) \end{bmatrix}$$

که در آن S_f, S_0, g, u, h به ترتیب عبارت‌اند: از عمق آب، بردار سرعت میانگین، شتاب گرانش، شیب کف آبراهه و شیب اصطکاکی.

اگر یک سلول به نام $\boldsymbol{i}$ و با دامنه $\left[\boldsymbol{x}_{i-\frac{1}{2}},\boldsymbol{x}_{i+\frac{1}{2}}\right]$ در نظر گرفته شود، معادله آب کم عمق را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\boldsymbol{dU_i(t)}}{\boldsymbol{dt}}+\frac{\widehat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i+\frac{1}{2}}}-\widehat{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{i-\frac{1}{2}}}}{\Delta x}=\boldsymbol{S_i} \qquad (3)$$

که $\boldsymbol{U_i}$ بردار متوسط مجهول‌ها روی سلول $\boldsymbol{i}$ می‌باشد و روی دامنه $\left[\boldsymbol{x}_{i-\frac{1}{2}},\boldsymbol{x}_{i+\frac{1}{2}}\right]$ برابر است با:

$$U_i=\frac{1}{\Delta x}\int_{D_i}U(x.t)dx \qquad (4)$$

لازم به یادآوری است که در رابطه (۳)، $\boldsymbol{\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}}$ و $\boldsymbol{\hat{F}}$ شار عددی تقریبی در جهت x و $\boldsymbol{S_i}$ عبارت چشمه تقریبی در سلول $\boldsymbol{i}$ می‌باشد.

شایان یادآوری است، در این پژوهش به منظور فراهم آوردن امکان انتخاب گام‌های زمانی دلخواه، به جای انتگرال گیری زمانی مرسوم، روش Runge-kutta مرتبه دوم به کارگیری شده است.

۲-۲- روش شار متوسط وزن‌دار

الگوی شار متوسط وزن‌دار یک الگوی عددی با ویژگی تسخیر شوک بالا می‌باشد و این توانایی را دارد که در نقطه-های با گرادیان زیاد جریان، مانند پدیده شکست سد نتایجی بدون نوسان غیر فیزیکی و منطقی ارائه دهد. این ویژگی تسخیر شوک بالا افزون بر کارکرد مناسب آن در حل معادله های آب کم عمق، قابلیت مدل‌سازی روی بستر خشک و ناهموار و دارای اصطکاک را نیز فراهم می کند (Mahdavi and Rakhshandehroo, 2012). این الگو به این صورت عمل می کند که با داشتن شار متوسط عبوری بین دو سلول مجاور، مقادیر مسئله مانند سرعت و عمق را تا زمان مورد نظر محاسبه می کند. برای انجام محاسبات، زمان مورد نظر باید به بازه های زمانی تقسیم شود که این بازه های زمانی توسط عدد کورانت تعیین می شوند.

الگوی شار متوسط وزن‌دار یک شار متوسط تقریبی در مرز دو سلول محاسبه می‌کند که میزان آن برای مرز دو سلول $\boldsymbol{i}$ و $\boldsymbol{i+1}$ از میانگین انتگرالی $\boldsymbol{F(U)}$ به ازای نصف یک گام زمانی به صورت زیر تعریف می‌شود (Toro, 2009):

$$\boldsymbol{\hat{F}^{WAF}_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta x}\int_{-\frac{\Delta x}{2}}^{\frac{\Delta x}{2}} F\left(U_{i+1/2}\left(x.\frac{\Delta t}{2}\right)\right)dx} \tag{5}$$

که $\boldsymbol{U_{i+1/2}}$ از حل مسئله ریمان به دست می‌آید. در نتیجه می‌توان بر مبنای موج‌های سمت چپ و سمت راست سلول میزان عددی شار الگوی عددی شار متوسط وزن‌دار را به شکل زیر تعریف کرد:

$$\boldsymbol{\hat{F}^{WAF}_{i+1/2} = \sum_{k=1}^{N+1} w_k F^{(k)}_{i+\frac{1}{2}}} \tag{6}$$

و

$$\boldsymbol{w_k = \frac{1}{2}(c_k - c_{k-1}), C_0 = -1\, , C_{N+1} = 1\, , c_k = \frac{\Delta t S_k}{\Delta x}}$$

در رابطه بالا N بیانگر تعداد موج و $\boldsymbol{S_k}$ بیانگر سرعت موج K و $\boldsymbol{c_k}$ بیانگر عدد کورانت می‌باشد.

از جاگذاری مقادیر w_k و c_k در رابطه بالا، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F^{WAF}_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} c_k \Delta F^{(k)}_{i+\frac{1}{2}} \tag{7}$$

که در آن:

$$\Delta F^{(k)}_{i+\frac{1}{2}} = F^{(k+1)}_{i+\frac{1}{2}} - F^{(k)}_{i+\frac{1}{2}} \tag{8}$$

به منظور از بین بردن تاثیر مستقیم زمان و برای جلوگیری از ایجاد نوسان های غیر فیزیکی در سطح آب، در ناحیه‌های نزدیک به تغییرپذیری های ناگهانی، بایستی تعداد متغیرها در مسئله کاهش پیدا کند. از سوی دیگر روابط به دست آمده در بالا دارای دو متغیر زمان و مکان می باشند. برای این منظور باید از Total Variation Diminishing (TVD) استفاده کرد تا به وسیله آن متغیر زمان از معادله‌ها حذف شود. بنابراین پس از اثر دادن TVD رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\hat{F}^{WAF-TVD}_{i+1/2} = \sum_{k=1}^{N+1} \overline{w}_k F^{(k)}_{i+\frac{1}{2}} \tag{9}$$

که در آن میزان وزن‌های جدید عبارت‌اند از:

$$\overline{w}_1 = \frac{1}{2}\left(1 + sign(c_1)\emptyset^{(1)}_{i+\frac{1}{2}}\right) \tag{10}$$

$$\overline{w}_2 = \frac{1}{2}\left(sign(c_2)\emptyset^{(2)}_{i+\frac{1}{2}} - sign(c_1)\emptyset^{(1)}_{i+\frac{1}{2}}\right) \tag{11}$$

$$\overline{w}_3 = \frac{1}{2}\left(1 - sign(c_2)\emptyset^{(2)}_{i+\frac{1}{2}}\right) \tag{12}$$

$\boldsymbol{\emptyset_{i+\frac{1}{2}}}$ تابع محدود کننده شار متوسط وزن‌دار نام دارد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\emptyset^{\mathrm{k}}_{\mathrm{i}+\frac{1}{2}} = \begin{cases} 1 & for\ r^{(k)} \le 0 \\ 1 - \frac{(1-|c_k|)r^{(k)}(1+r^{(k)})}{1+\left(r^{(k)}\right)^2} & otherwise \end{cases} \tag{13}$$

و $\boldsymbol{r^{(k)}}$ به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\boldsymbol{r^{(k)}} = \begin{cases} \frac{\Delta h^{(k)}_{i-\frac{1}{2}}}{\Delta h^{(k)}_{i+\frac{1}{2}}} \equiv \frac{h^{(k)}_{i} - h^{(k)}_{i-1}}{h^{(k)}_{i+1} - h^{(k)}_{i}} & if\ c_k > 0 \\ \frac{\Delta h^{(k)}_{i+\frac{3}{2}}}{\Delta h^{(k)}_{i+\frac{1}{2}}} \equiv \frac{h^{(k)}_{i+2} - h^{(k)}_{i+1}}{h^{(k)}_{i+1} - h^{(k)}_{i}} & if\ c_k < 0 \end{cases} \tag{14}$$

۳- ویژگی توازن الگوی عددی

یک الگوی عددی متوازن الگویی است که برای حالت سکون پاسخ ثابت ارائه دهد. به عبارت دیگر در حالتی که آب در بازه‌ای ساکن است، الگو بایستی در همه‌ی نقطه‌ها سرعت را برابر صفر و تراز سطح آب را ثابت نشان دهد.

برای داشتن پاسخ ثابت، آهنگ تغییرپذیری های متغیرها نسبت به زمان ($\frac{\partial U}{\partial t}$) بایستی برابر صفر باشد. در نتیجه برابر رابطه (۱) عبارت تغییرپذیری های شار ($\frac{\partial F(U)}{\partial x}$) باید برابر با عبارت چشمه تقریبی ($\boldsymbol{S(U)}$) شود.

به منظور دستیابی به شکل متوازن الگوی عددی شار متوسط وزن‌دار برای بیان میزان سرعت و عمق در سمت راست و سمت چپ سلول محاسباتی فرآیندی تعریف شده است. از آنجا که روش معمول تقریب میانگین گیری دقتی از مرتبه اول دارد، در این نوشتار برای رسیدن به دقتی از مرتبه دوم از روش بازسازی خطی استفاده شده است. پس بردار متغیرها به صورت زیر بازسازی می‌شود (Pongsanguansin et al., 2016):

$$U^{+}_{i-\frac{1}{2}} = U_i - \sigma_i \Delta x \tag{15}$$

$$U^{-}_{i+\frac{1}{2}} = U_i + \sigma_i \Delta x \tag{16}$$

که در اینجا $\boldsymbol{\sigma_i}$ تابع محدود کننده شیب می‌باشد و عبارت است از:

$$\sigma_i = minmod\left(\frac{U_{i-1}-U_i}{\Delta x}, \frac{U_i-U_{i+1}}{\Delta x}\right) \tag{17}$$

بر مبنای روش بازسازی خطی ارائه شده توسط Audusse et al. (2004)، عمق بازسازی شده به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$h^{\pm *}_{i+\frac{1}{2}} = max\left(0, h^{\pm}_{i+\frac{1}{2}} + z^{\pm}_{i+\frac{1}{2}} - z_{i+\frac{1}{2}}\right) \tag{18}$$

که در آن:

$$z_{i+\frac{1}{2}} = \max\left(z^{-}_{i+\frac{1}{2}}, z^{+}_{i+\frac{1}{2}}\right) \tag{19}$$

رابطه بازسازی بالا تضمین می کند که در هیچ نقطه‌ای از دامنه محاسبات عمق منفی نشود.

در نتیجه با جایگذاری رابطه بالا در بردار متغیرهای پایستار مسئله، بردار متغیرهای مسئله بازسازی شده به صورت زیر نوشته می‌شود (Pongsanguansin et al., 2016):

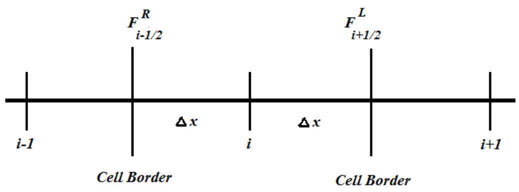


Fig. 1 The numerical fluxes at the left and the right ends of the cell i

شکل ۱ شارهای عددی سمت چپ و راست سلول محاسباتی i

$$\boldsymbol{U}^{+*}_{i\pm\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{h}^{+*}_{i\pm\frac{1}{2}} \\ \boldsymbol{h}^{+*}_{i\pm\frac{1}{2}} \boldsymbol{u}^{+}_{i\pm\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \tag{20}$$

در نتیجه با جایگذاری اصلاح‌ها در روش شار متوسط وزن‌دار، رابطه الگوی شار متوسط وزن‌دار که ریشه در روش عددی حجم محدود داشت، به حالت متوازن در می‌آید:

$$\frac{dU_i(t)}{dt} + \frac{\hat{F}^{l}_{i+1/2} - \hat{F}^{r}_{i-1/2}}{\Delta x} = S_{ci} \tag{21}$$

که در رابطه (۲۱) میزان شار عددی در سمت چپ و سمت راست سلول i به شکل زیر بازسازی شده‌اند:

$$\widehat{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{l}}_{i+\frac{1}{2}} = \widehat{\boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{U}^{-*}_{i+\frac{1}{2}}, \boldsymbol{U}^{+*}_{i\mp}\right) + \frac{\boldsymbol{g}}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ {\boldsymbol{h}^{-}_{i+\frac{1}{2}}}^{2} - {\boldsymbol{h}^{-*}_{i+\frac{1}{2}}}^{2} \end{pmatrix} \tag{22}$$

$$\widehat{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{r}}_{i-\frac{1}{2}} = \widehat{\boldsymbol{F}}\left(\boldsymbol{U}^{-*}_{i-\frac{1}{2}}, \boldsymbol{U}^{+*}_{i-\frac{1}{2}}\right) + \frac{\boldsymbol{g}}{2}\begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ {\boldsymbol{h}^{+}_{i-\frac{1}{2}}}^{2} - {\boldsymbol{h}^{+*}_{i-\frac{1}{2}}}^{2} \end{pmatrix} \tag{23}$$

همچنین عبارت چشمه $\boldsymbol{-ghS_0}$ به شکل زیر بازیابی می‌شود:

$$\boldsymbol{S_{ci}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ -\frac{\boldsymbol{g}}{2\Delta x}(\boldsymbol{h}^{+}_{i-\frac{1}{2}} + \boldsymbol{h}^{-}_{i+\frac{1}{2}})(\boldsymbol{z}^{-}_{i+\frac{1}{2}} - \boldsymbol{z}^{+}_{i-\frac{1}{2}}) \end{pmatrix} \tag{24}$$

در نتیجه با لحاظ کردن شرایط بالا الگوی شار متوسط وزن دار متوازن می شود. در بخش پیش رو نتایج استفاده از الگوی بالا و مقایسه آن با نتایج آزمایشگاهی و تحلیلی ارائه شده است.

۴- بحث در نتایج

۴-۱- کارایی و دقت مدل

در این بخش به بررسی کارایی و دقت مدل سازی عددی که در قسمت پیش به دست آمد پرداخته می‌شود. به همین دلیل باید با الگوی WAF به دست آمده در این تحقیق،

مثال‌هایی که در شرایط آزمایشگاهی مدل سازی شده‌اند را حل کرده و پاسخ‌های مدل‌سازی عددی و مدل آزمایشگاهی با یکدیگر مقایسه شود. با این کار می توان میزان دقت مدل عددی را نسبت با واقعیت ارزیابی کرد.

لازم به یادآوری است که برای مدل‌سازی الگوی شار متوسط وزن دار در حالت متوازن از کدنویسی به زبان برنامه نویسی MATLAB استفاده شده است.

مدل های آزمایشگاهی با حالت‌های متفاوت بررسی شده اند که عبارت‌اند از حالت سکون، پدیده شکست سد و جریان روی کف آبراهه با تغییرپذیری های ناگهانی. افزون بر این، در ادامه نتایج الگوی متوازن شار متوسط وزن‌دار با نتایج الگوهای HLL و HLLC مقایسه شده تا بهبود نتایج نشان داده شود.

ملاک تحلیل میزان دقت الگوی استفاده شده در مدل‌سازی، محاسبه خطا در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی است و این میزان از رابطه جذر میانگین مربع تفاضل‌ها به دست می‌آید:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{obs}-y_{cal})^2}{n}} \qquad (25)$$

در رابطه بالا y_{obs} بیانگر عمق مشاهده شده و y_{cal} بیانگر عمق محاسبه شده می‌باشد. همچنین برای هر یک از مدل‌ها به منظور درک نسبت میزان خطا به ابعاد مسئله، میزان نسبی خطا نسبت به میانگین عمق محاسبه شده است.

$$R_{rel} = \frac{RMSE}{y_{ave}} \qquad (26)$$

در ادامه، ابتدا متوازن بودن الگوی ارائه شده در این تحقیق صحت سنجی می شود. پس از آن به بررسی و حل حالت های مختلفی از پدیده شکست سد به منظور ارزیابی ویژگی تسخیر شوک و قابلیت مدلسازی بسترهای تر و خشک پرداخته می شود. سپس مدلسازی جریان با تغییرپذیری های ناگهانی کف ارائه می شود. در همه مسئله‌های حل شده، میزان عدد کورانت برابر با ۰/۶ است.

۴-۲- صحت‌سنجی توازن الگوی شار متوسط وزن دار ارائه شده این تحقیق

یکی از بهترین روش‌های بررسی متوازن بودن یک الگوی عددی، مشاهده پاسخ های مسئله در حالت سکون می باشد.
الگوی عددی را متوازن گویند که جواب‌های آن در حالت سکون، ثابت باشد.

در نتیجه به منظور صحت‌سنجی این مهم، در ادامه مدل‌هایی در حالت‌ها و شرایط مختلف که توسط الگوی عددی به دست آمده در این تحقیق حل شده‌اند قابل مشاهده می‌باشد.

در این حالت عمق اولیه در سرتاسر آبراهه ثابت و سرعت اولیه در همه‌ی نقطه‌ها صفر می باشد و آبراهه دارای مانع کف با شکل‌های مختلف می باشد. شکل ۲ نیمرخ سطح بدون نوسان آب را روی کف با مانع‌های مستطیلی، مثلثی و منحنی نشان می‌دهد.

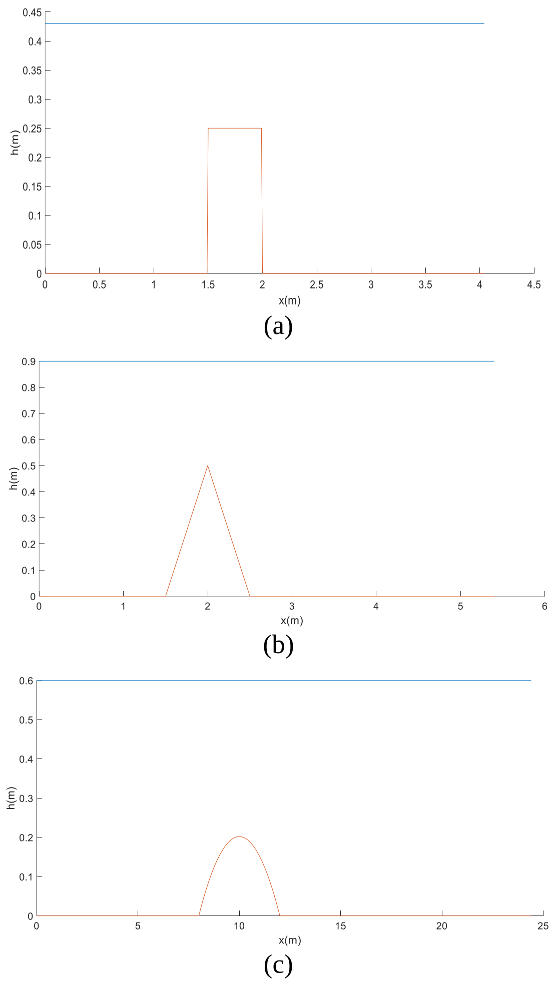


Fig. 2 The stationary solutions of the well-balanced WAF scheme at steady state over rectangular (a), triangular (b) and semi-circular (c) humps at t = 50 sec

شکل ۲ بررسی توازن الگوی عددی، مدلسازی جریان ایستا روی مانع (a) مستطیلی، (b) مثلثی و (c) نیم دایره‌ای در زمان t = 50 sec

۴-۳- شبیه‌سازی پدیده شکست سد

۴-۳-۱- شبیه‌سازی پدیده شکست سد روی بستر خشک

در شکل ۳ مقایسه پاسخ حل تحلیلی Toro (2001) و الگوی متوازن WAF ارائه شده در این تحقیق، به ترتیب برای زمان های t = 1 sec و t = 2 sec و t = 4 sec برای پدیده شکست سد روی بستر خشک هستند.

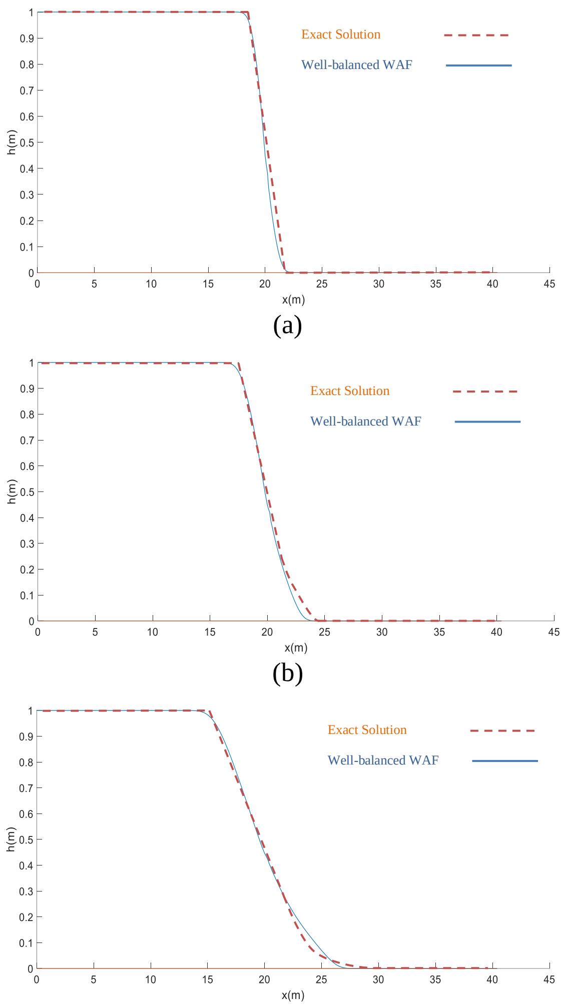


Fig. 3 The dam-break on dry bed at t = 1 sec (a), t = 2 sec (b) t = 4 sec (c)

شکل ۳ شکست سد روی بستر خشک در (a) t = 1 sec، (b) t = 2 sec و (c) t = 4 sec

جدول ۱ میزان خطا RMSE در پدیده شکست سد روی بستر خشک در زمان‌های مختلف

Table 1 The RMSE values of the dam break on dry bed for the various time steps

Time (sec)	(m)
1	1.3041×10^{-2}
2	1.6906×10^{-2}
4	1.4006×10^{-2}

همچنین میزان خطای نسبی در جدول ۲ قابل مشاهده می‌باشد:

جدول ۲ میزان خطای نسبی در پدیده شکست سد روی بستر خشک در زمان‌های مختلف

Table 2 The relative error values of the dam-break on dry bed for the various time steps

Time (sec)	R_{rel}
1	2.6%
2	3.38%
4	2.8%

شکل ۴ تغییرپذیری‌های خطا را نسبت به کوچک کردن اندازه سلول های محاسباتی نشان می‌دهد.

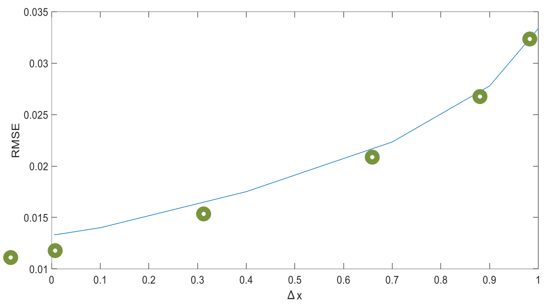


Fig. 4 The rate of change of the error versus computational cells length for dam-break on a dry bed at t = 4 sec

شکل ۴ آهنگ تغییرپذیری‌های خطا نسبت به اندازه سلول‌های محاسباتی برای پدیده شکست سد روی بستر خشک در t = 4 sec

۴-۳-۲- شبیه‌سازی پدیده شکست سد روی بستر تر

شکل ۵ بیانگر مقایسه پاسخ حل تحلیلی Toro, (2001) و الگوی متوازن WAF ارائه شده در این تحقیق به ترتیب برای زمان های t = 2 sec و t = 5 sec و t = 8 sec در پدیده شکست سد روی بستر تر است.

شکل ۶ تغییرپذیری‌های خطا را نسبت به کوچک کردن اندازه سلول های محاسباتی نشان می‌دهد.

جدول ۳ میزان خطا RMSE در پدیده شکست سد روی بستر تر در زمان‌های مختلف

Table 3 The RMSE values of the dam break on wet bed for the various time steps

Time (sec)	RMSE (m)
2	1.8731×10^{-2}
5	1.7012×10^{-2}
8	1.8801×10^{-2}

جدول ۴ میزان خطای نسبی در پدیده شکست سد روی بستر تر در زمان‌های مختلف

Table 4 The relative error values of the dam-break on wet bed for the various time steps

Time (sec)	R_{rel}
2	3.4%
5	3.09%
8	3.42%

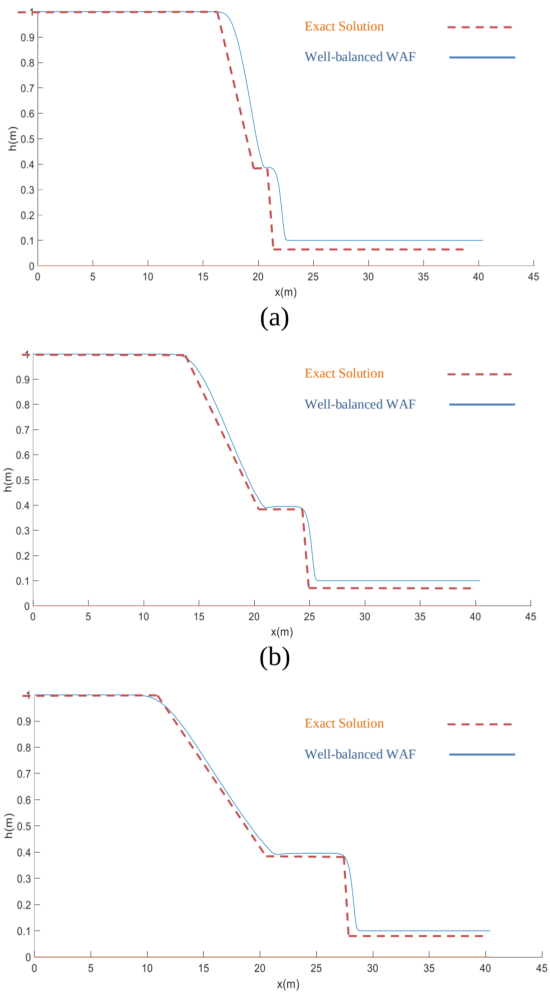


Fig. 5 The dam-break phenomenon on wet bed at t= 2 sec (a), t = 5 sec (b), t = 8 sec (c)

شکل ۵ شکست سد روی بستر تر در (a) t = 2 sec، (b) t = 5 sec و (c) t = 8 sec

۴-۴- مدلسازی جریان عبوری روی بستر با تغییرپذیری های کف

مدلسازی جریان در رویارویی با تغییرپذیری های ناگهانی می تواند توانایی تسخیر شوک و پیوستگی پاسخ الگوی عددی استفاده شده برای مدلسازی را ارزیابی کند. به همین منظور، در ادامه به بررسی عملکرد الگوی متوازن شار

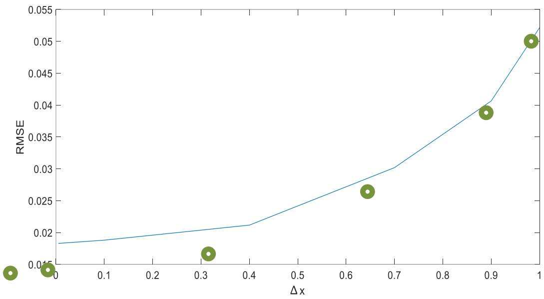


Fig. 6 The rate of change of error versus computational cells length for dam-break on a wet bed at the time t = 8 sec

شکل ۶ آهنگ تغییرپذیری‌های خطا نسبت به اندازه سلول‌های محاسباتی برای پدیده شکست سد روی بستر تر در t = 8 sec

متوسط وزن دار و پاسخ های آن در مدل‌سازی جریان روی بستر با تغییرپذیری‌های تدریجی و ناگهانی پرداخته شده است.

۴-۴-۱-مدلسازی جریان عبوری روی بستر با مانع منحنی شکل

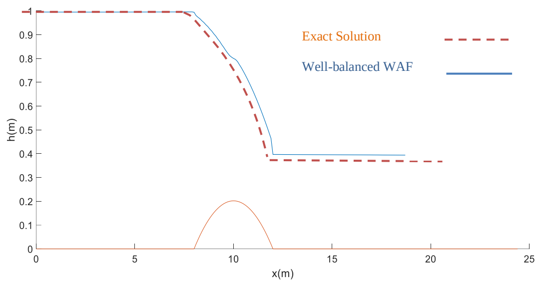
در این مسئله دو حالت می‌تواند رخ دهد. بسته به شرایط مرزی که در بالادست و پایین دست حاکم است و همچنین سرعت و عمق اولیه مسئله، می تواند جریان با وجود شوک و یا بدون وجود شوک داشت. نتایج الگوی متوازن این تحقیق با حل تحلیلی Zhou et al. (2002) مقایسه شده است.

در شکل ۷ جریانی بحرانی وجود دارد و ویژگی‌های جریان به صورتی است که در این حالت شوک در طول جریان ایجاد نمی‌شود.

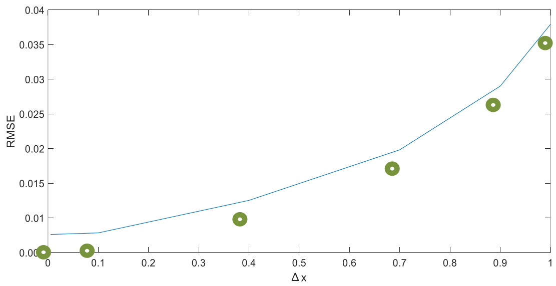
میزان خطای حل عددی ارائه شده در این تحقیق نسبت به حل تحلیلی برابر $7.8370 \times 10^{-3} m$ و خطای نسبی برابر 1.12% است. پس می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ دارای دقت مناسبی است.

در شکل ۸a تبدیل جریان فوق بحرانی به زیر بحرانی وجود دارد و ویژگی‌های جریان به صورتی است که در طول جریان شوک ایجاد می‌شود. در شکل ۸b تنها جریان زیر بحرانی وجود دارد و نتایج الگوی متوازن عددی را نسبت به نتایج تحلیلی نشان می‌دهد.

میزان خطای حل عددی ارائه شده در این تحقیق نسبت به حل تحلیلی برای حالت جریان بحرانی به همراه شوک بر



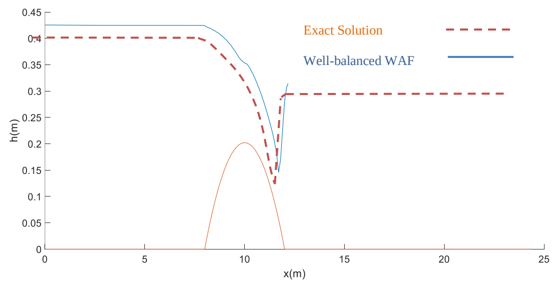
(a)



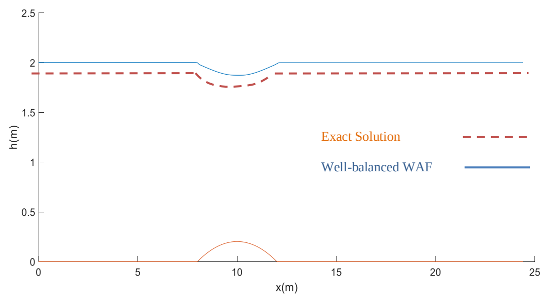
(b)

Fig. 7 The results of the developed numerical scheme and the analytical solution on the flow without shocks (a) and the effect of the computational cells lengths on the error (b).

شکل ۷ (a) نتایج الگوی متوازن عددی و حل تحلیلی در عبور جریان بدون ایجاد شوک روی مانع منحنی شکل و (b) آهنگ تغییرپذیری‌های خطا نسبت به اندازه سلول‌های محاسباتی



(a)



(b)

Fig. 8 The comparison of the developed numerical scheme with analytical solution on the flow affected by shocks (a) and simulation of the subcritical flow over a hump (b).

شکل ۸ (a) مقایسه نتایج تحلیلی و الگوی متوازن عددی در عبور جریان به همراه شوک روی مانع منحنی شکل و (b) مقایسه نتایج تحلیلی و الگوی متوازن عددی در عبور جریان زیر بحرانی روی مانع

روی مانع منحنی شکل برابر $1.3183 \times 10^{-2}m$ و خطای نسبی برابر 3.47% می باشد. همچنین میزان خطا برای حالت جریان زیر بحرانی روی مانع $3.8476 \times 10^{-2}m$ و خطای نسبی برابر 1.92% است. پس می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ نسبت به ابعاد مسئله دارای دقت مناسبی است.

۴-۴-۲-مدلسازی جریان عبوری روی بستر با مانع مستطیلی

در این بخش مدلی آزمایشگاهی تعریف شده است که این آزمایش در آزمایشگاه هیدرولیک دانشگاه شیراز Asi and Amiri (2016) انجام شده و جریان عبوری روی مانع مستطیلی را نشان می‌دهد.

جریان عبوری از روی مانع مستطیلی زیر بحرانی می‌باشد. در این‌حالت، شرایط مرزی بالادست و پایین دست عبارت‌اند از، عمق برابر ۸/۷ سانتی متر و دبی واحد عرض برابر۰/۱۴ متر مربع بر ثانیه. شکل ۹ نتایج مدلسازی الگوی متوازن شار متوسط وزن‌دار و مدل آزمایشگاهی را نشان می‌دهد.

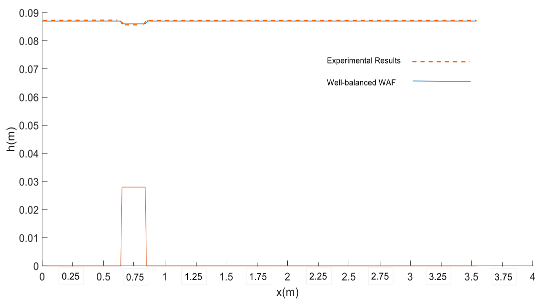


Fig. 9 Results of the developed numerical scheme with experimental ones in simulating the subcritical flow over a rectangular hump

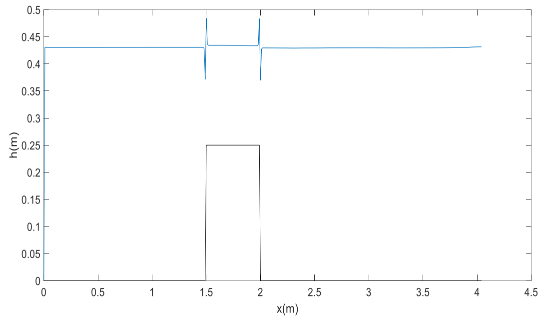
شکل ۹ مقایسه نتایج الگوی متوازن عددی و آزمایشگاهی در عبور جریان زیر بحرانی از روی مانع مستطیلی

میزان خطای حل عددی ارائه شده در این تحقیق نسبت به نتایج آزمایشگاهی برابر $2.8071 \times 10^{-3}m$ و خطای نسبی برابر 3.3% است. می‌توان نتیجه گرفت که پاسخ در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی دارای دقت مناسبی است.

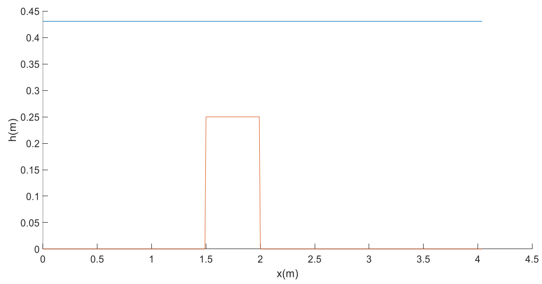
۴-۵- مقایسه عملکرد الگوی متوازن و معمول شار متوسط وزن‌دار

در این بخش به منظور مقایسه الگوی متوازن و الگوی

معمول شار متوسط وزن‌دار، تاثیر الگوی متوازن بر بهبود نتایج شبیه‌سازی‌ها در حالت های در حال سکون، جریان روی مانع منحنی شکل به همراه شوک و جریان روی مانع مثلثی بررسی می‌شود.



(a)



(b)

Fig. 10 The results of the steady state simulation with a common WAF scheme (a) and well-balanced WAF scheme (b)

شکل ۱۰ (a) شبیه‌سازی آب در حالت سکون وسیله الگوی معمول شار متوسط وزن‌دار (b) شبیه‌سازی آب در حالت سکون به وسیله الگوی متوازن شار متوسط وزن‌دار

همان طور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود در شبیه‌سازی آب در حالت سکون روی مانع مستطیلی به وسیله الگوی معمول شار متوسط وزن‌دار، در ناحیه‌های نزدیک به لبه مانع نوسان های غیر فیزیکی ایجاد شده است، در حالی که سرعت صفر و تراز سطح آب ثابت می‌باشد.

اما در شبیه‌سازی آب در حالت سکون روی مانع مستطیلی به وسیله الگوی متوازن شار متوسط وزن‌دار هیچ‌گونه نوسانی در سطح آب مشاهده نشده و سرعت در همه‌ی ناحیه‌ها صفر می‌باشد.

شکل ۱۱ نشان می‌دهد که اگر به جای الگوی متوازن شده شار متوسط وزن‌دار، از روش معمول شار متوسط وزن‌دار استفاده شود افزون بر ایجاد نوسان در حالت سکون جریان، در حالت جریان جاری نیز دقت کمتری نسبت به حالت متوازن شده دارد.

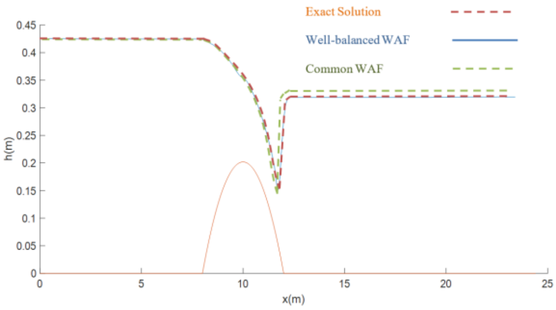


Fig. 11 The results of the well-balanced WAF scheme and the common WAF scheme over a hump with shock

شکل ۱۱ مقایسه پاسخ روش متوازن شده شار متوسط وزن‌دار و روش شار متوسط وزن‌دار معمول با پاسخ تحلیلی بر روی مانع همراه با شوک

میزان خطا برای الگوی متوازن شده شار متوسط وزن‌دار و از روش معمول شار متوسط وزن‌دار نسبت به پاسخ تحلیلی به شرح زیر می‌باشد:

$$RMSE_{WB-WAF} = 1.3183 \times 10^{-2} m \qquad (27)$$
$$R_{rel} = 3.47\%$$

$$RMSE_{WAF} = 1.9404 \times 10^{-2} m \qquad (28)$$
$$R_{rel} = 5.11\%$$

شکل ۱۲ جریان زیربحرانی روی مانع منحنی شکل نشان می‌دهد. اگر به جای الگوی متوازن شده شار متوسط وزن‌دار، از روش معمول شار متوسط وزن‌دار استفاده شود افزون بر ایجاد نوسان های بسیار کوچک در محل مانع، نتایج از دقت کمتری نیز نسبت به حالت متوازن شده دارد. البته این نوسان در جریان زیربحرانی بسیار کوچک است.

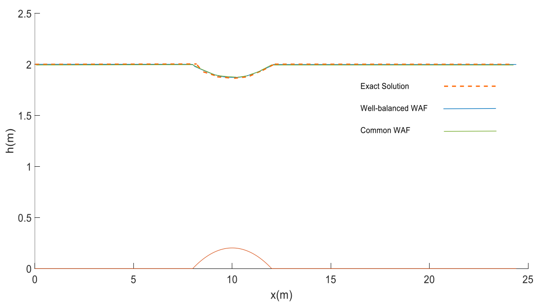


Fig. 12 The results of the well-balanced WAF scheme and the common WAF scheme over a hump without shock

شکل ۱۲ مقایسه پاسخ روش متوازن شده شار متوسط وزن‌دار و روش شار متوسط وزن‌دار معمول با پاسخ تحلیلی بر روی مانع بدون شوک

میزان خطا برای الگوی متوازن شده شار متوسط وزن‌دار و روش معمول شار متوسط وزن‌دار نسبت به پاسخ تحلیلی به شرح زیر می‌باشد:

$$RMSE_{WB-WAF} = 3.8476 \times 10^{-2} m \quad R_{rel} = 1.92\% \tag{29}$$

$$RMSE_{WAF} = 4.0218 \times 10^{-2} m \quad R_{rel} = 2.01\% \tag{30}$$

شکل ۱۳ جریان زیر بحرانی روی سرریز لبه پهن را برای الگوی متوازن شده شار متوسط وزن‌دار و از روش معمول شار متوسط وزن‌دار نشان می‌دهد.

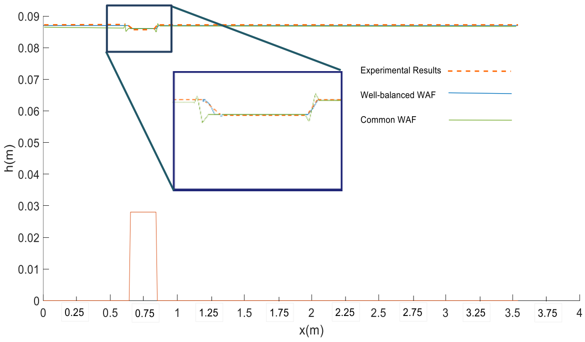


Fig. 13 The comparison of the results of well-balanced WAF scheme and the common WAF scheme over a rectangular hump

شکل ۱۳ مقایسه پاسخ روش متوازن شده شار متوسط وزن‌دار و روش شار متوسط وزن‌دار معمول روی مانع مستطیلی

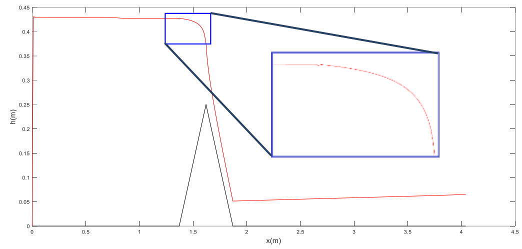
میزان خطا برای الگوی متوازن شده شار متوسط وزن‌دار و از روش معمول شار متوسط وزن‌دار نسبت به پاسخ آزمایشگاهی به شرح زیر می‌باشد:

$$RMSE_{WB-WAF} = 2.8071 \times 10^{-3} m \quad R_{rel} = 3.3\% \tag{31}$$

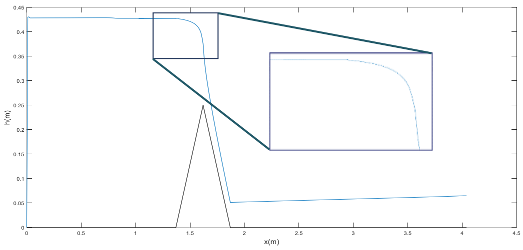
$$RMSE_{WAF} = 3.7613 \times 10^{-3} m \quad R_{rel} = 4.42\% \tag{32}$$

همان طور که مشاهده می‌شود، میزان خطای روش معمول شار متوسط وزن‌دار نسبت به نتایج آزمایشگاهی برابر $3.7613 \times 10^{-3} m$ و خطای نسبی آن برابر 4.42% است که نشان از کاهش دقت در محاسبات، نسبت به الگوی متوازن ارائه شده در این تحقیق، است.

همان طور که در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود در شبیه‌سازی آب در حالت عبور از روی مانع مثلثی به وسیله الگوی معمول شار متوسط وزن‌دار، در ناحیه‌ها نزدیک به لبه مانع نوسان های غیر فیزیکی ایجاد شده است، در حالی که در صورت استفاده از الگوی متوازن شار متوسط وزن‌دار ارائه شده در این تحقیق، نوسان های غیرفیزیکی حذف می‌شوند.



(a)



(b)

Fig. 14 The flow simulation over a triangluar hump using common WAF scheme and the corresponding non-physical oscilations (a) flow simulation over a triangluar hump using a well-balanced WAF scheme and the corresponding oscilations (b)

شکل ۱۴ (a) شبیه‌سازی جریان آب روی مانع مثلثی شکل به وسیله الگوی معمول شار متوسط وزن‌دار و نوسان‌های غیر فیزیکی مربوطه (b) شبیه‌سازی جریان آب روی مانع مثلثی شکل به وسیله الگوی متوازن شار متوسط وزن‌دار و نوسان‌های مربوطه

همان‌طور که قابل مشاهده است، هرچه مانع کف آبراهه ناگهانی‌تر باشد (تغییرپذیری‌های ارتفاعی آن سریع‌تر باشد) احتمال ایجاد نوسان‌های غیر فیزیکی و شدت آن افزایش می‌یابد.

۵- نتیجه گیری

تحقیقات گذشته نشان می دهد روش WAF توانایی تسخیر شوک و مدلسازی جریان بین مرزهای تر و خشک را با دقت بالایی دارد. اما بزرگترین مشکل این روش نامتوازن بودن آن است. الگوی متوازن ارائه شده در این نوشتار ضمن حفظ توانایی‌های مدل WAF، به طور کامل متوازن بوده و در

مسئله حالت سکون، یا انواع ناپیوستگی‌های کف، پاسخ ثابت ارائه می‌دهد. این الگوی عددی متوازن توانایی شبیه‌سازی جریان عبوری از روی مانع‌های کف آبراهه با شکل‌های مختلف بدون ایجاد ناپیوستگی و نوسان غیر فیزیکی در سطح آب را دارد.

۶- فهرست نشانه‌ها

عدد کورانت	C_k
بردار شار	F
شتاب گرانش زمین	g
ارتفاع آب داخل آبراهه	h
شماره سلول محاسباتی	i
شمار نقطه‌ها مشاهده شده	n
پارامتر تابع محدود کننده	$r^{(k)}$
خطای جذر میانگین مربع تفاضل‌ها	$RMSE$
خطای نسبی	R_{rel}
بردار چشمه	$S(U)$
شیب کف آبراهه	S_0
زمان	t
بردار متغیرها	U
وزن های الگوی شار میانگین وزن‌دار	w_i
متغیر مکان	x
میزان مشاهده شده	Y_{obs}
میزان محاسبه شده	Y_{cal}
میزان میانگین	Y_{ave}

نشانه‌های یونانی:

تابع محدود کننده	ϕ

۷- منبع‌ها

Asi, P. and Amiri, S.M. (2016). Numerical evaluation of flow variables in the presence of sudden changes in level of channel bottom applying weighted average flux scheme, MSc Thesis, Shiraz University of Technology, Shiraz. (In Persian)

Audusse, E., Bouchut, F., Bristeau, M.O. and Klein, R. (2004). Perthame, A fast and stable well-balanced scheme with hydrostatic reconstruction for shallow water flows, SIAM Journal on Scientific Computing, 25(6), 2050–2065.

Nieto, E.D. and Reina, G. (2008). Extension of WAF type methods to non-homogeneous Shallow Water Equations with pollutant. Journal of Scientific Computing, 37, 193-217.

Mahdavi, A. and Rakhshandehroo, G.R. (2012). Numerical Simulation of Unsteady Dam Break Flow Using Weighted Average Flux Scheme. Journal of Iran-Water Resources Research, 8, 64-80.

Pongsanguansin, T., Maleewong, M. and Mekchal, K. (2016). Shallow-water simulations by a well-balanced WAF finite volume method: a case study to the great flood in 2011, Thailand. Compute Geosci, 20, 1269–1285.

Toro, E.F. (2009). Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamic A Practical Introduction. 3rd ed. Springer, Verlag.

Toro, E.F. (2001). Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows. Wiley and Sons, LTD.

Toro, E.F., Ata, R., Pavan, S. and Khelladi, S. (2013). A Weighted Average Flux (WAF) scheme applied to shallow water equations for real-life applications. Advances in Water Resources, 62, 155-172.

Zhou, j.G., Causon, D.M., Ingram, D.M. and Mingham, C.G. (2002). Numerical solutions of the shallow water equations with discontinuous bed topography. International Journal of Numerical Methods in Fluids, 38, 769–788.