

Development of multiquadric meshless method for solving dam-break problem


Hanieh Kahid Basiri ¹, Reza Babaee ², Alireza Fallah ¹, Ehsan Jabbari ³

1- MSc Graduate, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

2- PhD Candidate, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

3- Associate Professor, Department of Civil Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

*e.jabbari@qom.ac.ir

Received: 15 October 2019, Accepted: 15 February 2020  J. Hydraul. Homepage: www.jhyd.iha.ir

Abstract

Introduction: In order to avoid meshing and its difficulties and costs, Multiquadric Radial Basis Function (MQ-RBF) method has been developed (Kansa, 1990) and has been examined for different types of physical phenomena. In this regard, the present study develops this meshless method for analysis of dam break problem. MQ is more convenient and accurate than other RBF methods for solving partial differential equations (Fallah et al., 2019). This meshless method have advantages such as; 1) creating a continuous response function all over the computational domain, 2) no need to discretize the entire domain with optimal usability in large-scale problems, 3) high capability in modelling irregular and complex geometries, 4) high ability to simulate discontinuities of responses, 5) easy generalization to 3D problems, and etc. Both the accuracy and the convergence rate of MQ depend strongly on its shape parameter (Koushki et al., 2019). So far, researchers have been working on many methods for determining the optimal shape parameter but a comprehensive method has not been developed yet (Babaee et al., 2019). In this study, the commonly previous methods have been considered for determining the optimal shape parameter and a novel idea has been presented for analyzing the flood flow caused by dam break. The efficiency and accuracy of the present approach compared to other solutions have been examined through three examples.

Methodology: The governing PDEs of dam break problem consist of the continuity equation and two momentum equations in two dimensions. MQ approximates solution of 2D equations system using an estimation function in which the unknown coefficients have to be determined for each unknown variable of the PDE, i.e. the velocities in two directions and the pressure. In one hand, for definition of the estimation function, the RBF methods need N center points inside the domain or on the boundaries which leads to N unknown coefficients. On the other hand, the governing PDEs and their boundary conditions again have to be satisfied on N collocation points inside the domain and on the boundaries, respectively, which leads to N algebraic equations to be solved for the mentioned unknown coefficients. A critical parameter, namely, the shape parameter strongly affects the precision of the estimation function which may be considered constant or variable from point to point for each estimation function. Determining the optimal value of the shape parameter has always been a challenge in using MQ and other RBF methods. In this study it has been shown that the shape parameter in all time steps can be considered the same and a new high-speed approach is proposed to determine its optimal value. In this approach, the initial conditions of the problem will be estimated using MQ function and it has been shown that the optimal value of the shape parameter in the initial

conditions is also the optimal value of the shape parameter for the next time steps and there is no need to be optimized for all next time steps. Therefore, the computational cost will be considerably reduced. Also for discretizing the time dependent terms, the forward finite difference method is used and it was shown that for discretizing the local terms, a semi-implicit method could be used by substituting MQ function, to be led to a linear system of algebraic equations. Consequently, the presented approach becomes more stable than the explicit methods.

In order to verify and validate the proposed approach, four numerical examples are presented. In two of examples with 1D and 2D behaviors, discontinuities in initial conditions and run times are different. Sharp discontinuities highlight the capabilities of the approach while in long run time show stability. Besides, results of the proposed approach have been compared with those of other numerical and analytical methods. Also, in this research, inefficiency of previously common methods for determining the optimal shape parameter in solving the dam-break problem was shown (Golbabai et al., 2015). In verification, the RMSE error criterion has been considered which results in errors less than 5 percent. In the third and fourth examples capability of the numerical model has been demonstrated by a two-dimensional dam break flow in symmetric and asymmetric conditions, respectively.

Conclusion: Using the MQ-RBF, the disadvantages of mesh-based methods including: high cost of meshing, need to fundamental solution, dependence on the conditions of each problem, singularity, continuous discretization of domain and need to a regular mesh will be eliminated.

Keywords: Dam-break problem, Radial basis function, Meshless method, Multiquadric, Shape parameter.

توسعه روش بدون شبکه چندربعی برای حل مسئله شکست سد

هانیه کاهید باصیری^۱، رضا بابایی^۲، علیرضا فلاح^۱، احسان جباری^{۳*}

- ۱- کارشناس ارشد مهندسی آب و سازه‌های هیدرولیکی، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم.
 ۲- دانشجوی دکتری مهندسی آب و سازه‌های هیدرولیکی، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم.
 ۳- دانشیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم.

*e.jabbari@qom.ac.ir

دریافت: ۱۳۹۸/۰۷/۲۳، پذیرش: ۱۳۹۸/۱۱/۲۶ و ب‌گاه نشریه هیدرولیک: www.jhyd.iha.ir

چکیده: در این پژوهش، روش بدون شبکه چندربعی برای حل مسئله شکست سد با هدف رفع برخی از نقطه‌های ضعف روش‌های معمول باشبکه توسعه یافت. به این منظور، دستگاه معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی و غیرپایای حاکم با استفاده از تابع چندربعی بازتولید و روند حل آن بیان شد. همچنین برای گسسته‌سازی جمله‌های زمانی از روش اختلاف محدود پیشرو استفاده و نشان داده شد که برای گسسته‌سازی جمله‌های مکانی روش ضمنی شبه‌خطی مناسب است. برای تعیین مهم‌ترین عامل در دقت و سرعت روش چندربعی، یعنی متغیر شکل بهینه، ضمن اثبات ناکارآمدی برخی از الگوریتم‌های پرکاربرد پیشین در حل مسئله شکست سد، یک راهکار جدید برای آن پیشنهاد گردید. در این راهکار، شرایط اولیه مسئله با تابع چندربعی بدون‌بایی و متغیر شکلی که دقیق‌ترین برآورد از آن را داشته باشد، به‌عنوان متغیر شکل بهینه انتخاب می‌گردد. نشان داده شد که متغیر شکل به‌دست‌آمده برای حل مسئله در گام‌های زمانی بعدی نیز بهینه می‌باشد و افزون بر این مقدار آن برای هر سه مجهول مسئله برابر است. به این ترتیب حجم محاسبات روش چندربعی به شدت کاهش می‌یابد. همچنین همگرایی و دقت قابل قبول رویکرد پیشنهادی طی حل چند مثال مختلف در مقایسه با دیگر روش‌های عددی و تحلیلی بررسی شد.

کلید واژگان: شکست سد، روش‌های عددی، روش‌های بدون شبکه، روش مالتی‌کوادریک، روش چندربعی، متغیر شکل.

۱- مقدمه

چندربعی برای حل معادله غیرخطی برگر استفاده کردند و به دقت بالایی نسبت به دیگر روش‌های عددی در همه‌ی مقدارهای ممکن عدد رینولدز دست یافتند. با توجه به اینکه متغیر شکل در تابع‌های پایه شعاعی دارای اهمیت زیادی است و تأثیر زیادی روی دقت محاسبات این تابع‌ها می‌گذارد، (Rippa (1999) توانست با استفاده از یک الگوریتم به یک مقدار بهینه برای متغیر شکل دست یابد. وی با بررسی و ارزیابی تأثیر متناسب متغیر شکل بر کیفیت تابع‌های چندربعی، معکوس چندربعی^۴ و گوسین نشان داد که مقدار بهینه متغیر شکل به شمار و توزیع نقطه‌های داده‌ها بستگی دارد. (Wong et al. (1999) نیز فن تجزیه میدان را برای روش چندربعی ارائه کردند. آنان نشان دادند

روش چندربعی^۱ زیرمجموعه روش‌های تابع‌های پایه شعاعی^۲ است که در آغاز توسط Hardy (1971) به‌منظور تقریب داده‌های پراکنده در سطوح جغرافیایی و تولید نقشه‌های توپوگرافی معرفی شد. برای نخستین بار، Kansa (1990) از این روش برای حل معادله‌های دیفرانسیل بیضوی، سهموی و هذلولوی استفاده نمود. وی متغیر شکل^۳ را به عنوان مهم‌ترین عامل در دقت این روش معرفی نمود. همچنین Kansa (1992) به روشی برای حل معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای برای میدان‌های غیرکارترین دوبعدی دست یافت و ادعا کرد که می‌توان آن را برای مسئله‌های سه‌بعدی نیز به کار برد. (Hon et al. (1998) از روش

³ Shape Parameter

⁴ Inverse Multiquadric

¹ Multiquadric (MQ)

² Radial Basis Function (RBF)

مدیریت آب‌های زیرزمینی نیز به کار برده شود. Yaghouti et al. (2017) برای بهینه کردن متغیر شکل از الگوریتم بهینه‌سازی Cross-Validation استفاده کردند. Chen et al. (2018) الگوریتم روش حل نمونه^۳ را برای یافتن متغیر شکل ارائه دادند. این الگوریتم در آغاز متغیر شکل بهینه را برای مسئله‌هایی که حل تحلیلی دارند به دست می‌آورد، آنگاه برای مسئله‌های مشابهی که حل تحلیلی ندارند، از آن استفاده می‌کند. Azarboni (2018) یک الگوریتم با دقتی بالاتر از دیگر روش‌های تعیین متغیر شکل بهینه ارائه داد. در این روش مسئله با شمار $N-2$ و N نقطه محاسباتی به ازای متغیر شکل‌های مختلفی حل می‌شود آنگاه آن متغیر شکلی که کمترین اختلاف را بین دو مجموعه نقطه‌های محاسباتی داشته باشد، بهینه خواهد بود. Koushki et al. (2019) با استفاده از الگوریتم ژنتیک، روشی برای یافتن متغیر شکل بهینه برای حل معادله لاپلاس در مسئله تراوش ارائه کردند. در این رویکرد متغیر شکل بهینه به دست آمده مستقل از شمار نقطه‌های محاسباتی به دست می‌آید. Fallah et al. (2019) برای نخستین بار، روش چندربعی را برای تحلیل تراوش در دامنه‌های دو و سه‌بعدی به کار بردند. آنان برای تعیین متغیر شکل بهینه، یک الگوریتم بهینه‌سازی بر پایه خطای ریشه میانگین مربعات معرفی کردند که زمان محاسبات را به‌طور چشمگیری کاهش می‌داد.

در پژوهش حاضر به‌منظور بهره‌مندی از برتری‌ها و دقت بالای روش چندربعی به ویژه در مسئله‌های با ناپیوستگی زیاد، از این روش برای حل مسئله شکست سد^۴ استفاده می‌شود. تاکنون بررسی‌های چندی برای حل مسئله شکست سد که هریک دارای نقطه‌های قوت و ضعف متفاوتی هستند انجام شده است. Ritter (1892) بررسی‌های اولیه در این زمینه را برای آبراهه‌های بدون اصطکاک انجام داد. برای حل معادله‌های شکست سد از سال 1980 تا 1990 روش‌های مختلفی برای معادله‌های با ناپیوستگی در دامنه پاسخ به کار گرفته شده است که کاربرد زیادی در حل جریان‌های آبراهه‌های باز دارد. از جمله Fennema & Chaudhry

که تجزیه میدان افزون بر افزایش سرعت در همگرایی، از تکنیک شدن ماتریس ضرایب نیز جلوگیری می‌کند. Wong et al. (2002) یک مدل چندلایه‌ای بر پایه رابطه‌های شعاعی برای تحلیل و مدل‌سازی جریان جزر و مد سه‌بعدی ارائه دادند. این روش بر پایه حل معادله‌های آب‌های کم‌عمق^۱ کانزا استوار است.

Chen et al. (2006) معادله برگر را برای مقادیرهای مختلف عدد رینولدز با استفاده از یکی از زیرمجموعه‌های روش چندربعی مدل‌سازی کرده و به این نتیجه رسیدند که با افزایش عدد رینولدز دقت مدل عددی افزایش خواهد یافت. Tatari & Dehghan (2009) از روش چندربعی برای حل معادله‌های سهموی یک‌بعدی استفاده کردند. آنان پی بردند که در حل معادله‌های وابسته به زمان، ماتریس ضرایب بد حالت^۲ خواهد شد و می‌توان با استفاده از گام‌های زمانی کوچک از بد حالت شدن ماتریس ضرایب جلوگیری کرد. به‌طور مستقل، Huang et al. (2010) با مشاهده این که با خطی شدن ضریب شکل دقت تابع‌های پایه شعاعی افزایش می‌یابد، متغیر شکل را برای معادله‌های بیضوی بهینه ساختند. آنان کران بالایی برای بازه اعداد انتخابی متغیر شکل در نظر گرفتند و این متغیر را در مقدارهای داخلی آن یافتند. Kansa et al. (2013) معادله‌های برگر سه‌بعدی وابسته به زمان را با روش چندربعی حل و با فن تجزیه دامنه، پیچیدگی دامنه‌های بزرگ را ساده‌سازی کردند و با کوچک کردن متغیر شکل، دقت نتایج را افزایش دادند. Biazar et al. (2016) در مورد کران‌های بالا و پایین رابطه‌های تعیین متغیر شکل تحقیق کردند و با معرفی یک روش برای تعیین آن‌ها، توانستند دقت روش چندربعی را افزایش دهند. Patel et al. (2017) از روش چندربعی در مدل کردن آبخوان‌های نامنظم آب زیرزمینی استفاده و متغیرهایی مانند ناهمگنی، انواع شرایط مرزی و فشار متغیر را مدل و با انجام تحلیل حساسیت روی متغیرهایی مانند اندازه گام زمانی، تراکم گره و اندازه میدان نتیجه گرفتند که روش چندربعی در دقت و هزینه محاسباتی به‌خوبی عمل می‌کند و می‌تواند به‌عنوان یک شبیه‌ساز بهینه در

3. Sample Solution Approach (SSA)
4. Dam Break

1. Shallow Water Equations (SWE)
2. Ill-Condition

از نقطه‌های ضعف نام‌برده برای حل مسئله شکست سد توسعه می‌یابد. به‌طور کلی‌تر، این توسعه در راستای حل دستگاه‌های معادله‌های دیفرانسیل غیرخطی ناپایا انجام می‌شود و راه توسعه را برای دیگر روش‌های پایه شعاعی هموار می‌کند. از آنجایی که دقت روش چندربعی به‌طور کامل به متغیر شکل بهینه آن وابسته است، برخی از روش‌های پرکاربرد پیشین برای محاسبه مقدار بهینه آن در حل مسئله شکست سد ارزیابی می‌شوند و پس از اثبات توانمند نبودن آن‌ها یک راهکار جدید پیشنهاد می‌گردد. این راهکار برخی از مشکلات الگوریتم‌های پیشین اعم از (۱) وابسته بودن به حل دیگری از مسئله، (۲) وابستگی به هندسه و فیزیک مسئله (تجربی بودن)، (۳) حل مسئله به ازای دو مجموعه از نقطه‌های محاسباتی، (۴) بهینه‌سازی متغیر شکل بهینه در هر گام زمانی را تا حد زیادی مرتفع می‌کند.

۲- روابط، شرایط اولیه و مرزی حاکم بر

پدیده شکست سد

معادله‌های حاکم بر جریان ناشی از شکست سد در حالت دوبعدی عبارت است از (Sun et al., 2019; Koushki et al., 2013):

$$U_t + E_x + F_y = S \quad (1)$$

که در آن:

$$U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(s_{0x} - s_{fx}) \\ gh(s_{0y} - s_{fy}) \end{bmatrix} \quad (2-a)$$

$$E = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + \frac{gh^2}{2} \\ huv \end{bmatrix} \quad (2-b)$$

$$F = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + \frac{gh^2}{2} \end{bmatrix} \quad (2-c)$$

(1980) با استفاده از روش‌های اختلاف محدود مانند مک‌کورمک^۱ و گابوتی^۲، تحلیل جریان ناشی از شکست سد را انجام داده‌اند. (2004) Gottardi & Venutelli شکست سد را با استفاده از یک روش اختلاف مرکزی مرتبه دوم و حل معادله‌های دوبعدی غیرهمگن سنت و نانت^۳ با دقت بالایی شبیه‌سازی کردند. (2011) Chang et al. برای شبیه‌سازی پدیده شکست سد، یک مدل عددی بدون شبکه را با حل معادله‌های آب کم‌عمق در آبراه‌های باز با بستر خشک و مرطوب بر مبنای روش هیدرودینامیک ذرات هموار^۴ توسعه داده‌اند. (2013) Sun et al. یک روش بدون شبکه پایه شعاعی محلی^۵ را برای حل معادله‌های آب‌های کم‌عمق به کار بردند و نشان دادند که برای حل مسئله‌های دوبعدی با دامنه نامنظم قابل کاربرد است ولی استفاده از آن هزینه محاسباتی زیادی دارد. (2017) Mužík & Holičková نیز روش محلی بدون شبکه پتروف-گالرکین^۶ را برای شبیه‌سازی پدیده شکست سد به کار گرفتند. بنا بر نتایج، این روش دارای دقت خوبی بوده ولی به دلیل استفاده از شمار زیاد گره‌های محاسباتی پرهزینه است.

بدیهی است که روش‌های به‌کار رفته در حل مسئله شکست سد با توانمندی‌ها و کاستی‌هایی روبه‌رو بوده‌اند. به‌عنوان مثال، روش‌های عددی باشبکه مانند روش حجم محدود، نیازمند شبکه‌بندی کل دامنه مسئله هستند؛ لذا در میدان‌های بزرگ مقیاس مانند میدان شکست سد به علت استفاده از عنصرهای (المان) بزرگ با کاهش دقت همراه هستند. روش‌های اختلاف محدود نیز برای مدل‌سازی هندسه و مرزهای مسئله به نقطه‌های کمکی منظم و نامنظم نیاز دارد. چنین روش‌هایی پاسخ را در نقطه‌های خاصی از دامنه به دست می‌آورند و در دیگر نقطه‌ها مستلزم درون‌یابی و پذیرش یک میزان خطا هستند. همچنین بسیاری از روش‌های عددی در مدل‌سازی ناپیوستگی‌ها خطای زیادی دارند یا هزینه محاسباتی آن‌ها چشمگیر است. در پژوهش حاضر، روش چندربعی با هدف رفع برخی

⁵ Local Radial-Basis-Function Differential Quadrature (LRBF-DQ)

⁶ Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)

¹ Mac-Cormack

² Gabutti

³ Saint Venant

⁴ Smoothed-Particle Hydrodynamics (SPH)

$$\begin{cases} h = h_d \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad (7)$$

با توجه به زمان در نظر گرفته شده پس از شکست سد در حل این مسئله و طول بالادست و پایین دست، موج آب به مرزهای بالادست و پایین دست نمی رسد و لذا مقادیرهای ارتفاع و سرعت آب در این مرزها ثابت در نظر گرفته شده است.

برای اعمال شرایط اولیه در مسئله شکل ۱، مقادیرهای ارتفاع آب به ازای هر نقطه در ناحیه Ω_1 برابر h_0 و در ناحیه Ω_2 برابر h_d در نظر گرفته می شود.

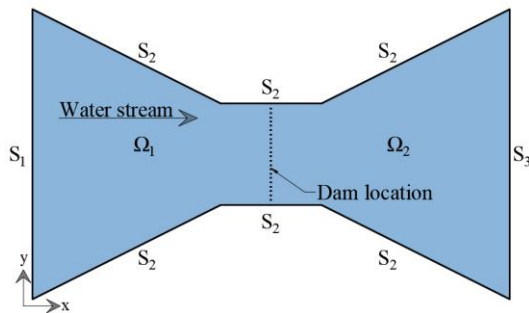


Fig. 1 Geometry and boundary conditions in an arbitrary 2D domain

شکل ۱ هندسه و شرایط مرزی در میدان دوبعدی دلخواه

۳- روش چندربعی

پاسخ معادله‌های دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر مسئله‌های دوبعدی به روش چندربعی به صورت زیر تقریب زده می شوند (Gottardi and Venutelli, 2004):

$$f(x, y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + C^2} \quad (8)$$

در رابطه (۸)، N شمار کل نقطه‌های محاسباتی در داخل دامنه، x_j و y_j مختصات مرکزهای محاسباتی و C متغیر شکل است.

در روش چندربعی دسته دیگری از نقطه‌ها با عنوان نقطه‌های برهم‌نهی^۱ به کار می‌رود. این نقطه‌ها به منظور اعمال معادله‌های حاکم و شرایط مرزی به ترتیب در داخل میدان محاسباتی و روی مرزها قرار می‌گیرند تا ضرایب مجهول λ_j تعیین شوند. نقطه‌های برهم‌نهی می‌توانند بر

در مجموعه معادله‌های (۲)، x فاصله در طول آبراهه، y فاصله در عرض آبراهه، t زمان، h ارتفاع آب، u و v به ترتیب سرعت در راستای x و y ، g شتاب ثقل، S_{0x} و S_{0y} شیب کف آبراهه به ترتیب در راستای x و y ، S_{fx} و S_{fy} شیب اصطکاکی به ترتیب در راستای x و y است. در این پژوهش از شیب و اصطکاک کف آبراهه صرف نظر شده است؛ بنابراین سمت راست معادله‌ها برابر صفر می‌شوند.

شرایط اولیه پدیده شکست سد به شرح زیر هستند:
الف) شرایط اولیه برای بالادست سد

$$\begin{cases} h = h_0 \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad 0 < x \leq \frac{L}{2} \quad (3)$$

ب) شرایط اولیه برای پایین دست سد

$$\begin{cases} h = h_d \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad \frac{L}{2} < x < L \quad (4)$$

در رابطه‌های (۳) و (۴)، L طول آبراهه، h_0 ارتفاع اولیه آب در بالادست و h_d ارتفاع اولیه آب در پایین دست است. برای اعمال شرایط مرزی پدیده شکست سد، مسئله در دو حالت یک و دوبعدی بررسی شده است. در حالت یک بعدی، برای اعمال شرایط مرزی، ارتفاع آب در بالادست و پایین دست سد، یک مقدار ثابت در نظر گرفته می‌شود. در حالت دوبعدی برابر شکل ۱، انواع شرایط مرزی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

الف) شرایط مرزی نوع S_1 :

$$\begin{cases} h = h_0 \\ u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad (5)$$

ب) شرایط مرزی نوع S_2 :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \\ u & v \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

در رابطه (۶)، \vec{n} بردار نرمال مرز موردنظر است.

ج) شرایط مرزی نوع S_3 :

¹ Collocation Points

برآورد برخی تابع‌ها و حل بعضی معادله‌های دیفرانسیل پیشنهاد کرد. همان‌طور که مشخص است این رابطه‌ها برای همه مرکزهای محاسباتی ثابت هستند و به علت دارا بودن ضرایب تجربی، برای حل همه مسئله‌ها پاسخگو نیستند.

پژوهشگران روش‌های دیگری برای تعریف متغیر شکل متغیر و مختص هریک از نقطه‌های محاسباتی پیشنهاد داده‌اند که در جدول ۱ آمده است (Golbabai et al., 2015). در رابطه‌های موجود در جدول ۱، مقدارهای بیشینه و کمینه متغیر شکل به ترتیب برابر $C_{\max} = 3/\sqrt{N}$ و $C_{\min} = 1/\sqrt{N}$ هستند.

دقت رابطه‌های اشاره‌شده بسته به نوع تابع پایه شعاعی، بعد مسئله، نوع مسئله (درون‌یابی یا حل معادله‌های دیفرانسیل) شرایط مرزی (طبیعی یا اجباری) و نوع توزیع نقطه‌ها (یکنواخت یا نایکنواخت) متفاوت است. همچنین رابطه‌های تعیین متغیر شکل متغیر به دلیل ایجاد اختلاف‌های بیشتر در درایه‌های ماتریس ضرایب، احتمال بدحالت شدن آن را بالاتر می‌برند.

در پژوهش حاضر، در آغاز نامناسب بودن روش‌های نامبرده برای حل مسئله شکست سد نشان داده می‌شود آنگاه پیشنهاد نوی که بتواند بعضی از نقطه‌های ضعف موجود اعم از؛ نیازمندی به یک حل دیگر از مسئله، بالا بودن هزینه محاسبات، پایین بودن دقت پاسخ‌ها، همگرا شدن به مقدارهای بهینه محلی و ... را برطرف کند، ارائه خواهد شد. در این راهکار، شرایط اولیه مسئله با تابع چنددرجی درون‌یابی و متغیر شکلی که دقیق‌ترین برآورد از آن را داشته باشد، به‌عنوان متغیر شکل بهینه انتخاب می‌گردد. نکته مهم این که متغیر شکل به‌دست‌آمده برای حل مسئله در گذر زمان نیز بهینه می‌باشد و نیازی به بهینه کردن آن در هر گام زمانی نیست. به‌این ترتیب حجم محاسبات روش چنددرجی به شدت کاهش می‌یابد و مدل از نظر زمان پردازش بهینه می‌شود.

در این روند از خطای جذر میانگین مربعات پاسخ روش چنددرجی نسبت به شرایط اولیه مسئله به‌عنوان معیار ارزیابی استفاده می‌شود (رابطه ۹) و هر متغیر شکلی که خطای متناظر آن کمینه باشد، به‌عنوان متغیر شکل بهینه

مرکزهای محاسباتی منطبق باشند یا نباشند. در این پژوهش در راستای کاربرد آسان‌تر روش چنددرجی، مرکزهای محاسباتی و برهم‌نهی منطبق بر یکدیگر در نظر گرفته می‌شوند (شکل ۲).

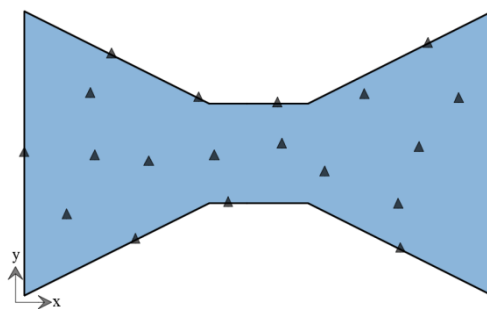


Fig. 2 Distribution of computation and collocation centers

شکل ۲ توزیع مرکزهای محاسباتی و برهم‌نهی

نقطه‌های یادشده برخلاف روش‌های باشکبه، نیاز به ارتباط اولیه با یکدیگر ندارند، لذا کاربرد روش چنددرجی در هندسه‌های پیچیده و مسئله‌های سه‌بعدی بسیار ساده است و دیگر هزینه‌های محاسباتی پیش‌پردازش شبکه‌بندی را ندارد.

چگونگی توزیع نقطه‌های محاسباتی، بسته به نوع هندسه و پدیده موردبررسی می‌تواند به‌صورت یکنواخت یا نایکنواخت انتخاب شود. در این پژوهش برای هر دو حالت یک‌بعدی و دوبعدی، توزیع یکنواخت در نظر گرفته شده است.

۳-۱- متغیر شکل بهینه

دقت روش چنددرجی بسیار به متغیر شکل آن وابسته است. تاکنون تلاش‌های بسیاری برای تعیین مقدار بهینه متغیر شکل صورت گرفته است که هرکدام از آن‌ها دارای نقطه‌های ضعف و قوتی هستند. (Hardy (1971) رابطه $c = 1/0.815d$ را برای متغیر شکل بهینه ارائه داد که در آن $d = (1/N) \sum_{i=1}^N d_i$ ، N شمار نقطه‌های محاسباتی و d_i فاصله هر مرکز محاسباتی از نزدیک‌ترین مرکز مجاورش است. Franke (1979) رابطه $c = \sqrt{N} / 1.25D$ را ارائه داد که در آن D قطر کوچک‌ترین دایره‌ای است که همه مرکزهای محاسباتی را پوشش می‌دهد. Fasshauer (2002) نیز رابطه $c = 2/\sqrt{N}$ را با کاربرد در

$$h(x,y) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + C_h^2} \quad (10-a)$$

$$p(x,y) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + C_p^2} \quad (10-b)$$

$$q(x,y) = \sum_{j=1}^N \beta_j \sqrt{(x-x_j)^2 + (y-y_j)^2 + C_q^2} \quad (10-c)$$

در مجموعه رابطه‌های (۱۰)، $p = hv$ و $q = hu$ هستند. C_h ، C_p و C_q نیز متغیرهای شکل مربوط به h ، p و q هستند. α_j ، β_j و نیز ضرایب مجهول هستند که لازم است به دست آیند. در این پژوهش نشان داده می‌شود که در حل این مسئله $C = C_h = C_p = C_q$ می‌باشد. بدیهی است این امر هزینه محاسبات برای یافتن متغیر شکل را به شدت کاهش می‌دهد.

برای گسسته‌سازی جمله‌های زمانی $\partial p / \partial t$ ، $\partial h / \partial t$ و $\partial q / \partial t$ در دستگاه معادله‌های حاکم، از روش اختلاف پیشرو از رابطه (۱۱) استفاده می‌شود.

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\psi^{n+1} - \psi^n}{\Delta t} \quad (11)$$

در رابطه (۱۱)، ψ می‌تواند h ، p یا q باشد. n نیز تعیین‌کننده گام زمانی است. با ترکیب رابطه (۱) و (۱۱) گسسته‌سازی معادله‌ها به روش صریح و ضمنی به شرح زیر به دست می‌آیند.

۴-۱- باز تولید معادله‌های حاکم به روش صریح

دستگاه معادله‌های حاکم به روش صریح برابر مجموعه رابطه‌های (۱۲) بیان می‌شود.

$$h^{n+1} = h^n - (\Delta t) \frac{\partial q^n}{\partial x} - (\Delta t) \frac{\partial p^n}{\partial x} \quad (12-a)$$

$$q^{n+1} = q^n - (\Delta t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^n}{h^n} + \frac{1}{2} g (h^n)^2 \right) - (\Delta t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q^n \times p^n}{h^n} \right) \quad (12-b)$$

$$p^{n+1} = p^n - (\Delta t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q^n \times p^n}{h^n} \right) - (\Delta t) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{p^n}{h^n} + \frac{1}{2} g (h^n)^2 \right) \quad (12-c)$$

جدول ۱ روش‌های تعیین متغیر شکل بهینه مختص هر نقطه محاسباتی

Table 1 Methods for determining the optimal shape parameter for each computational center

Method	Equation
ESP	$c_j = [c_{\min}^2 \left(\frac{c_{\max}^2}{c_{\min}^2} \right)^{(j-1)(N-1)}]^{0.5}$; $j = 1, \dots, N$
ILSP	$c_j = c_{\min} + \left(\frac{c_{\max} - c_{\min}}{N-1} \right) \times j$; $j = 1, \dots, N$
DLSP	$c_j = c_{\max} + \left(\frac{c_{\min} - c_{\max}}{N-1} \right) \times j$; $j = 1, \dots, N$
RSP	$c_j = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min}) \times \text{rand}(1, N)$; $j = 1, \dots, N$
TSP	$c_j = c_{\min} + (c_{\max} - c_{\min}) \times \sin((j-1)(\pi/2(N-1)))$; $j = 1, \dots, N$
HSP	$c_j = \begin{cases} \text{TSP}_j \\ \text{DLSP}_j \\ \text{ESP}_j \end{cases}$; $j = 1, \dots, N$
BSP	$c_j = \begin{cases} c_{\min} & ; j \text{ be odd} \\ c_{\max} & ; j \text{ be even} \end{cases}$

انتخاب می‌شود.

$$E_{rms}^j = (1/N) \sqrt{\sum_{i=1}^N (f(x_i, C^j) - f(x_i))^2} \quad (9)$$

$j = 1, 2, 3, \dots$

در این رابطه، $f(x_i)$ مقدار شرایط اولیه مسئله و $f(x_i, C^j)$ مقدار برآورد تابع چندربعی به ازای متغیر شکل j ام در نقطه محاسباتی نام است.

۴- باز تولید معادله‌های حاکم و شرایط مرزی

با تابع چندربعی

برای مقدارهای بار آبی، دبی در راستای x (در جهت جریان) و دبی در راستای y (عمود بر جهت جریان)، تابع‌های برآورد چندربعی مانند رابطه‌های (۱۰) در نظر گرفته می‌شود:

$$b = (-\Delta t) \left(\frac{q^n \times (p^n)}{(h^n)^2} \right) \quad (14-b)$$

$$d = (\Delta t) \left(\frac{q^n}{h^n} \right) \quad (14-c)$$

$$e = (\Delta t) \left(\frac{p^n}{h^n} \right) \quad (14-a)$$

$$f = (\Delta t) \left(\frac{g(h^n)^3 - (p^n)^2}{(h^n)^2} \right) \quad (14-b)$$

عبارات مجموعه معادله‌های (۱۴) برای پرهیز از غیرخطی شدن معادله‌ها در گام زمانی n نوشته شده است به همین دلیل این روش را روش ضمنی شبه‌خطی می‌نامیم. برای گسسته‌سازی معادله‌ها، مشتق تابع چندربعی مورد نیاز است که حالت دوبعدی آن، به صورت رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) محاسبه می‌شوند.

الف: مشتق تابع چندربعی نسبت به x در حالت دوبعدی:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{(x - x_j)}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + C^2}} \quad (15)$$

ب: مشتق تابع چندربعی نسبت به y در حالت دوبعدی:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{(y - y_j)}{\sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + C^2}} \quad (16)$$

دستگاه معادله‌های نشان داده شده در مجموعه رابطه (۱۳) با استفاده از تابع‌های برآورد رابطه‌های (۱۰) و نیز با اعمال مشتق آن‌ها به صورت رابطه‌های (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) بازنویسی می‌شوند.

الف: معادله اول:

$$\sum_{j=1}^N (\lambda_j)^{n+1} \sqrt{(r_j)^2 + (C)^2} + \sum_{j=1}^N (\alpha_j)^{n+1} \left(\frac{\Delta t (x - x_j)}{\sqrt{(r_j)^2 + (C)^2}} \right) + \sum_{j=1}^N (\beta_j)^{n+1} \left(\frac{\Delta t (y - y_j)}{\sqrt{(r_j)^2 + (C)^2}} \right) = h^n \quad (17)$$

ب: معادله دوم:

بازتولید معادله‌های حاکم در روش صریح به سه معادله جدا و در نتیجه به سه دستگاه معادله‌های جبری $N \times N$ می‌انجامد. در روش صریح که مقدارهای گام‌های بعدی با استفاده از مقدارهای گام‌های پیشین محاسبه می‌شوند، یک شرط پایداری برای مدل الزامی است. تابه‌حال چنین شرطی برای روش ترکیبی اختلاف محدود پیشرو-چندربعی مشخص نشده است و نیازمند تحقیقات بیشتری است. برخلاف روش صریح، حل مسئله به روش ضمنی که یک معلوم در گام زمانی کنونی و بیش از یک مجهول در گام زمانی بعدی دارد، همواره پایدار است و البته در ترکیب با روش چندربعی به حل دستگاه معادله‌های جبری غیرخطی منجر می‌شود. از این رو در این پژوهش روش ضمنی شبه خطی به کار برده شده است که در ادامه تشریح می‌شود.

۴-۲- بازتولید معادله‌های حاکم به روش ضمنی شبه

خطی

دستگاه معادله‌های حاکم به روش ضمنی طبق مجموعه رابطه‌های (۱۳) بیان می‌شود.

$$h^{n+1} + (\Delta t) \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x} + (\Delta t) \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} = h^n \quad (13-a)$$

$$(a) \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} + (b) \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} + q^{n+1} + (2d) \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x} = q^n \quad (13-b)$$

$$(e) \frac{\partial q^{n+1}}{\partial y} + (d) \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} = q^n$$

$$(b) \frac{\partial h^{n+1}}{\partial x} + (f) \frac{\partial h^{n+1}}{\partial y} + (e) \frac{\partial q^{n+1}}{\partial x} + p^{n+1} = p^n \quad (13-c)$$

$$(d) \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x} + (2e) \frac{\partial p^{n+1}}{\partial y} = p^n$$

در رابطه بالا، متغیرهای q ، b ، d ، e و f در مجموعه رابطه‌های (۱۴) تعریف شده‌اند.

$$a = (\Delta t) \left(\frac{g(h^n)^3 - (q^n)^2}{(h^n)^2} \right) \quad (14-a)$$

در این رابطه h_e^i و h_{MQ}^i پاسخ‌های به دست آمده از به ترتیب روش پیشنهادی و دیگر روش‌ها هستند.

۵-۱- مثال اول

در این مثال، آبراهه‌ای به طول ۱۰۰ متر که سد در وسط آن قرار گرفته و ارتفاع آب در بالادست و پایین‌دست آن به ترتیب برابر با ۱۰ و ۲ متر است، مد نظر است.

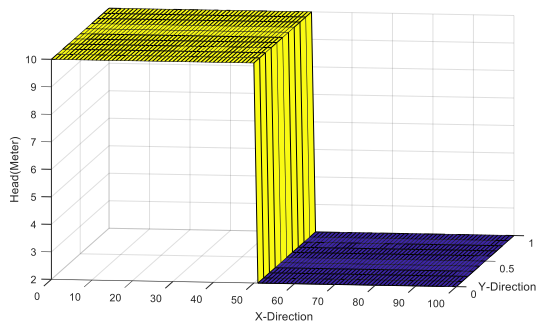


Fig. 3 Estimation of the initial conditions using present method in example 1

شکل ۳ برآورد شرایط اولیه با رویکرد حاضر در مثال اول

برآورد شرایط اولیه مسئله با تابع چندربعی برابر شکل ۳ به دست آمده است. چنانکه که دیده می‌شود روش نامبرده با دقت بسیار بالایی ناپیوستگی موجود در تراز آب شرایط اولیه مسئله شکست سد را شبیه‌سازی کرده است. در این راستا مقدار متغیر شکل بهینه ۰/۰۵ به دست آمده و از همین مقدار برای حل مسئله در هر گام زمانی نیز استفاده شده است.

نیمرخ سطح آزاد آب با گذشت زمان ۳/۵۶ ثانیه پس از شکست ناگهانی سد در شکل ۴ نشان داده شده است.

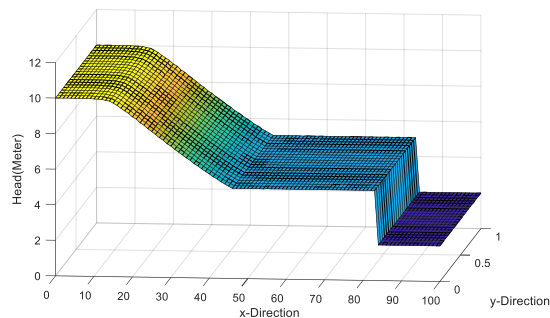


Fig. 4 Water free surface in example1 using present method ($t=3.56s$)

شکل ۴ سطح آزاد آب در مثال یک با روش حاضر ($t=3/56s$)

$$\sum_{j=1}^N (\lambda_j)^{n+1} \left(\frac{a(x-x_j)+b(y-y_j)}{\sqrt{(r_j)^2+(C)^2}} \right) + \sum_{j=1}^N (\alpha_j)^{n+1} \left(\frac{r_j^2+C^2+2d(x-x_j)+e(y-y_j)}{\sqrt{(r_j)^2+(C)^2}} \right) + \sum_{j=1}^N (\beta_j)^{n+1} \left(\frac{d(y-y_j)}{\sqrt{(r_j)^2+(C)^2}} \right) = q^n \quad (18)$$

ج: معادله سوم:

$$\sum_{j=1}^N (\lambda_j)^{n+1} \left(\frac{f(y-y_j)+b(x-x_j)}{\sqrt{(r_j)^2+(C)^2}} \right) + \sum_{j=1}^N (\alpha_j)^{n+1} \left(\frac{e(x-x_j)}{\sqrt{(r_j)^2+(C)^2}} \right) + q^n + \sum_{j=1}^N (\beta_j)^{n+1} \left(\frac{r_j^2+C^2+d(x-x_j)+2e(y-y_j)}{\sqrt{(r_j)^2+(C)^2}} \right) = p^n \quad (19)$$

معادله‌های (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) در کنار یکدیگر دستگاه معادله‌های حاکم بر پدیده شکست سد در روش ضمنی شبه‌خطی چندربعی-اختلاف محدود پیشرو را تشکیل می‌دهند. آشکار است که معادله‌های فوق برای حل هر مسئله دوبعدی با شمار N نقطه محاسباتی منجر به حل یک دستگاه معادله‌های جبری $3N \times 3N$ برای محاسبه ضریب‌های λ_j^{n+1} ، α_j^{n+1} و β_j^{n+1} در هر گام زمانی می‌شوند. با حل دستگاه معادله‌ها، تابع‌های برآورد ارتفاع و دبی در دو راستای یعنی رابطه‌های (۱۰) در هر گام زمانی به دست می‌آیند.

۵- مثال‌های عددی

در این بخش به منظور ارزیابی رویکرد پیشنهادی پژوهش حاضر، سه مثال عددی در حالت دوبعدی ارائه می‌شود. در دو مثال اول، عرض آبراهه ثابت و برابر واحد است و لذا می‌توان پاسخ آن را با پاسخ دقیق یک‌بعدی صحت‌سنجی کرد. در مثال سوم آبراهه‌ای با تنگ‌شدگی موضعی در نظر گرفته شده است که در آن تغییرات عرضی وجود دارد. به عنوان معیاری برای سنجش خطای رویکرد حاضر نسبت به دیگر روش‌ها از خطای جذر میانگین مربعات^۱ برابر رابطه زیر استفاده شده است.

$$RMSE = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^N (h_e^i - h_{MQ}^i)^2} \quad (20)$$

¹ Root Mean Square Error (RMSE)

ده روش عنوان شده در بخش ۳-۱ برای تعیین متغیر شکل بهینه در حل این مثال به کار گرفته شده است. در این حالت، شرایط مسئله اعم از شمار نقطه‌های محاسباتی، اندازه گام زمانی و ... مشابه شرایط حل مسئله در حالت استفاده از راهکار پیشنهادی این پژوهش در نظر گرفته شد تا امکان مقایسه فراهم شود. نتایج جدول ۲ نشان می‌دهد که این روش‌ها دارای دقت لازم برای حل معادله‌های حاکم بر پدیده شکست سد نیستند.

۵-۲- مثال دوم

در این مثال آبراهه‌ای با طول ۲۰۰۰ متر در نظر گرفته شده است. در وسط این آبراهه یک سد قرار گرفته است که ارتفاع آب در بالادست آن برابر ۱۰ متر و در پایین دست آن برابر ۵ متر است.

دقت برآورد شرایط اولیه مسئله با تابع چندربعی در شکل ۶ نشان داده شده و در آن مقدار متغیر شکل بهینه ۰/۰۶۵ به دست آمده است.

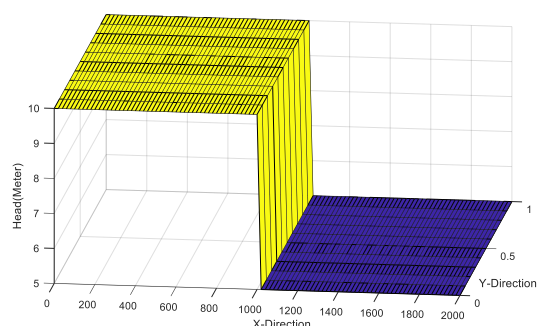


Fig. 6 Estimation of the initial conditions using present method in example 2

شکل ۶ برآورد شرایط اولیه با رویکرد حاضر در مثال دو

ارتفاع سیلاب در حال حرکت در طول آبراهه با گذر زمان ۶۰ ثانیه پس از شکست ناگهانی سد در شکل ۷ نشان داده شده و مشابه مثال اول در شکل ۸ صحت‌سنجی شده است. در این مثال بیشینه خطای رویکرد حاضر نسبت به حل دقیق مسئله ۴/۷۸ درصد است (Yekta, 2011).

در این مثال، عملکرد رویکرد حاضر در یک زمان به نسبت زیاد پس از شکست سد نشان داده شده است. همان‌طور که دیده می‌شود در این مثال گذر زمان منجر به افزایش خطا یا نوسان‌های غیرفیزیکی و ناپایداری نمی‌شود. لازم به

نتایج رویکرد حاضر در محور طولی آبراهه در مقایسه با حل دقیق مدل یک‌بعدی آن در شکل ۵ آمده است (Yekta, 2011).

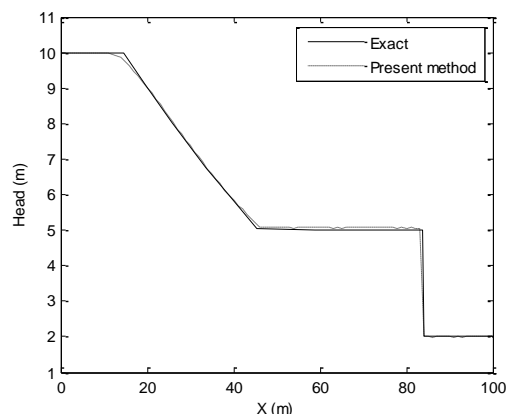


Fig. 5 Comparison between present method and 1D exact solution in example 1

شکل ۵ مقایسه نتایج رویکرد حاضر با حل دقیق یک‌بعدی در مثال اول

چنانکه که دیده می‌شود رویکرد حاضر با خطای اندکی (بیشینه خطا برابر ۴/۵۲ درصد) نسبت به حل دقیق، پاسخ‌های مسئله را برآورد کرده است. همچنین در قسمت‌هایی که ناپیوستگی وجود دارد، عملکرد مناسبی داشته و برخلاف برخی از دیگر روش‌ها دچار نوسانهای غیرفیزیکی نشده است. لازم به یادآوری است که چنین دقتی با انتخاب گام زمانی ۰/۰۱۷۸ ثانیه میسر شده است و با افزایش گام‌های زمانی میزان خطا بیشتر می‌شود. دلیل این امر ناپیوستگی به نسبت شدید موجود در پاسخ مسئله است. هرچه این ناپیوستگی شدیدتر باشد، می‌بایست گام زمانی کوچکتر در نظر گرفته شود.

جدول ۲ خطای جذر میانگین مجموع مربعات روش‌های

مختلف تعیین متغیر شکل بهینه در مثال ۱

Table 2 RMSE of different methods for determining the optimal shape parameter in example 1

RMSE	Method	RMSE	Method
4.51E+10	DLSP	0.072145	Hardy
9068.147	RSP	0.07017	Frank
0.214747	TSP	3.163503	Fasshauer
0.071481	HSP	0.071641	ESP
0.120015	BSP	4.51E+10	ILSP
		0.005461	Present method

جدول ۳ خطای جذر میانگین مجموع مربعات روش‌های مختلف تعیین متغیر شکل بهینه در مثال ۲

Table 3 RMSE of different methods for determining the optimal shape parameter in example 2

RMSE	Method	RMSE	Method
0.021894	DLSP	0.021672	Hardy
0.021619	RSP	0.021873	Frank
0.021822	TSP	0.021758	Fasshauer
0.021849	HSP	0.021659	ESP
0.02181	BSP	0.021727	ILSP
		0.010036	Present method

۵-۳- مثال سوم

در این مثال، آبراه‌ای به طول ۲۵۰ و عرض ۱۸۰ متر با تنگ‌شدگی موضعی به میزان ۵۰ متر از هر طرف در ۵۰ متر میانی آبراهه دیده می‌شود. سد در میانه آبراهه قرار دارد و ارتفاع آب در بالادست و پایین‌دست آن به ترتیب برابر ۱۰ و ۹ متر است. آشکار است که در این مسئله جریان ناشی از شکست سد رفتار به طور کامل دوبعدی دارد. دقت برآورد شرایط اولیه با متغیر شکل بهینه ۰/۰۰۵ در شکل ۹ قابل مشاهده است. در لحظه $t = 0$ ثانیه سد به صورت ناگهانی شکسته شده و جریان آب برقرار می‌شود. ارتفاع این جریان با رویکرد حاضر محاسبه شده و پس از گذشت زمان ۵/۱۰۴ ثانیه با گام زمانی ۰/۶ ثانیه در شکل ۱۰ ارائه شده است.

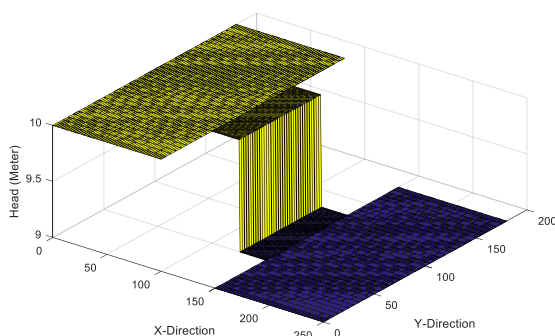


Fig. 9 Estimation of the initial conditions using present method in example 3

شکل ۹ برآورد شرایط اولیه با رویکرد حاضر در مثال سوم

به دلیل در دسترس نبودن حل دقیق برای این مثال، برای صحت سنجی از نتایج نرم‌افزار Flow 3D استفاده شده که

یادآوری است که گام زمانی این مثال ۰/۲۰۶ ثانیه در نظر گرفته شده است. در مقایسه این مقدار با گام زمانی مثال اول این چنین برمی‌آید که در رویکرد پیشنهادی این پژوهش هرچه ناپیوستگی مسئله شدیدتر باشد، باید اندازه گام زمانی کمتر انتخاب شود تا دقت مناسب به دست آید.

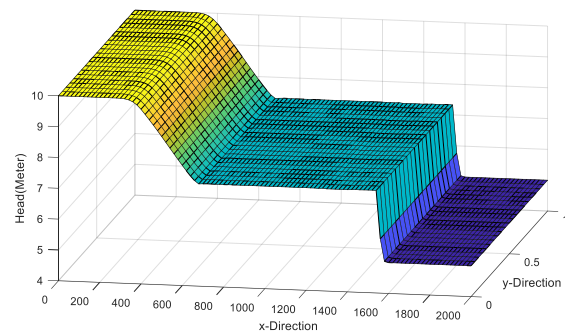


Fig. 7 Water free surface in example 2 ($t=60$) using present method

شکل ۷ سطح آزاد آب در مثال دوم با روش حاضر ($t=60$)

مشابه مثال اول، در این مثال هم رابطه‌های پیشین تعیین متغیر شکل به کار برده شد و بر مبنای جدول ۳ دیده می‌شود که نتایج به دست آمده اگرچه نسبت به مثال اول قابل قبول تر هستند ولی همچنان بدون دقت مناسب در مقایسه با نتایج روش پیشنهادی می‌باشند. دلیل این امر ناپیوستگی شدیدتر مثال اول است. بنابراین می‌توان گفت هرچه ناپیوستگی شدیدتر باشد، افزون بر گام زمانی، اهمیت متغیر شکل بهینه بیشتر خواهد بود.

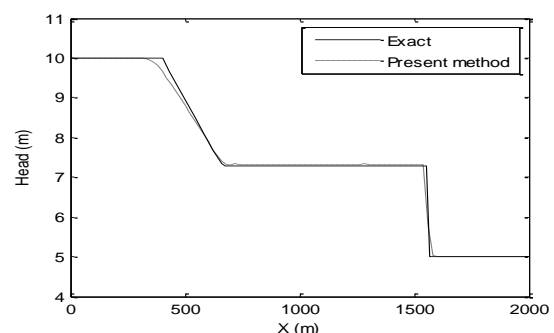


Fig. 8 Comparison between present method and 1D exact solution in example 2

شکل ۸ مقایسه نتایج رویکرد حاضر با حل دقیق یک‌بعدی در مثال دو

۵-۴- مثال چهارم

در این مثال، برخلاف مثال پیش، هندسه میدان محاسباتی نامتقارن در نظر گرفته شده است (شکل ۱۲). ارتفاع آب در بالادست و پایین دست سد به ترتیب برابر ۱۰ و ۵ متر است (Muzík and Holickova, 2003).

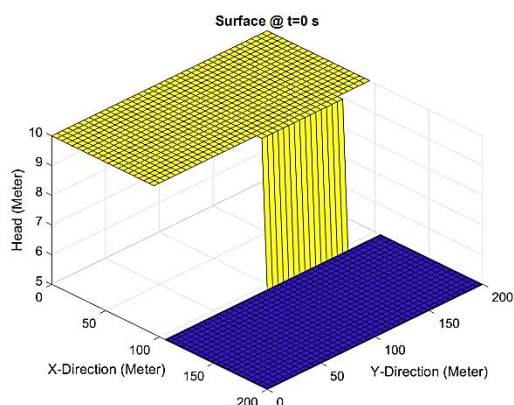


Fig. 13 Estimation of the initial conditions using present method in example 3

شکل ۱۳ برآورد شرایط اولیه با رویکرد حاضر در مثال چهارم

نتایج به دست آمده از برآورد شرایط اولیه با رویکرد حاضر در شکل ۱۳ آورده شده است. در این شرایط متغیر شکل بهینه ۰/۰۵ محاسبه شده است. در شکل های ۱۴ و ۱۵ نیز به ترتیب نیمرخ سطح آب و بردارهای سرعت با گذر زمان ۷/۲ ثانیه پس از شکست سد نشان داده شده اند.

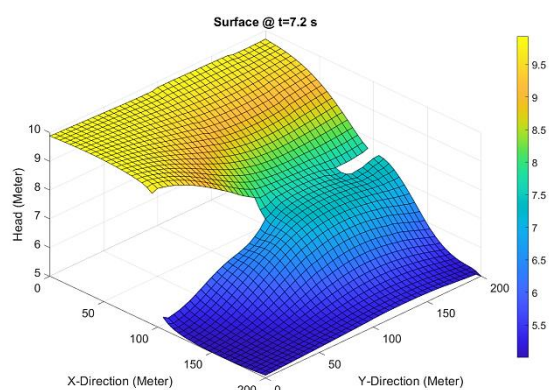


Fig. 14 Water free surface in example 4 using present method (t=7.2s)

شکل ۱۴ سطح آزاد آب در مثال چهارم با روش حاضر (t=۷.۲s)

نتایج به ازای $y=124.50$ m ارائه شده است (شکل ۱۱). همان طور که دیده می شود، رویکرد حاضر شبیه سازی واقعی تری از جریان شکست سد دارد و در محل های ناپیوستگی دارای نوسان های غیر فیزیکی نیست. همچنین $RMSE = 0.0025$ به دست آمده است.

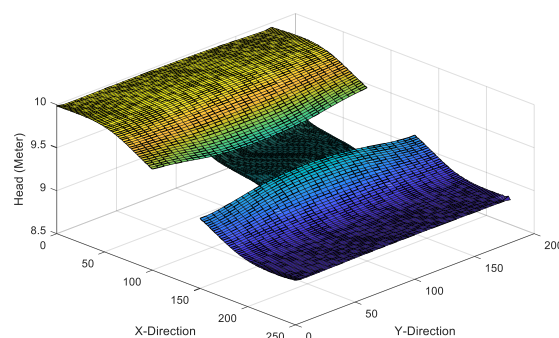


Fig. 10 Water free surface in example 3 using present method (t=5.104s)

شکل ۱۰ سطح آزاد آب در مثال سوم با روش حاضر (t=۵/۱۰۴s)

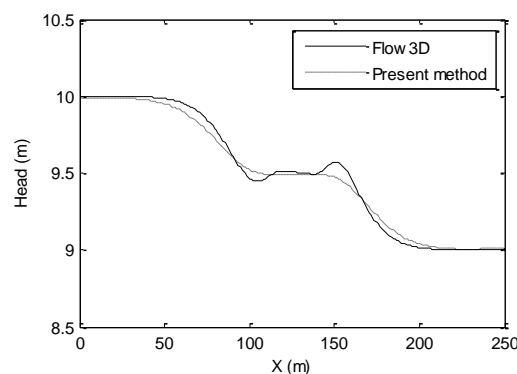


Fig. 11 Comparison of the water depth profile at $y=124.5$ m in present method and Flow-3D (t = 5.104 s)

شکل ۱۱ مقایسه نیمرخ سطح آب در رویکرد حاضر با نرم افزار Flow-3D در $y=124.50$ m (t = 5.104s)

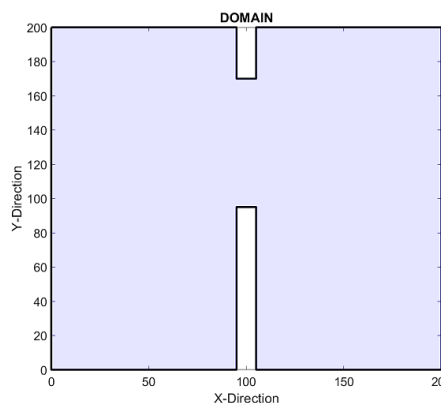


Fig. 12 Geometry of computational domain in example 4

شکل ۱۲ هندسه میدان محاسباتی در مثال چهارم

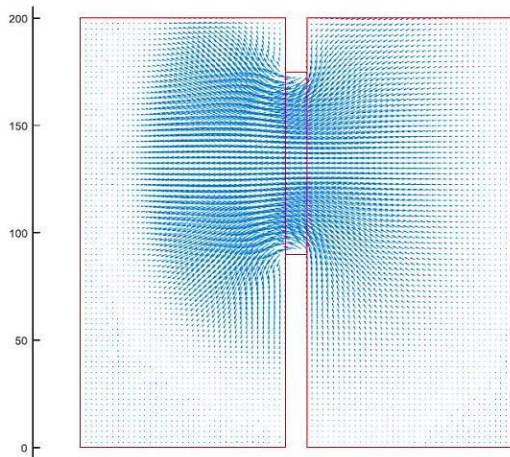


Fig. 17 Velocity vectors in example 4 in $t=7.2s$ (Muzík & Holickova 2003)

شکل ۱۷ بردارهای سرعت جریان در مثال چهارم در $t=7.2s$ (Muzík and Holickova, 2003)

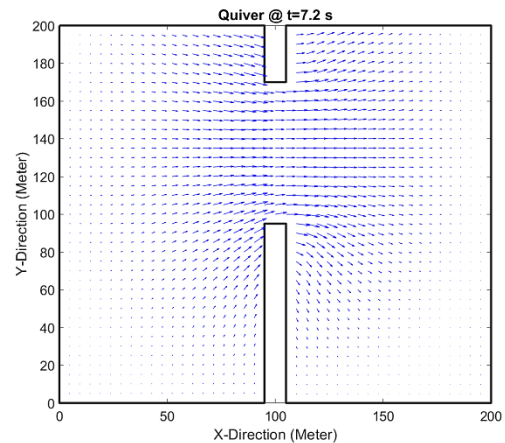


Fig. 15 Velocity vectors in example 4 using present method ($t=7.2s$)

شکل ۱۵ بردارهای سرعت جریان در مثال چهارم با روش حاضر در $t=7.2s$

۶- نتیجه گیری

در این پژوهش، روش بدون شبکه چندربعی با برتری‌هایی همچون (۱) ایجاد یک تابع پیوسته پاسخ در سراسر میدان محاسباتی، (۲) نبود نیاز به گسسته‌سازی کل فضای مسئله با قابلیت کاربرد بهینه در مسئله‌های بزرگ‌مقیاس، (۳) قابلیت شبیه‌سازی هندسه‌های نامنظم، (۴) توانایی شبیه‌سازی ناپیوستگی‌ها، (۵) تعمیم آسان به مسئله‌های سه‌بعدی و (۶) سادگی افزایش مرکزهای محاسباتی (برای افزایش دقت در محل‌های مورد نیاز) به دلیل ارتباط نداشتن آنها با یکدیگر، برای شبیه‌سازی جریان سیلاب ناشی از شکست سد توسعه داده شد. به این منظور در دستگاه معادله‌های حاکم برای گسسته‌سازی جمله‌های مکانی و زمانی به ترتیب از تابع چندربعی و رابطه اختلاف محدود پیشرو استفاده شد. همچنین برای گسسته‌سازی عبارت‌های مکانی روش ضمنی شبه خطی استفاده شد.

افزون بر این نشان داده شد که برای هر سه مجهول مسئله یعنی ارتفاع آب، سرعت در جهت X و سرعت در جهت Y می‌توان متغیر شکل بهینه را ثابت در نظر گرفت. همچنین راهکار مستقل بودن از زمان برای محاسبه مقدار بهینه متغیر شکل استفاده شد. در این راهکار، شرایط اولیه مسئله با تابع چندربعی درون‌یابی و متغیر شکلی که دقیق‌ترین برآورد را داشته باشد در همه گام‌های زمانی بهینه خواهد بود و لذا زمان محاسبات به شدت کاهش می‌یابد.

این مثال دارای حل تحلیلی نیست. به منظور صحت‌سنجی کلی پاسخ‌ها، نتایج پژوهش Muzík and Holickova (2003) نیز در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ آورده شده است. از مقایسه شکل‌های ۱۴ و ۱۶ مشاهده می‌شود که رویکرد حاضر برخلاف رویکرد Muzík and Holickova (2003) دارای نوسان‌های غیر فیزیکی نمی‌باشد.

به‌عنوان پیشنهادی برای پژوهش‌های آتی، می‌توان حل مسئله شکست سد با مانع و نیز بستر شیب‌دار پایین دست را با استفاده از رویکرد حاضر در نظر گرفت.

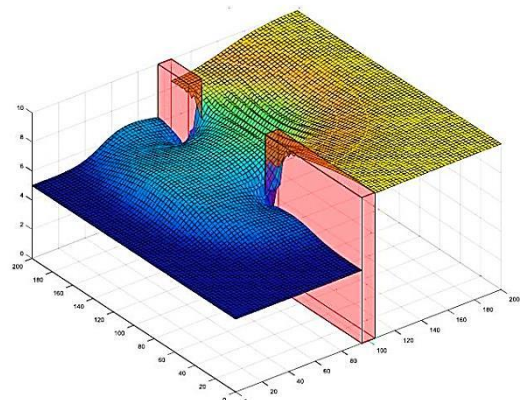


Fig. 16 Water free surface in example 4 in $t=7.2s$ (Muzík and Holickova, 2003)

شکل ۱۶ سطح آزاد آب در مثال چهارم در $t=7.2s$ (Muzík & Holickova 2003)

strategies for radial basis functions. *Computational and Applied Mathematics*, 34(2), 691-704.

Gottardi, G. and Venutelli, M. (2004). Central scheme for two-dimensional dam-break flow simulation. *Advances in Water Resources*, 27(3), 259-268.

Hardy, R. L. (1971). Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *Journal of geophysical research*, 76(8), 1905-1915.

Huang, C. S., Yen, H. D. and Cheng, A. D. (2010). On the increasingly flat radial basis function and optimal shape parameter for the solution of elliptic PDEs. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 34(9), 802-809.

Hon, Y. C. and Mao, X. Z. (1998). An efficient numerical scheme for Burgers' equation. *Applied Mathematics and Computation*, 95(1), 37-50.

Kansa, E. J. (1990). Multiquadrics—A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics—II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Computers & mathematics with applications*, 19(8-9), 147-161.

Kansa, E. J. and Carlson, R. E. (1992). Improved accuracy of multiquadric interpolation using variable shape parameters. *Computers & Mathematics with Applications*, 24(12), 99-120.

Kansa, E. J. and Geiser, J. (2013). Numerical solution to time-dependent 4D inviscid Burgers' equations. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(3), 637-645.

Koushki, M., Babae, R. and Jabbari, E. (2019). Application of RBF Multiquadric method for solving seepage problems using a new algorithm for optimization of the shape parameter. *Amirkabir Journal of Civil Engineering*, Accepted for publication.

Muzik, J. and Holickova, M. (2017). Meshless simulation of dam break using MLPG-RBF and shallow water equations. In *MATEC Web of Conferences* (Vol. 117, p. 00127). EDP Sciences.

Patel, S. and Rastogi, A. K. (2017). Meshfree multiquadric solution for real field large heterogeneous aquifer system. *Water Resources Management*, 31(9), 2869-2884.

Ritter, A. (1892). Die fortpflanzung der wasserwellen. *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, 36(33), 947-954.

Rippa, S. (1999). An algorithm for selecting a good value for the parameter c in radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 11(2-3), 193-210.

به منظور صحت‌سنجی و ارزیابی رویکرد پیشنهادی با ارائه چند مثال و مقایسه پاسخ آن‌ها با روش‌های دقیق و عددی نشان داده شد که روش حاضر با صرف کمترین هزینه‌های محاسباتی دقت خوبی در شبیه‌سازی جریان سیلاب ناشی از شکست سد به ویژه ناپیوستگی‌های موجود در آن دارد.

۷- منابع

Azarboni, H. R., Keyanpour, M. and Yaghouti, M. (2019). Leave-Two-Out Cross Validation to optimal shape parameter in radial basis functions. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 100, 204-210.

Biazar, J. and Hosami, M. (2016). Selection of an interval for variable shape parameter in approximation by radial basis functions. *Advances in Numerical Analysis*, 2016.

Chang, T. J., Kao, H. M., Chang, K. H. and Hsu, M. H. (2011). Numerical simulation of shallow-water dam break flows in open channels using smoothed particle hydrodynamics. *Journal of Hydrology*, 408(1-2), 78-90.

Chen, R. and Wu, Z. (2006). Applying multiquadric quasi-interpolation to solve Burgers' equation. *Applied mathematics and computation*, 172(1), 472-484.

Chen, W., Hong, Y. and Lin, J. (2018). The sample solution approach for determination of the optimal shape parameter in the Multiquadric function of the Kansa method. *Computers & Mathematics with Applications*, 75(8), 2942-2954.

Fallah, A., Jabbari, E. and Babae, R. (2019). Development of the Kansa method for solving seepage problems using a new algorithm for the shape parameter optimization. *Computers & Mathematics with Applications*, 77(3), 815-829.

Fasshauer, G. E. (2002). Newton iteration with multiquadrics for the solution of nonlinear PDEs. *Computers & Mathematics with Applications*, 43(3-5), 423-438.

Fennema, R. J. and Chaudhry, M. H. (1986). Explicit numerical schemes for unsteady free-surface flows with shocks. *Water Resources Research*, 22(13), 1923-1930.

Franke, R. (1979). A critical comparison of some methods for interpolation of scattered data (No. NPS53-79-003). *NAVAL POSTGRADUATE SCHOOL MONTEREY CA*.

Golbabai, A., Mohebianfar, E. and Rabiei, H. (2015). On the new variable shape parameter

radial basis functions. *Computers & Mathematics with Applications*, 43(3-5), 585-605.

Yaghouti, M. and Ramezannezhad Azarboni, H. (2017). Determining optimal value of the shape parameter c in RBF for unequal distances topographical points by Cross-Validation algorithm. *Journal of Mathematical Modeling*, 5(1), 53-60.

Yekta, A. H. A. and Banihashemi, M. A. (2011). A Godunov-type fractional semi-implicit method based on staggered grid for dam-break modeling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(10), 1291-1309.

Sun, C. P., Young, D. L., Shen, L. H., Chen, T. F. and Hsian, C. C. (2013). Application of localized meshless methods to 2D shallow water equation problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(11), 1339-1350.

Tatari, M. and Dehghan, M. (2009). On the solution of the non-local parabolic partial differential equations via radial basis functions. *Applied Mathematical Modelling*, 33(3), 1729-1738.

Wong, A. S. M., Hon, Y. C., Li, T. S., Chung, S. L. and Kansa, E. J. (1999). Multizone decomposition for simulation of time-dependent problems using the multiquadric scheme. *Computers & Mathematics with Applications*, 37(8), 23-43.

Wong, S. M., Hon, Y. C. and Li, T. S. (2002). A meshless multilayer model for a coastal system by